

Implemetacija tangrama u nastavi geometrije

Hršak, Karla

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:642912>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-03**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Karla Hršak

**IMPLEMENTACIJA TANGRAMA U
NASTAVI GEOMETRIJE**

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Karla Hršak

**IMPLEMENTACIJA TANGRAMA U
NASTAVI GEOMETRIJE**

Diplomski rad

Mentor rada:
doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Zagreb, srpanj 2020.

Zahvala

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Dubravki Glasnović Gracin na prihvaćanju mentorstva. Iznimno sam zahvalna na njenom stručnom vođenju i usmjeravanju prilikom nastajanja ovog rada te strpljenju i trudu kojeg je uložila kako bi se moja ideja realizirala.

Posebno se zahvaljujem svojoj obitelji, roditeljima i sestrama, koji su me podržavali i ohrabrivali kroz cijelo obrazovanje te nisu gubili vjeru u mene.

Sadržaj

Sažetak	
Summary	
1. Uvod	1
2. Tangram.....	3
2.1. Povijest tangrama i legenda o tangramu	4
2.2. Širenje tangrama	5
2.3. Igre po uzoru na tangram.....	7
3. Matematička pozadina tangrama	9
3.1. Tanovi	9
3.2. Pitagora u Tangramu	10
3.3. Teorem o tangramu.....	11
4. Primjena tangrama u nastavi geometrije.....	14
4.1. Geometrija i nastava geometrije.....	14
4.2. Tangram u nastavi geometrije.....	18
4.3. Aktivnosti s tangramom	20
5. Provedba aktivnosti s tangramom na radionici.....	23
5.1. Priprema radionice	23
5.2. Tijek aktivnosti s tangramom na radionici	24
5.3. Mišljenje ispitanih studenata o upotrebi tangrama u nastavi	26
5.4. Zaključci o provedbi aktivnosti s tangramom.....	31
6. Zaključak.....	33
Literatura	34
Prilozi.....	37

Sažetak

Učenici u nastavnom predmetu Matematika trebaju svladati sadržaje iz područja aritmetike i iz područja geometrije. Slagalice tangram može pomoći učeničkom boljem razumijevanju, ali i približavanju sadržaja geometrije te razvijanju ravninskog zora i geometrijskog mišljenja. Ovaj rad donosi pregled literature o tangramu, prikaz povijesti širenja slagalice svijetom, daje uvid u matematičku pozadinu tangrama te daje prijedlog aktivnosti za učenike razredne nastave s tangram slagalicom. U radu je detaljno opisano planiranje radionice za učenike četvrtih razreda osnovne škole te provedba prilagođenih aktivnosti s tangramom za studente četvrte godine Učiteljskog fakulteta. Cilj provedenih aktivnosti s tangramom sa studentima Učiteljskog fakulteta je bio osvijestiti na koje se sve načine tangram može implementirati u nastavni sadržaj geometrije te istaknuti prednosti rada s tangramom. Sa studentima se po završetku aktivnosti provela kratka anketa o njihovom prvom susretu s tangramom i stavom o implementaciji ove slagalice u nastavu. Rezultati ankete za studente pokazuju kako 98% ispitanih studenata smatra da je tangram slagalice odličan način kako bi se razvijalo učeničko mišljenje, a čak 92% ispitanih studenata navodi kako bi slagalicu tangram željelo implementirati u svoju nastavu.

KLJUČNE RIJEČI: tangram, nastava geometrije, radionica, aktivnosti s tangram slagalicom

Summary

In Mathematics, students need to master content from arithmetic and geometry branch. Tangram puzzle can help bring geometry content closer to the students and it helps them develop better geometry thinking and understanding. This graduate thesis presents a review of literature about tangram and also the historical overview of how tangram puzzle spread throughout the world. It gives an insight into mathematical background of tangram and a proposition of tangram activities for students in elementary school. There is a detailed description of a workshop for 4th grade students of elementary school, as well as a description of implementation of those tangram activities adjusted for students of the 4th year of Faculty of Teacher Education. The goal of conducted activities with the students of the Faculty of Teacher Education was to become aware of all the different ways in which tangram can be implemented or used in teaching geometry content and to point out the advantages of working with tangram. A short survey about their first encounter with tangram as well as their attitude towards implementation of tangram in teaching was conducted after the activities. The results of the survey show that 98% of surveyed students believe that tangram puzzle is a great way to develop student thinking, and as much as 92% of them stated that they would like to use tangram in their teaching.

KEY WORDS: tangram, geometry teaching, workshop, tangram puzzle activities

1. Uvod

Matematika je važan segment u životu pojedinca, bio pojedinac toga svjestan ili ne. Koristimo je u svakodnevnome životu, u trgovini, u banci, na pošti, prilikom plaćanja računa ili kuhanja. Također, prisutna je i kod izgradnje ili preuređenja prostora, a isto tako i kod planirana putovanja. Znanosti kao što su fizika, kemija i biologija, ne mogu bez matematike pa se je i tamo može susresti. Osim u drugim znanostima, prisutna je i u nekim igrama, bilo da su to videoigre, društvene igre ili neke rekreacijske igre. Vezano uz to, nastavni predmet Matematika je, nakon Hrvatskoga jezika, najzastupljeniji predmet u osnovnoj školi gledano po broju sati na godišnjoj i tjednoj razini. Prema Nastavnome planu i programu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006), u osnovnoj školi propisano je 140 nastavnih sati Matematike u školskoj godini. Broj tjednih i godišnjih nastavnih sati za matematiku se nije mijenjao ni dolaskom novog kurikulumu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019). Novim kurikulumom nastavni sadržaj Matematike je podijeljen u nekoliko domena, a domena Oblik i prostor, koja se odnosi na geometriju, ne obuhvaća ni četvrtinu ishoda nastavnog predmeta Matematike u prvom, drugom i trećem razredu osnovne škole. Navedena domena je u četvrtome razredu osnovne škole skoro dva puta više zastupljenija nego li je to slučaj u drugome i trećemu razredu osnovne škole (Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, 2019, str. 6-17).

Geometrija je svakome pojedincu važna zbog snalaženja u svijetu, radi se o disciplini s velikom tradicijom, a u školskim kurikulumima danas se sve manje radi na geometrijskome mišljenju (Glasnović Gracin i Kuzle, u tisku, str. 1). Stoga mnogi učenici imaju poteškoće prilikom svladavanja sadržaja iz geometrije. Zanemarivanje može biti posljedica „nedostatka primjerenih nastavnih sredstava, ali i nedovoljne stručnosti nastavnika“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 1). Kao posljedica se pojavljuje da „mnogi učenici imaju teškoća pri učenju geometrije, pri vizualizaciji određenih geometrijskih sadržaja, kao i pri zaključivanjima koja se na njima temelje“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 1). Sama geometrija je važna za razvoj geometrijskoga mišljenja, zaključivanja, snalaženja u prostoru, rješavanja problema pa se može zaključiti da bi učenici kao posljedicu mogli imati problema u orijentaciji, odnosno poteškoća u svakodnevnom snalaženju u prostoru.

Tangram, kao slagalica za kojom interes ljudi raste iz dana u dan, može pomoći približavanju geometrije i njenog sadržaja učenicima. Tangram može uvelike pomoći pri razvoju geometrijskoga mišljenja, zaključivanju i snalaženju u prostoru, a ponajviše u

približavanju geometrije učenicima i njihovoj motivaciji. Stoga je cilj ovog rada proučiti dostupnu literaturu vezanu uz tangram i uvidjeti njegove potencijale te dati prijedlog za održavanje radionice za četvrti razred osnovne škole i analizu same provedbe radionice. Radionica se može primijeniti kao sat ponavljanja površine i opsega geometrijskih likova.

U prvom dijelu rada prikazan je kratki pregled pojma i povijesti tangrama. Ukratko je opisano podrijetlo naziva i povijest o kojoj se zna jako malo. Također, spomenuta je i poznata legenda o tangramu te je opisano i širenje interesa o tangramu, a spomenute su i prve napisane knjige o tangramu. Za kraj poglavlja navedene su i prikazane igre koje su proizašle iz ove zanimljive slagalice.

Slijedi matematička pozadina tangrama gdje su ukratko opisani dijelovi tangrama, zvani tanovi. Prikazana je matematika koja stoji iza tangrama: sukladnost i sličnost tan trokuta, skrivena Pitagora u tangramu te je ukratko prikazan teorem o tangramu.

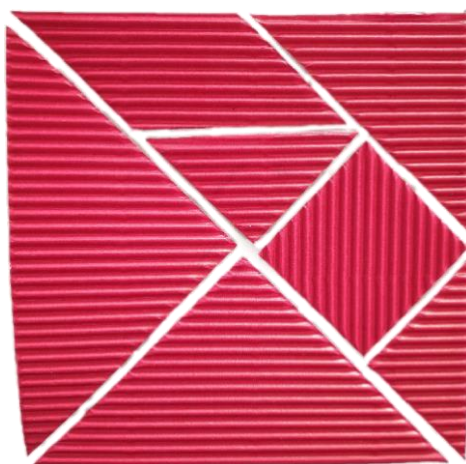
U četvrtome dijelu se nalazi pregled i zastupljenost geometrije u školstvu. Ukratko je opisano zašto učenici imaju poteškoća s geometrijskim sadržajem te zašto je slagalica tangram korisna u nastavi geometrije. Također, daju se prijedlozi na upotrebu tangrama u nastavi geometrije u nižim razredima osnovne škole.

Nadalje, prikazana je provedba aktivnosti s tangramom. Detaljno je opisana priprema radionice. Početna ideja ovog rada bila je da se provede radionica s tangram slagalicom s učenicima četvrtoga razreda osnovne škole. Kako zbog izvanredne situacije uzrokovane pandemijom Covid-19 koja se dogodila tijekom pisanja ovog rada to nije bilo moguće provesti, aktivnosti su se prilagodile te su se provele sa studentima četvrte godine Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Također, osmišljena je i provedena anketa o aktivnostima i mišljenju sudionika o tangram slagalici pa je tako u petom poglavlju prikazan tijek aktivnosti te rezultati ankete.

2. Tangram

Tangram je poznata kineska slagalica koja je iz dana u dan sve popularnija u svijetu. „U Kini, tangram je poznat kao *Ch'i ch'iao t'u*, što se prevodi kao *Sedam genijalnih planova* ili kao *Slika napravljena korištenjem sedam pametnih pločica*“ (Slocum, 2004, str. 20). Sam naziv *tangram* može se tumačiti i kao spoj kineske i engleske riječi: „kineska riječ *t'ang* (ima značenje *Kineska*) i engleski završetak riječi *gram* (nešto nacrtano, kao u dijagramu)“ (Slocum, 2004, str. 23). S druge strane, riječ tangram nije poznata u Kini te nema nikakvu poveznicu s kineskim jezikom pa se smatra da je ovaj naziv potekao iz Sjedinjenih Američkih Država kada sličan pojam, *trangram*, prvi spominje James Coxe u nazivu svoje knjige *Chinese Philosophical and Mathematial Trangram*. Pojam tangram, danas svima poznati naziv slagalice, „prvi je upotrijebio Thomas Hill u svojoj knjizi *Geometrijske zagonetke za mlade*“ (Jukić, 2009, str. 1).

Tangram se sastoji od sedam dijelova (pločica koje predstavljaju geometrijske likove) koji se nazivaju tanovima, jedan lik je jedan tan, o čemu će više riječi biti u sljedećem poglavlju. Dijelovi tangrama su prije izrađivani od raznog materijala, kao što je glina, životinjske kosti ili porculan. Danas se dijelovi izrađuju od drveta ili plastike, a svatko može napraviti dijelove za tangram iz papira ili kartona tako da kvadrat izreže na određene dijelove (vidjeti sliku 1). Slagalica se sastoji od sedam dijelova „od kojih se može oblikovati na tisuće raznovrsnih tangram figura koje prikazuju: znakove, predmete, životinje, osobe, itd.“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 2). Figure moraju biti lako prepoznatljive kako bi igra bila uspješna (slika 2).



Slika 1. Prikaz kvadrata složenog pomoću tangram dijelova napravljenih iz kartona



Slika 2. Prikaz čovjeka, zeca i brojke 1 pomoću tangrama

2.1. Povijest tangrama i legenda o tangramu

Vežano uz nastanak tangrama, Baranović i Lehman (2018, str. 2) navode: „O samom nastanku tangram slagalice ne zna se baš mnogo pa je to prikladan prostor za stvaranje raznih priča i legendi koje se u nedostatku dokaza ne mogu ni potvrditi ni odbaciti.“ . Neki vjeruju kako je igra nastala prije 4 000 godina od strane boga Tana, a „sedam pločica su dijelovi planeta Sunca, Mjeseca, Marsa, Venere, Merkura, Saturna i Jupitera“ (Jukić, 2009, str. 2). S druge strane, najpoznatija je legenda koja govori o slugi koji je "zaslužan" za nastanak tangrama. Naime, sluga je kralju nosio stakleni pladanj kvadratnog oblika koji je, netom prije nego li ga je dao kralju, razbio. Staklo se razbilo na točno sedam dijelova, a „sluga je od dijelova stakla slagao razne figure ne bi li i vizualno dočarao svoju priču“ (Baranović i Kavajin, 2019, str. 2). Od dijelova je tako složio razne likove, na primjer brod i devu (slika 3). Kralj je bio oduševljen pričom i figurama koje je složio sluga te je naredio da se izrade identične pločice i tako je nastala igra tangram.



Slika 3. Prikaz deve i broda pomoću tangrama

S druge strane, smatra se da je Yang-cho-chushih izmislio samu igru te napisao knjigu *Ch'i ch'iao t'u*. Yang-cho-chushih, nije koristio svoje pravo ime već pseudonim, a kopije njegove knjige nisu nikada pronađene. Postojanje prve knjige o tangramu se spominje jedino u knjizi *New figures of the Tangram* u kojoj autor Shan-chiao izražava žaljenje što je prva knjiga o tangramu nestala (Slocum, 2004, str. 21).

2.2. Širenje tangrama

Širenje tangrama započinje u listopadu 1815. godine kada je kapetan Edward M. Donaldson na poklon dobio nekoliko primjeraka knjige o tangramu (slika 4).



Slika 4. Knjiga Sang-hsia-k'o koja je darovana Kapetanu Edwardu M. Donaldsonu 1815. godine (Slocum, 2004, str. 30)

Sljedeće godine, 1816. kapetan dolazi u Sjedinjene Američke Države, točnije u Philadelphiu, gdje je nakon godinu dana bila tiskana prva američka knjiga o tangramu, po uzoru na knjigu koju je dobio na poklon. Nakon izdavanja knjige i popularizacije igre u Americi, igra se je proširila Engleskom, a potom i cijelom Europom. „Pločice su bile izrađene od bjelokosti i drveta, a do Engleske i Europe su se prevozile jedrenjacima“ (Slocum, 2004, str. 30). Tangram se po Europi raširio gotovo jednakom brzinom kao i u Sjedinjenim Američkim Državama. Igru su opisivali „vrlo elegantnom: predlošci su isprintani na prirodnom papiru s prekrasnom kineskom crvenicom, sedam dijelova je isklesano iz drva ili bjelokosti ili matičnjaka, a cijela igra je zatvorena u lakiranoj kutijici crne i zlatne boje“ (Slocum, 2004, str. 30). U Londonu je potom tiskana knjiga pod nazivom *Chinese Puzzle*, a dolazila je sa slagalicom u setu. Iako je ovo bilo prva knjiga tiskana u Engleskoj, „zasluge za popularizaciju slagalice, ne samo u

Londonu već i u cijeloj Europi, se moraju dati britanskim knjigama: *The Fashionable Chinese Puzzle* i njezinom paru, *Key*, izdane od strane Johna i Edwarda Wallisa i John Wallisa, Mlađeg“ (Slocum, 2004, str. 31) (slika 5).



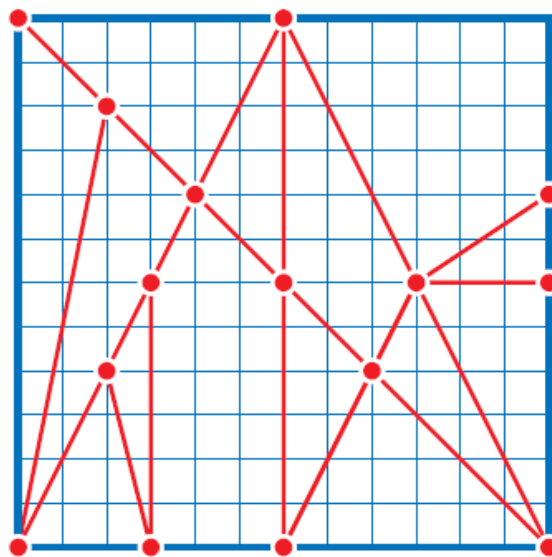
Slika 5. John i Edward Wallis i John Wallis, Mlađi: *The Fashionable Chinese Puzzle* i *Key* (Slocum, 2004, str. 31)

Iz Engleske se igra krenula širiti po cijeloj Europi, od Francuske do Njemačke i Italije. U Europi, nakon Engleske, prva knjiga se tiskala u Francuskoj, a nosila je naziv *Enigmes Chinoises*. Sama knjiga je napravljena po uzoru na knjigu Johna i Edwarda Wallisa. Osim u Francuskoj, po uzoru na knjigu J. i E. Wallisa, napisane su i knjige u Nizozemskoj, Italiji, Danskoj i Švicarskoj (Slocum, 2004, str. 32). U Europi i Kini je igra postigla daleko veću zainteresiranost nego li je to bio slučaj u Sjedinjenim Američkim Državama. Zbog manje zainteresiranosti za igru u Sjedinjenim Američkim Državama tiskano je puno manje knjiga nego li je to bio slučaj u Europi. U nekim europskim gradovima je zainteresiranost za ovu igru bila toliko velika da je u knjizi Martineta, *Caricatures Parisiennes*, 1818. godine, prikazano kako „roditelji ignoriraju dječji plač i njihove potrebe te nedovoljnu razinu topline u domu dok ostaju budni tokom noći i rješavaju tangram slagalice“ (Slocum, 2004, str. 33). Vjeruje se kako su i neke poznate osobe voljele ovu igru, a najznačajniji među njima jesu Lewis Carrol, Edgar Allan Poe te Napoleon (Jukić, 2009, str. 2). Za poznate osobe se ne može sa stopostotnom sigurnošću tvrditi jesu li stvarno voljele ovu igru ili je to netko izmislio kako bi se pobudio interes za kupnjom knjige i same igre. Osim za zabavu, tangram se koristio i u druge svrhe, npr.

mnogi dizajneri su po uzoru na tangram pločice, tanove, kreirali namještaj, kuhinjsko posuđe te nakit, a neki ga čak koriste i za promociju raznih ideja.

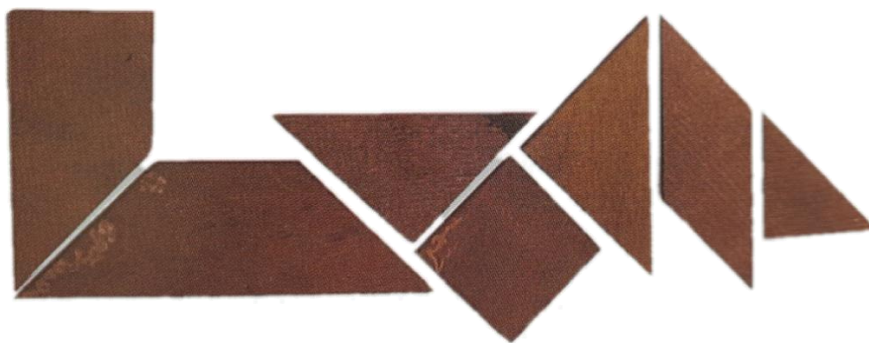
2.3. Igre po uzoru na tangram

Po uzoru na tangram slagalicu izmišljeno je nekoliko igara koje povezuje da se iz svih danih pločica složi prepoznatljiva figura. Prva takva poznata slagalica te „dio Arhimedova palimpsesta je i jedna neobična i vrlo zanimljiva geometrijska zagonetka zvana *Stomachion*. Može se još zateći pod nazivima Arhimedova kutija, ostomakion i sintemakion“ (Dakić, 2008, str. 4). Slagalica se sastojala od 14 dijelova pomoću kojih se je moglo složiti više od 1 000 ljudskih i životinjskih figura (slika 6) te figura predmeta.



Slika 6. Prikaz kvadrata podijeljenog na dijelove slagalice *Stomachion* (Dakić, 2008, str. 4)

U 18. stoljeću u Japanu se je pojavila slagalica pod imenom *Sei Shonagon's Wisdom Plates*, a sastojala se od 7 dijelova, kao i tangram, ali drugačijih oblika (slika 7). Pomoću ove slagalice moglo se složiti stotinjak različitih figura. Bila je toliko popularna da je popraćena dvjema knjigama koje su nudile predloške i rješenja.



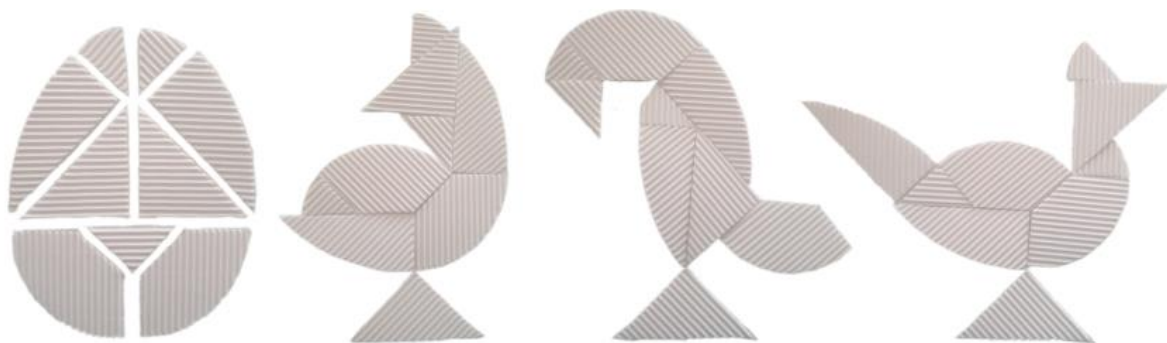
Slika 7. Prikaz slagalice imenom *Sei Shonagon's Wisdom Plates* (Slocum, 2004, str. 13)

Nakon uspjeha sedmodijelne slagalice, u Japanu se pojavljuje i slagalica od 15 dijelova, a koja nosi naziv *Chie-ite-no-zu* ili u prijevodu *Figure napravljene od genijalnih komada*, čiji je naziv sličan i originalnom nazivu tangrama koji je spomenut na početku ovog poglavlja (slika 8).



Slika 8. Slagalica Chie-ite-no-zu (Slocum, 2004, str. 13)

Osim navedenih slagalica, postoji i slagalica Tangram jaje. Slagalica se sastoji od „9 dijelova koji mogu stvoriti razne likove, a najpopularniji među njima jesu likovi ptica“ (Khairiree, 2015, str. 3). Svi dijelovi slagalice su geometrijski likovi (slika 9). Osim dijelova slagalice Tangram jaje, slika 7 prikazuje i nekoliko likova ptica koje se mogu složiti pomoću ove slagalice.



Slika 9. Slagalica Tangram jaje

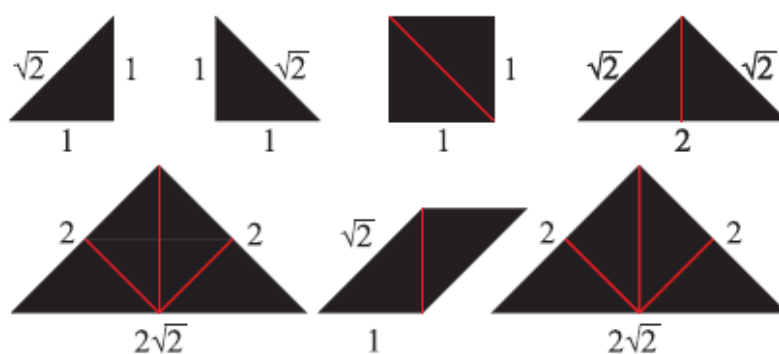
3. Matematička pozadina tangrama

Spomenuto je kako tangram služi za intelektualnu zabavu, ali i za razvoj geometrijskog mišljenja te kako se pomoću samo sedam dijelova mogu složiti različiti likovi. Ono što nije spomenuto je upravo to da se u ovim sedam dijelova krije i matematika, između ostaloga, sukladnosti, sličnosti i konveksni likovi. Upravo će se u ovom poglavlju staviti naglasak na osnovnoškolsku matematiku koja se krije iza ove zanimljive slagalice. Pomnije će se proučiti dijelovi tangrama te Teorem o tangramu.

3.1. Tanovi

Dijelove tangrama nazivamo tanovima, kao što je spomenuto u prošleme poglavlju, a lik koji je složen pomoću tanova, nazivamo tangram figura. Tangram se sastoji od 7 tanova, točnije od 2 mala jednakokračna pravokutna trokuta, 2 velika jednakokračna pravokutna trokuta, 1 srednjeg jednakokračnog pravokutnog trokuta, 1 kvadrata i 1 paralelograma (slika 10). Budući da dijelove tangrama nazivamo tanovima, tako postoje tan trokut, tan kvadrat i tan paralelogram.

Svim tanovima možemo izmjeriti duljine stranica, a najjednostavnije je da za jedinični kvadrat uzmemo tan kvadrat odnosno da stranice kvadrata iznose 1. Možemo uočiti kako je kod malih jednakokračnih pravokutnih trokuta, duljina hipotenuze $\sqrt{2}$, dok im katete iznose 1. Duljina hipotenuze velikog jednakokračnog trokuta iznosi $2\sqrt{2}$, a duljina kateta iznosi 2. Srednji jednakokračan pravokutan trokut ima hipotenuzu duljine 2, a katete duljine $\sqrt{2}$. Što se tiče paralelograma njegove stranice iznose 1 i $\sqrt{2}$ (slika 10).



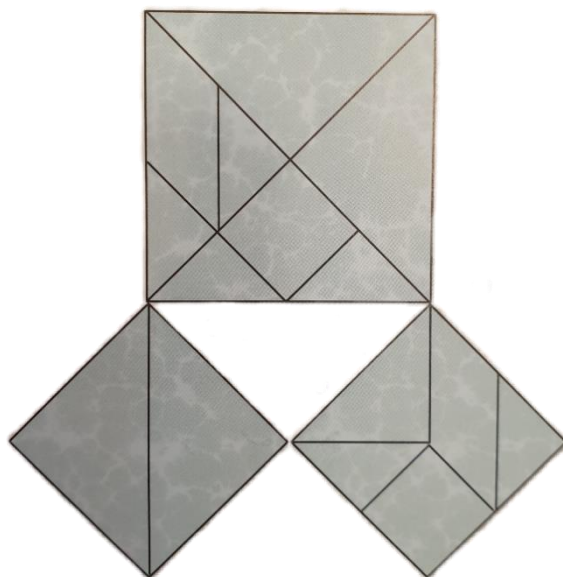
Slika 10. Prikaz tanova (Dakić, 2011, str. 2.)

Također, s matematičke strane, možemo govoriti i o sukladnosti i o sličnosti. U slučaju tangrama su svi tan trokuti slični jer vrijedi teorem K-K. Drugim riječima, svi tan trokuti su jednakokračni pravokutni trokuti, iz čega proizlazi da su im svi kutovi jednaki (45° , 45° , 90°).

Što se tiče sukladnosti trokuta, nailazimo na dva para sukladnih trokuta, 2 velika jednakokračna pravokutna tan trokuta i 2 mala jednakokračna pravokutna tan trokuta koji su potpuno jednaki.

3.2. Pitagora u Tangramu

Budući da se svi tanovi mogu podijeliti na manje jednakokračne pravokutne trokute, ili su već i sami takvi trokuti, (slika 10, crvene linije), Pitagorin poučak je primjenjiv na svim tanovima. No, s druge strane, ukoliko složimo određeni tangram lik koristeći 2 tangrama (slika 11), dobit ćemo „prazan lik“ koji odgovara jednakokračnom pravokutnom trokutu na kojem je ponovo primjenjiv Pitagorin poučak. Za jedan kvadrat nad katetom su korištena 2 velika tan trokuta, a za drugi preostalih 5 tan likova. Za veliki kvadrat na hipotenuzom je korišteno svih 7 tanova jednog tangrama. Kvadrati nad katetama su zajedno načinjeni od svih tanova drugog tangrama. Time dobivamo jednostavni dokaz Pitagorinog poučka. Katete pravokutnog trokuta (prikazanog prazninom) čine kateta velikog jednakokračnog pravokutnog tan trokuta te hipotenuza malog jednakokračnog pravokutnog trokuta. Hipotenuza pravokutnog trokuta (prikazanog prazninom) čine 2 hipotenuze malih jednakokračnih pravokutnih trokuta u velikome kvadratu (slika 11). Dva velika jednakokračna pravokutna trokuta čine jednu polovicu velikoga kvadrata, a ostalih 5 tan likova čine drugu polovicu velikoga kvadrata. Iz ovog razloga su i uobičajena tangram pakiranja kvadratnog oblika, napravljena da u njega točno stanu tanovi složeni u oblik kvadrata. „Poznata kineska matematičarka iz trećeg stoljeća, Liu Hui, objasnila je teorem i opisala metodu razdvajanja i preslagivanja tanova kako bi teorem dokazala“ (Slocum, 2004, str. 15).



Slika 11. Pitagorin poučak u tangramu (Slocum, 2004, str. 15)

3.3. Teorem o tangramu

Baranović i Lehman (2018, str. 3) navode kako su 1942. godine kineski matematičari Tsiang Wang i Chuan-Chih Hsiung postavili i dokazali teorem o tangramu. Teorem o tangramu glasi: „Pomoću tangram slagalice može se oblikovati točno 13 konveksnih tangram likova“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 3). Konveksni likovi su likovi čiji su svi unutrašnji kutovi manji od 180° . Da bi se dokazao ovaj teorem potrebne su 4 pomoćne tvrdnje, takozvane leme. Sve leme su potanko objašnjene u radu *Matematika u tangramu, tangram u matematici* (Baranović i Lehman, 2018).

„Kako bismo doznali koliko se konveksnih tangram likova može oblikovati, prvo ćemo razmatrati oblikovanje konveksnih likova pomoću 16 malih tan trokuta, a zatim isključiti one koji se ne mogu prekriti tanovima“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 3). Iz ovog razloga se u svim lemama spominje 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta.

Tako prva lema glasi: „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda racionalna stranica jednog trokuta ne može biti postavljena uz iracionalnu stranicu drugog trokuta“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 4). Kako bi se dokazala ova lema, Baranović i Lehman navode da bi se trebalo pretpostaviti suprotno i to provjeriti. Na taj način, slaganjem malih tan trokuta tako da je racionalna stranica malog tan trokuta postavljena uz iracionalnu stranicu tan trokuta, ne dobiva se konveksan lik. Ako se trokuti slažu uz pravac „tako da s jedne strane pravca budu racionalne stranice trokuta, a s druge strane iracionalne stranice, počevši od iste točke pravca, popunjavajući i praznine do konveksnog lika“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 4), neće se dobiti konveksan lik jer je duljina dijela pravca kojeg zauzimaju racionalne stranice trokuta prirodni broj, a duljina dijela pravca kojeg zauzimaju iracionalne stranice iracionalni broj. Trokuti se mogu slagati i na razne načine tako da je racionalna stranica postavljena uz iracionalnu stranicu, ali ni na jedan način se neće dobiti konveksan lik. „Dakle, ako se pomoću opisanih 16 trokuta želi oblikovati konveksan lik, onda se racionalna stranica trokuta mora složiti uz racionalnu stranicu, a iracionalna uz iracionalnu“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 5).

Nadalje druga lema, koja neposredno proizlazi iz prve leme, glasi:

Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda je svaka stranica tog lika sastavljena od racionalnih ili iracionalnih stranica polaznih trokuta. Štoviše, ako su stranice konveksnog lika različitih vrsta, one se izmjenjuju, osim u slučaju kada je kut konveksnog lika pravi kut (Baranović i Lehman, 2018, str. 5).

Nadalje, kako bi se dokazao teorem, važno je navesti i treću lemu, koja glasi; „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda taj lik može najviše biti osmerokut“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 6). Kako bi se dokazala ova lema potrebno je riješiti nejednadžbu

$$(n - 2) \cdot 180^\circ \leq 135^\circ \cdot n$$

ili, drugim načinom, moraju vrijediti jednakosti

$p + q + r = n$, $p \cdot 90^\circ + q \cdot 45^\circ + r \cdot 135^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$ gdje p predstavlja broj kutova od 90° , q broj kutova od 45° , a r broj kutova od 135° (Baranović i Lehman, 2018). Jednim i drugim način, dobiva se rješenje $n \leq 8$, čime je potvrđena ova lema.

Iz svega navedenog proizlazi posljednja, četvrta lema koja glasi: „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda se taj lik može upisati u pravokutnik tako da sve racionalne stranice (ili sve iracionalne stranice) pripadaju stranicama pravokutnika“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 6).

Nakon potvrđenih lema, potrebno je odrediti koji se sve konveksni likovi mogu složiti pomoću 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta. Da bismo pronašli o kojim se konveksnim likovima radi, potrebno je odrediti rješenja jednadžbe

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16,$$

ali da rješenja budu cijeli brojevi te da vrijedi:

$$a + b \leq x,$$

$$c + d \leq x,$$

$$a + d \leq y, b + c \leq y \text{ (Baranović i Lehman, 2018, str. 7).}$$

Postoji 48 različitih rješenja od kojih su samo 20 konveksni likovi. „Među 20 izdvojenih različitih konveksnih likova, 7 ih se ne može prekriti sa svih sedam tanova“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 16). Zaključujemo da se pomoću tanova može složiti 13 različitih konveksnih likova: 1 trokut, 2 peterokuta, 4 šesterokuta i 6 četverokuta (slika 12).



Slika 12. Prikaz 13 konveksnih likova koji se mogu složiti pomoću tangrama

4. Primjena tangrama u nastavi geometrije

U uvodu je spomenuto kako primjena tangrama ima pozitivnog učinka na učenike te na razvoj njihova geometrijskoga mišljenja. U ovom poglavlju će se staviti naglasak na nastavu geometrije, njenu zastupljenost u nižim razredima osnovne škole te će se dati prijedlog aktivnosti s tangramom koje se mogu provesti u razrednoj nastavi. Uz prijedloge aktivnosti s tangramom, navest će se i sadržaji Kurikuluma (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019) te Nastavnoga plana i programa (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006) uz koje bi se navedene aktivnosti mogle vezati.

4.1. Geometrija i nastava geometrije

Nastavni predmet Matematika obuhvaća sadržaje aritmetike i geometrije te još nekih matematičkih disciplina. Aritmetika se odnosi na dio matematike koja se bavi brojevima i računskim operacijama s brojevima općenito. Školska geometrija se prvenstveno odnosi na prostorne oblike i odnose među njima (Gusić, 1995; Serin, 2018). Naziv *geometrija* potječe od grčke riječi *gea*, što u prijevodu znači Zemlja, a *metron* znači mjerenje. Ovaj naziv sugerira da su stari narodi geometriju trebali za mjerenje Zemlje te ostale aktivnosti u službi svakodnevnih potreba.

Što se tiče povijesti geometrije, geometrija je oduvijek prisutna, a koristili su je i Babilonci i Egipćani. Egipćani „nisu imali namjeru razviti općenite matematičke metode i teorije, nego im je matematika služila pri rješavanju praktičnih problema koji su za njih imali primjenu u zemljoradnji, građevini, ekonomiji i religiji“ (Jankov, 2011, str. 1). Tako su „stari Egipćani imali vrlo dobre približne formule čak i za izračunavanje volumena kugle i volumena krnje piramide“ (Devide, 1979, str. 44). Babilonci su, također, geometriju koristili samo iz konkretnih potreba, kao što su mjerenje površine zemljišta, volumena tijela i drugo. Važno je napomenuti kako su „Mezopotamci poznavali upute za određivanje površine trokuta i trapeza, a upute za određivanje volumena valjka, stošca ili krnje piramide bile su samo približne“ (Znam i dr., 1989, str. 20). Geometrija svoj 'procvat' doživljava u antičkom dobu. Najvažnija osoba je Euklid koji je oko 300 g. pr. n. e. sakupio svo znanje vezano uz geometriju i napisao 13 knjiga, poznatih pod nazivom Euklidovi elementi. U knjigama su opisane tvrdnje koje se ne dokazuju, takozvani aksiomi, a na kojima počiva cijela geometrija ravnine (Božović, 2009, str. 2). Euklidovi elementi su stoljećima bili osnovna knjiga za učenje geometrije u Europi i zapadnom svijetu.

U poučavanju sadržaja nastave Matematike, pa tako i pri samom poučavanju sadržaja geometrije, vrlo je važno da su zadovoljena metodička načela koja „su polazne osnove pri

uspostavljanju, procjenjivanju i vrednovanju cjelokupnog odgojno-obrazovnog procesa u nastavi“ (Markovac, 1990, str. 49). Kurnik (2002, str. 1) navodi kako učitelji pa i nastavnici Matematike nastavu mogu izvoditi na osnovu temeljnih ideja i smjernica, odnosno na načelima nastave Matematike. Cilj metodičkih načela je „matematičko odgajanje i obrazovanje učiniti maksimalno efikasnim“ (Markovac, 1990, str. 49). Markovac (1990) navodi kako u nastavi Matematike nailazimo na šest metodičkih načela: načelo primjerenosti, načelo vlastite aktivnosti, načelo zornosti, načelo postupnosti, načelo individualizacije i načelo objektivne realnosti. S druge strane, Kurnik navodi sljedeća načela: načelo znanstvenosti, načelo problemnosti, načelo tehnologije, načelo primjerenosti, načelo trajnosti znanja i načelo interesa. Kako bi nastava Matematike pa tako i geometrije bila uspješna i kako bi se učenima olakšalo svladavanje sadržaja, potrebno je poštivati načela nastave matematike. Kako jedno načelo nije važnije od drugoga, važno je „da se u nastavi podjednako uvažavaju i primjenjuju sva načela jer se vrijedan odgojno-obrazovni rezultat postiže realizacijom svih načela, a ne samo nekih“ (Markovac, 1990, str. 49).

Osim poštivanja i upotrebe metodičkih načela, važno je i koje će metode i oblike rada učitelj koristiti, ali i koja će mu sredstva i pomagala pomoći pri približavanju sadržaja učenicima. Važno je da učitelj ima na umu kako uspješnost nastave ne ovisi samo o njemu, „tu su još učenici, sa svojim predznanjima, matematičkim sposobnostima i načinima mišljenja“ (Kurnik, 2013, str. 35). Tek kada učitelj uzme navedeno u obzir, može organizirati uspješan sat geometrije, odnosno Matematike. Od nastavnih metoda, učitelj može koristiti metodu razgovora, metodu demonstracije, metodu usmenog izlaganja, metodu rada s tekstom te metodu grafičkih radova. Što se tiče oblika rada, odnosno o načinima sudjelovanja u samome procesu, učitelj u nastavi Matematike, kao i u ostalim nastavnim predmetima, može odabrati između frontalnog rada, rada u paru, grupnog rada ili individualnog rada. Dakako da svaki način rada ima svoje prednosti, ali i mane te bi učitelj trebao biti oprezan s odabirom.

Nastavna sredstva i pomagala su nešto na čemu se ovaj rad bazira te će stoga biti i malo više riječi o tome. Za početak je važno razlikovati pojam nastavno sredstvo od nastavnog pomagala. Nastavna sredstva su sredstva i materijali koji se koriste kako bi se nastavni sadržaj približio učenicima, a nastavna pomagala jesu vrsta alata koja služe pri primjeni samih nastavnih sredstava (Hercigonja, 2017, str. 2). Drugim riječima, nastavna pomagala obuhvaćaju pribor potreban za realizaciju sata, bilo da je to pribor za pisanje, crtanje ili nešto drugo. Upotreba nastavnih sredstava uvelike pomaže učenicima da si predoče određeni sadržaj te da ga s lakoćom usvoje. „Psihološka istraživanja su pokazala da se najveći broj informacija prima

vizualnom komponentom, približno 80%, te da su za učenje u školi najvažnije dvije komponente, vizualna i auditivna“ (Markovac, 1990, str. 73). No, važno je napomenuti kako „didaktička sredstva u nastavi matematike sama po sebi ne garantiraju uspješno učenje, ali uz odgovarajuću primjenu mogu osigurati prikladno okruženje za istraživački i kreativan rad te biti korisna podloga za učenje matematike i razvijanje matematičkog mišljenja“ (Baranović i Lehman, 2019, str. 69). Postoji više vrsta nastavnih sredstava, a općenito se dijele na prirodna i umjetna. Prirodna sredstva su, kao što im i sam naziv kaže, predmeti koji se mogu pronaći u svakodnevnom životu, dok su umjetna „posebno konstruirana i proizvedena“ (Markovac, 1990, str. 74). Važno je primjereno koristiti nastavna sredstva i pomagala te poštivati dječji intelektualni razvoj. Također, važno je da se upotrebom nastavnih sredstava i pomagala, ne isključe misaoni procesi kod učenika. Tangram u nastavi Matematike također možemo koristiti kao nastavno sredstvo o čemu će riječ biti u sljedećem poglavlju.

Nastava geometrije je u nižim razredima osnovne škole manje zastupljena nego li je to slučaj s aritmetikom. O tom govori Kovačević (2016, str. 4): „Pokazalo se kako u razrednoj nastavi, od određenih 97 tema iz matematike tek 29,9% je geometrijskih, dok je 70,1% aritmetičkih“. Smanjen udio geometrijskih sadržaja nije samo slučaj u Republici Hrvatskoj, „posljednjih nekoliko desetljeća smanjivao se udio geometrije u mnogim nacionalnim kurikulumima diljem svijeta“ (Glasnović Gracin i Kuzle, u tisku, str. 1). Jedan od razloga smanjena sadržaja geometrije leži u „nastojanju da se poveća sadržaj drugih matematičkih disciplina, kao što su algebra, analize podataka i vjerojatnosti“ (Glasnović Gracin i Kuzle, u tisku, str. 1). Zbog smanjenja udjela geometrijskih sadržaja, ali i diskontinuitetu u poučavanju samih geometrijskih sadržaja te nepravilnoga usvajanja geometrijskih sadržaja, javljaju se „brojni problemi pri jačem razvijanju prostornog razmišljanja i geometrijskih sadržaja“ (Kovačević, 2016, str. 4).

Razvijanje prostornog mišljenja te ravninskog zora je cilj nastave geometrije. Učitelj treba raditi na tome da svaki učenik usvoji osnovne geometrijske pojmove te da ih zna prepoznati i primijeniti u svakodnevnom životu. Također, učenike treba poticati na geometrijsko mišljenje i rješavanje geometrijskih problema. Razine geometrijskog mišljenja sistematizirali su Nizozemci Pierre van Hiele i Dine van Hiele, stoga tu teoriju nazivamo Van Hieleova teorija geometrijskoga mišljenja.

Izgradili su teoriju o tome što se to u ljudskom mozgu događa od trenutka kada on postaje sposoban da samo prepoznaje neke geometrijske oblike, pa do trenutka kada je u stanju izvesti formalne dokaze za tvrdnje koje govore o nekim njihovim odnosima (Romano, 2009, str. 2).

U svojoj teoriji navode kako postoji pet razina geometrijskoga mišljenja. Važno je napomenuti kako dosizanje određene razine ne ovisi o dobi učenika ili pojedinca nego o njihovom geometrijskom mišljenju. Također, „na svakoj sljedećoj razini usvajaju se nova znanja, a da bi se dosegla sljedeća razina, potrebno je usvojiti prethodnu“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 4) što bi značilo da nije moguće preskakati razine. Nulta ili početna razina je vizualna razina, na „vizualnoj razini mišljenja oblici se sude prema izgledu“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 4), što je karakteristično za učenike prvog razreda koji tvrde za neki lik da je to taj lik na temelju oblika i izgleda. Sljedeća razina je opisna razina, na kojoj učenici prepoznaju likove s obzirom na svojstva koja imaju, a ne kako izgledaju. Sljedeća razina je razina neformalne dedukcije, a učenici su sposobni da iz jednog svojstva izvode drugo svojstvo. Slijedi razina dedukcije, a kod nas se općenito stječe tokom srednjoškolskog programa kada su učenici sposobni izvoditi zaključke pomoću prethodnih tvrdnji (Cindrić i Vlasnović, 2014). Posljednja i najviša razina je razina strogosti, koja se postiže na fakultetu, a studenti su sposobni „da razumiju konzistentnost, nezavisnost i kompletnost aksiomskog sistema“ (Romano, 2009, str. 3). Budući da se ovaj radi bavi nastavom Matematike u osnovnoj školi, trebalo bi napomenuti kako su Cindrić i Vlasnović u svom istraživanju 2014. godine zaključile da učenici u razrednoj nastavi napreduju upravo prema Van Hieleovim razinama.

Prema sadašnjem Kurikulumu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019) učenici se u prvom razredu osnovne škole upoznaju s tijelima u prostoru, geometrijskim likovima te točkama i ravnim i zakrivljenim crtama. Drugi razred bi trebao učenike osposobiti da opisuju strane geometrijskih tijela kao likove te ih upoznati s dužinom. U trećem razredu, učenici bi trebali svladati pravac, polupravac i dužinu i razliku između njih te bi se trebali upoznati s konstruiranjem šestarom. U četvrtome razredu je sadržaj geometrije nešto više zastupljen, a učenici bi trebali upoznati kut te različite vrste trokuta s obzirom na stranice, također, trebali bi produbiti znanje o konstruiranju i znati konstruirati geometrijske likove.

Važno je napomenuti kako su sadržaji geometrije usko povezani sa sadržajima aritmetike. „Na primjer, koncepti razlomaka povezani su s geometrijom, omjer i razmjeri direktno su povezani s geometrijskim konceptima sličnosti i, naravno, mjerenja“ (Cindrić i Vlasnović, 2014, str. 3). Iako „učenici i geometriju i aritmetiku smatraju podjednako važnim i zanimljivima“ (Glasnović Gracin, Osrečak i Rovanić, 2017, str. 10) „učitelji razredne nastave geometriju smatraju sekundarnom i manje važnom od aritmetike i algebre, vide ju kao zabavu i opuštajući dio u odnosu na 'teže' matematičke sadržaje s računanjem“ (Glasnović Gracin i Kuzle, u tisku, str. 1). Iz ovog proizlazi kako učitelji nastavu geometrije ne shvaćaju jednako

važnom kao nastavu aritmetike. Jedan od razloga može biti taj što je nastava geometrije u puno manjoj mjeri zastupljena u Nastavnom planu i programu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006) te Kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019), ali možda i zbog nedovoljne stručnosti samih učitelja, kao što je već navedeno u uvodom dijelu.

S druge strane, učenici imaju poteškoća u razumijevanju geometrijskih sadržaja te konceptata, a iz tog razloga je važan način na koji učitelj izlaže te sadržaje. „Profesor mora voditi računa o tome da upotrebljava riječi koje pripadaju jeziku koji odgovara nivou mišljenja učenika, jer ga, u suprotnom, oni neće razumjeti“ (Romano, 2009, str. 4). Učenici, kada ne razumiju određeni sadržaj, a ako se traži da nešto nauče, oni će često taj sadržaj naučiti napamet te neće razmišljati o onome što uče. Učenicima je u tom trenutku važno da nauče zadano te da znaju to reproducirati bez obzira razumiju li to ili ne. „Međutim, kao i sve što se uči memoriranjem i bez ikakvoga razmišljanja, bit će vrlo brzo zaboravljeno, a i učenici neće biti u stanju da primjenjuju naučeno“ (Romano, 2009, str. 4). Rješenje za ovaj problem donose Cindrić i Vlasnović (2014, str. 2): „U dobro organiziranim aktivnostima, s odgovarajućim alatom i uz učiteljevu podršku učenici mogu donositi i istraživati pretpostavke o geometriji i mogu razvijati geometrijske koncepte od najranijih godina školovanja“. Važno je učenicima dati dobar materijal te ih voditi kroz cijeli proces kako bi njima bilo lakše usvojiti njima apstraktan sadržaj, kao što je to sadržaj geometrije. Tangram može poslužiti kao dobar materijal za približavanje geometrije učenicima.

4.2. Tangram u nastavi geometrije

Slagalice tangram je idealan način da učenici samostalno istražuju sadržaje geometrije, što je važno jer „učenički rad na geometrijskim sadržajima, posebice ako im se pristupa problemski i istraživački, može učenicima pomoći u razvijanju logičkog zaključivanja i rješavanju nekih algebarskih i aritmetičkih problema“ (Cindrić i Vlasnović, 2014, str. 3).

Treba imati na umu kako se „frontalni oblik rada koristi kada se svim učenicima daju iste informacije, primjerice pri obrađivanju sadržaja“ (Markovac, 1990, str. 76). Tako se onda i obrađuje sadržaj iz geometrije. Ovakav rad učenike često stavlja u pasivan položaj i ne potiče njihovu znatiželju. Slagalice tangram može se učenicima predstaviti kao nov i zanimljiv način istraživanja i rješavanja geometrijskih problema. Kao što kažu Baranović i Lehman (2016, str. 1): „učenje pomoću tangrama potiče aktivno sudjelovanje učenika, njihovu motivaciju i interes, kreativnost i maštu, kroz tangram aktivnosti učenici obogaćuju matematički rječnik, razvijaju strategiju rješavanja problema, vizualno-prostorne vještine“. Kada učenici uče istraživanjem ili

rješavanjem problema, kada učenici samostalno dolaze do zaključaka i formuliranja tvrdi, tada uče s većim razumijevanjem i na taj način učenici imaju mogućnost trajnijeg znanja. Nije dovoljno da učitelji samo izlože sadržaj, potrebno je da učenici taj sadržaj vide, ali i iskustveno osjete kroz aktivnosti. Potrebno je sadržaj učenicima približiti što je više moguće. Slagalica tangram može uvelike pomoći pri približavanju sadržaja geometrije učenicima, ali je potrebno da učitelji budu otvoreni za nove aktivnosti i sadržaje te da, najprije, sami steknu iskustva s njome kako bi mogli osmisliti na koji način geometrijski sadržaj, pomoću slagalice, približiti učenicima te kako bi osmislili kvalitetne aktivnosti za same učenike.

Kako bi se slagalica tangram koristila u nastavi potrebno je prvo educirati učitelje. Učitelji bi trebali osvijestiti kako se geometrija dijelom može poučavati i na druge načine, a neki njeni sadržaji čak i pomoću ove slagalice. Siew i Abdullah (prema Baranović i Lehman, 2016) su s učiteljima proveli radionicu vezanu uz tangram te su zaključili kako su nastavnici koji su sudjelovali u tangram aktivnostima „osvijestili da oni sami imaju nedovoljno razvijeno geometrijsko mišljenje i vizualno-prostorne sposobnosti. Nakon provedenih istraživačkih aktivnosti (...), nastavnici su istaknuli kako pozitivnije gledaju na geometriju, više je cijene i osjećaju veće samopouzdanje u rješavanju geometrijskih problema“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 3). Ako je ovakav slučaj bio s nastavnicima, s učenicima bi ishod mogao biti još zanimljiviji. Učenici su djeca, a djeca se od malih nogu igraju. Slagalica je svojevrsna igra, igra koja može pomoći učenicima u svladavanju nastavnoga sadržaja. Prema Khairiree (2015, str. 1): „tangram je jedna od značajnih nastavnih metoda pomoću koje učenici poboljšavaju svoje geometrijsko i prostorno mišljenje“. Ova slagalica se može koristiti tijekom cijelog školovanja, ali će naglasak ovog rada biti na aktivnostima vezanim uz sadržaje nižih razreda osnovne škole.

Iako se u Nastavnom planu i programu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006, str. 238) navodi: „Osuвременjivanje plana i programa ima cilj naći kompromis između tradicionalnog i novih stajališta u nastavi matematike“, nigdje se ne spominje igra ili neka igrolika aktivnost kao ishodište za poučavanje sadržaja iz nastave Matematike. S druge strane, u Kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019) vrlo često se spominje pojam igre, ali se i nekoliko puta predlaže korištenje tangrama u nastavi. Navode kako je u prvom razredu „s učenicima potrebno provoditi niz aktivnosti koje uključuju slaganja i razlaganja modela geometrijskih oblika te slaganja različitih slagalica geometrijskim oblicima, poput tangrama“ (Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019). Ministarstvo predlaže da se u prvome

razredu osnovne škole uvede tangram te da se pomoću njega učenicima približi sadržaj vezan uz geometrijska tijela i geometrijske likove. U prvome, ali i u drugome razredu osnovne škole, predlaže se da učenici pomoću slagalice tangrama slažu likove po predlošku, a potom da i samostalno slažu smislene likove. Tangram se, nadalje, predlaže i kod usvajanja sadržaja opsega u petom razredu osnovne škole, gdje se predlaže da učenici slažu tangram likove, mjere potrebne dimenzije te računaju opseg likova.

4.3. Aktivnosti s tangramom

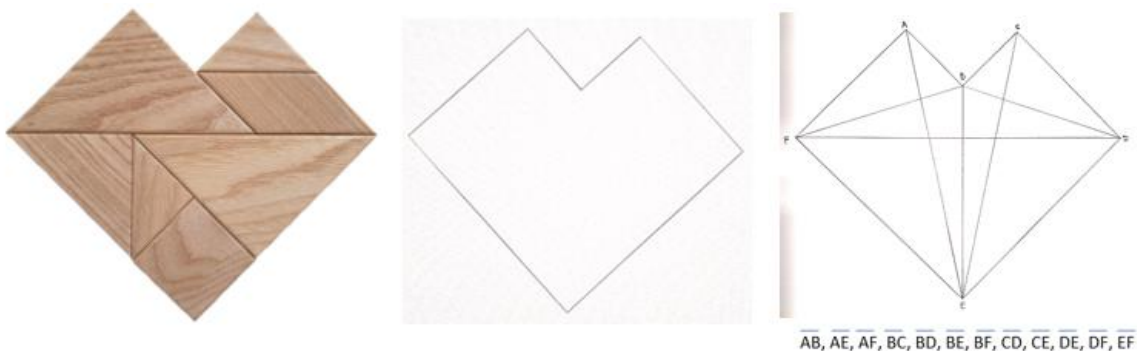
„Tangram aktivnosti mogu biti usmjerene na razvoj različitih vještina, za uvođenje određenih pojmova ili provjeru znanja o njima, zatim za istraživanje, otkrivanje i postavljanje matematičkih zakonitosti, a time i na razvoj matematičkog rječnika i procesa mišljenja“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 17). Uzeći sve navedeno u obzir, slagalica tangram može uvelike pomoći učenicima u svladavanju sadržaja geometrije. Važno je samo da učitelji dobro osmisle i provedu aktivnosti s tangram slagalicom.

U prvome razredu, po Nastavnom planu i programu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006), ali i po Kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019), učenici iz područja geometrije trebaju svladati geometrijska tijela: kugla, valjak, kocka, kvadar, piramida, stožac te likove: trokut, kvadrat, pravokutnik i krug, ravne i zakrivljene crte te točke. Slagalica tangram može pomoći pri prepoznavanju geometrijskih likova. Kako učenici tada još nisu upoznati s tangramom, prvo im se tangram treba predstaviti. Učenici mogu napraviti svoju tangram slagalicu tako da likove izrežu iz papira. Kako se radi o sedmogodišnjacima koji se prvi puta susreću s tangramom, treba im omogućiti da prvo proizvoljnu slažu likove te da se na ova način upoznaju sa slagalicom.

Nakon što su se učenici upoznali s tangramom, mogu promatrati predstavljaju li tanovi izrezani od papira geometrijska tijela ili geometrijske likove, a potom mogu i argumentirati svoje mišljenje. Učenicima se može dati zadatak da proizvoljno slože tangram figuru ili da tangram figuru slože prema predlošku. Nakon što su složili svoje figure, može im se dati zadatak da svoju figuru ocrtaju u bilježnicu ili na papir. Kada su ocrnali, uklone tanove te u nacrtanom liku traže geometrijske likove koje su učili (kvadrat, pravokutnik, trokut). Na ovaj način učenici će usvojiti geometrijske likove.

U drugom razredu, učenici bi prema važećem kurikulumu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019) trebali produbiti svoje znanje o geometrijskim likovima i tijelima, a

naglasak je da ih međusobno povežu, odnosno da spoznaju kako je strana geometrijskog tijela ustvari geometrijski lik. Učenicima bi se u ovom slučaju kao zadatak mogao dati da zatvorenim očima odaberu jedan tan. Nakon što su odabrali tan i dobro ga opipali, moraju ga opisati te reći što misle koji je lik u pitanju. Nakon što su otkrili o kojem je liku riječ, moraju zaključiti u kojem geometrijskom tijelu mogu pronaći taj lik. Učitelj bi trebao imati na umu da je među tanovima i geometrijski lik paralelogram koji se uči tek u 5. razredu. Učenicima se informativno može reći kako se zove taj lik i tko želi može mu upamtiti ime, a tko ne želi može odabrati neki drugi tan. Učenici također mogu otkrivati koji lik mogu složiti s dva tan trokuta. Neke od navedenih aktivnosti se mogu provesti i u prvom razredu kod prepoznavanja geometrijskih likova. Kako u drugom razredu trebaju usvojiti dužinu, učenici mogu složiti tangram figuru te ju ocrtati u svoje bilježnice. Nakon ocrtavanja, učenici imenuju sve vrhove te u svojem liku traže sve moguće načine spajanja vrhova dužinama, odnosno traže dužine i imenuju ih (vidjeti sliku 13).



Slika 13. Primjer zadatka vezanog uz traženje dužina u tangram figuri

Jedan od ishoda vezan uz geometriju u trećem razredu je pretvaranje mjernih jedinica za duljinu: kilometar, metar, decimetar, centimetar i milimetar. Učenici mogu mjeriti tanove i pretvarati mjerne jedinice, mogu složiti neku figuru, mjeriti njene stranice i pretvarati mjerne jedinice. Učenici bi u trećem razredu trebali svladati pojmove pravac, polupravac i dužina te uočiti njihove odnose. Kao zadatak im se može dati da slože tangram figuru i ocrtaju ju na papir. Nakon što su ocrnali, na svojem liku označavaju i imenuju vrhove, a potom mogu imenovati i dužine. Nakon toga mogu jednostavno produljiti crtu van vrhova i tako prikazati pravce i promatrati kako se sijeku s drugim pravcima. Također mogu tražiti i uočavati paralelne i okomite dijelove pravaca.

Budući da u četvrtome razredu ima najviše ishoda vezanih uz geometriju, a i učenici su stariji i kognitivno zreliji te su upoznati s tangramom, ima i najviše mogućnosti korištenja tangram slagalice. Učenici mogu promatrati kutove tanova, ali i kutove figura koje su složili te određivati kojoj vrsti kuta pripadaju promatrani kutovi (pravi, šiljasti ili tupi kut). Kutove mogu i međusobno uspoređivati te istraživati kojih vrsta kutova ima najviše u njihovoj tangram figuri. Budući da učenici trebaju usvojiti trokute s obzirom na stranice, mogu promatrati tan trokute i zaključiti o kojoj vrsti trokuta se radi (raznostraničan, jednakostraničan ili jednakokračan). Učenici, također, uče i o pravokutnim trokutima pa mogu i to promatrati u tan trokutima. Nešto zahtjevniji zadaci za učenike četvrtih razreda jesu zadaci vezani uz površinu i opseg, o čemu će više riječi biti u sljedećem poglavlju koje daje prijedlog radionice za učenike četvrtih razreda osnovne škole te opisuje provedbu radionice sa studentima četvrte godine Učiteljskog fakulteta u Zagrebu.

5. Provedba aktivnosti s tangramom na radionici

Kao što je u uvodu navedeno, planirana je provedba aktivnosti s tangram slagalicom na radionici s učenicima četvrtih razreda osnovne škole. U ovom poglavlju je detaljno objašnjena priprema same radionice, ali i prilagođavanje aktivnosti i provedba istih sa studentima četvrte godine Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Naime, zbog izvanredne situacije, uzrokovane Covid-19, nije bila moguća provedba radionice s učenicima četvrtih razreda osnovne škole pa su aktivnosti provedene sa studentima. Sa studentima se, također, provela i kratka anketa vezana uz tangram slagalicu i njeno korištenje u razrednoj nastavi.

5.1. Priprema radionice

Kako bi učitelj ili voditelj radionice, pripremio kvalitetne i korisne aktivnosti s tangram slagalicom, potrebno je da se prvo prouči dostupna literatura vezana uz slagalicu tangram. Osim proučavanja literature vezane uz slagalicu, potrebno se i dobro upoznati sa slagalicom, odnosno slagati razne tangram figure u što većoj mjeri kako bi se ustanovilo na koji se način slažu tangram figure te kako bi se osvijestila svojstva tanova. Nadalje, kako bi se dobile ideje za korištenje slagalice u nastavi, učitelj može proučiti Nastavni plan i program (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006), u njemu pronaći geometrijske teme te proučiti Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019), u njemu pronaći ishode vezane uz geometrije, a potom i osmisliti način na koji će slagalicu tangram uklopiti u nastavni sadržaj. Ideja ima puno, a učitelj treba biti otvoren za njih te treba biti upoznat sa samom slagalicom kako bi osmislio kvalitetne aktivnosti, odnosno zadatke.

Cilj radionice koja bi se provela s učenicima četvrtih razreda osnovne škole je ponavljanje površine i opsega likova uz pomoć tangram slagalice. Kako se učenici prvi puta susreću s navedenom slagalicom, potrebno je, za početak, učenike upoznati sa slagalicom. Radionica bi započela kratkom prezentacijom vezanom uz tangram slagalicu kako bi učenici imali mogućnost čuti o osobitostima i prošlosti slagalice. Bilo bi im prikazano odakle potječe slagalica, od kojih se dijelova sastoji te koja su pravila slaganja. Također, prikazao bi im se i kratki isječak prošlosti tangrama, odnosno ukratko bi se ispričalo kako je rastao interes za tangramom u svijetu te bi se spomenula najpoznatija legenda koja govori o slugi „zaslužnom“ za nastanak tangram slagalice. Nakon kratkog uvoda krenule bi aktivnosti s tangram slagalicom.

Budući da su se aktivnosti provele online sa studentima četvrte godine Učiteljskog fakulteta, snimljena je video prezentacija koja je postavljena na YouTube kanal. U uvodom

dijelu, osim prethodno navedenog, studentima su prikazani razlozi zašto bi slagalicu tangram trebalo uvesti u školski program te je dan prijedlog aktivnosti s tangramom slagalicom za razrednu nastavu, a koje su navedene u prethodnom poglavlju. Provedba aktivnosti s tangramom za razrednu nastavu i studente se ne razlikuje mnogo pa će se prvo opisati prijedlog provedbe aktivnosti za učenike četvrtih razreda osnovne škole, a potom će se napomenuti što se sa studentima radilo drugačije te će se navesti razlog prilagodbe studentima.

5.2. *Tijek aktivnosti s tangramom na radionici*

Za početak, potrebno je da svaki učenik ima svoju tangram slagalicu, a postoji mogućnost da ju i sami naprave. Može im se isprintati predložak (prilog 1), a učenici sami izrežu tanove ili mogu samostalno, ravnalom i olovkom, nacrtati kvadrat i u njemu tanove te ih potom izrezati. Nakon što su učenici izrezali tanove, potrebno je da se upoznaju sa slagalicom pa im se kao zadatak može dati da slože neku tangram figuru po svojim zamislima. Pritom im je važno napomenuti pravila slaganja. Kada učenici slože željene figure, mogu svojem paru opisivati proces slaganja tako da ih učenik iz para prati i po navođenju slaže figuru. Što se tiče studenata, oni nisu svojem paru opisivali proces slaganja jer su se aktivnosti provodile online. Nadalje, kada su se učenici, a i studenti upoznali sa slagalicom, kao najjednostavniji zadatak slaganja, može im se dati da slože kvadrat. Učenicima se može dati okvir unutar kojeg trebaju složiti zadani oblik te ukoliko im slaganje ne ide, pružiti individualnu pomoć.

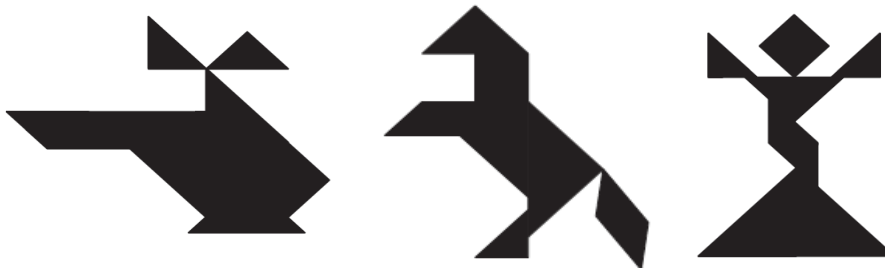
Prije nego li se krene na zadatke vezane uz površinu i opseg likova, potrebno je da se učenici malo bolje upoznaju sa slagalicom. Kako bi se to ostvarilo, potrebno im je dati priliku da slože nekoliko tangram figura prema predlošku. Prva figura, koja bi im se dala da slože, može biti neka jednostavna figura s prikazanim postavljenim tanovima unutar figure kako bi učenici shvatili na koji način se figure slažu, odnosno kako se tanovi mogu preokrenuti i na drugu stranu prilikom slaganja. Nakon što su učenici složili tangram figuru prema predlošku s rješenjem, daju im se još dva predloška no ovaj put bez rješenja, odnosno bez vidljivih tanova (slika 14).



Slika 14. Prikaz tangram figura za radionicu s tangramom (preuzeto s:

<https://www.artrea.com.hr/>)

Ukoliko je potrebno, učenicima se treba pružiti individualna pomoć, a učitelj može postaviti i jedan tan kako bi pomogao učenicima. Iste aktivnosti su se provele i sa studentima. Nakon što su učenici uspješno riješili ove zadatke, pokazuju im se rješenja te se vodi razgovor o tome kako su došli do složene figure. Kako su se učenici upoznali sa slagalicom, može se krenuti na zadatke vezane uz površinu i opseg likova. Zadaci se mogu provesti pomoću predložene 3 različite tangram figure (slika 15) ili prema odabiru učitelja.



Slika 15. Prijedlog figura za provedbu zadataka vezanih uz površinu i opseg likova (preuzeto s: <https://www.artrea.com.hr/>)

Prije nego li prijeđe na razgovor o površini i opsezima likova, učenicima se treba dati vremena da pokušaju složiti dane tangram figure. Njih je teže složiti od onih figura iz prethodne aktivnosti jer ovdje nisu prikazane linije koje dijele pojedine tanove. Nakon što su ih složili prelazi se na razgovor vezan uz površinu i opseg likova.

S učenicima je potrebno ponoviti površinu kvadrata i pravokutnika, a razgovorom i primjerom doći i do načina, odnosno formule za mjerenje površine pravokutnog trokuta. Također, potrebno je ponoviti i opseg likova. Nakon što se ponovio potreban sadržaj za daljnje aktivnosti, učenici kreću sa slaganjem figure po figure te mjerenjem površine i opsega likova. Učenicima se prije mjerenja može postaviti problemsko pitanje: „Kako ćete izmjeriti površine i opsege likova?“ te se može razgovarati o danim prijedlozima.

Učenici mogu na dva načina izmjeriti površinu danih figura. Figure mogu ocrtati u kvadratnu mrežu, a površinu mogu izmjeriti prebrojavanjem kvadratića koje zauzima lik. Drugi način je da u ocrtanom liku traže kvadrate, pravokutnike, pravokutne trokute te računaju njihove površine i na kraju ih zbroje. Što se tiče opsega figura, jednostavno izmjere sve stranice figure te ih zbroje. Što se tiče provedbe aktivnosti sa studentima, oni su površinu mjerili samo na drugi način - računanjem, odnosno nisu figuru ocrtavali na kvadratni papir i prebrojavali kvadratiće. Također, uz postavljeno problemsko pitanje, kao zadatak su imali razmisliti o usporedbi površine i opsega različitih tangram figura. Nakon mjerenja, s učenicima se treba provesti

razgovor, odnosno potrebno je da učenici dođu do zaključka vezanog uz površinu i opsege likova. Zaključak je potrebno i obrazložiti, a ista aktivnost se provela i sa studentima.

Tijek aktivnosti a tangramom za učenike četvrtog razreda je vidljiv u tablici 1, a važno je imati na umu kako učitelj u svakom koraku pruža individualnu pomoć ukoliko je ona potrebna.

Tablica 1. Prikaz tijeka aktivnosti s tangramom za učenike četvrtih razreda osnovne škole

KORACI	TIJEK AKTIVNOSTI S UČENICIMA
1. izrada tanova	Učenici izrezuju tanove iz predloška ili samostalno, ravnalom i olovkom, crtaju kvadrat i u njemu tanove te ih potom izrezuju.
2. upoznavanje s tangramom	Učitelj objašnjava pravila slaganja tangram slagalice učenicima, a učenici slažu tangram figure po svojim zamislima. Nakon slaganja, svojem paru opisuju proces slaganja tako da ih učenik iz para prati i po navođenju slaže figuru.
3. slaganje kvadrata	Učenici slažu kvadrat.
4. slaganje tangram figura prema predlošku	Učenici slažu 3 tangram figure prema predlošcima. Preporuka je da prvi predložak bude jednostavnija figura s prikazanim postavljenim tanovima unutar figure kako bi učenici osvijestili na koje sve načine mogu tanove preokretati.
5. razgovor o slaganju	Učitelj s učenicima vodi razgovor o slaganju danih tangram figura, a učenici mogu opisati proces slaganja.
6. slaganje tangram figura koje će se koristiti za zadatke s površinom i opsegom	Učenici slažu 3 tangram figure, na kojima će kasnije mjeriti površine i opsege.
7. razgovor o površini i opsegu	Učitelj s učenicima ponavlja površinu kvadrata i pravokutnika, a razgovorom i primjerom na ploči, dolazi do formule za mjerenje površine pravokutnog trokuta.
8. slaganje tangram figura i mjerenje površine i opsega	Učenici slažu figuru po figuru te svakoj mjere površinu i opseg. Površinu mogu izmjeriti na dva načina: 1. figure mogu ocrtati u kvadratnu mrežu, a površinu mogu izmjeriti prebrojavanjem kvadratića koje zauzima lik; 2. u ocrtanom liku traže kvadrate, pravokutnike, pravokutne trokute te računaju njihove površine i na kraju ih zbroje. Što se opsega tiče, učenici izmjere sve stranice figure te ih zbroje.
9. razgovor i zaključak	Učitelj s učenicima vodi razgovor o prethodnom koraku te im pomaže da dođu do zaključka vezanog uz površinu i opseg tangram figura.

Studenti su nakon povedenih aktivnosti s tangramom ispunili kratku anketu vezanu uz tangram slagalicu i njenu primjenu u razrednoj nastavi (prilog 2), a rezultati su vidljivi u sljedećem potpoglavlju.

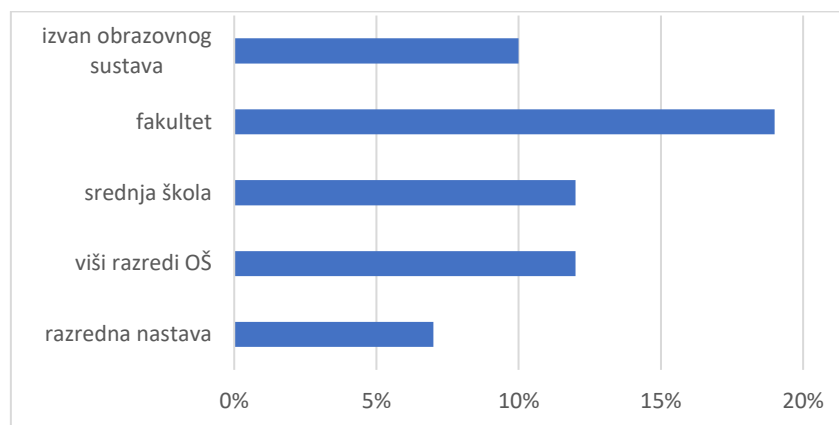
5.3 Mišljenje ispitanih studenata o upotrebi tangrama u nastavi

Kao što je već u prošlom potpoglavlju spomenuto, po završetku kratke video prezentacije i aktivnosti s tangramom, studenti su ispunili kratku anketu u kojoj su iskazali svoje stavove i mišljenja vezane uz tangram slagalicu i njenu upotrebu u nastavi. U anketi je

sudjelovalo 110 studenata, od toga njih 59 iz Središnjice u Zagrebu, 50 iz Odsjeka u Čakovcu te 1 student iz Odsjeka u Petrinji.

Anketa se sastojala od jedanaest pitanja, od kojih su prava dva pitanja vezana uz spol i mjesto studiranja. Ostalih devet pitanja su vezani uz tangram slagalicu. Uvodna pitanja ispituju jesu li se ispitani studenti susreli s tangramom prije provedenih aktivnosti te jesu li ikada slagali tangram. Ukoliko su studenti potvrdno odgovorili na prethodna pitanja, od njih se tražilo da navedu vrijeme i mjesto kada su se susreli s tangramom te kada i gdje su ga slagali. Slijede pitanja vezana uz stav ispitanika o tangramu, gdje se ispituje jesu li im aktivnosti bile zanimljive i lagane, a potom se od njih traži da razmisle smatraju li tangram korisnim za razvoj dječjeg mišljenja te bi li ga upotrebljavali, kao budući učitelji u nastavi. Za kraj se od njih traži, ukoliko bi upotrebljavali tangram u nastavi, da navedu za koje područje i sadržaje bi ga upotrijebili. Cijelu anketu je moguće vidjeti u prilogu 2.

Iz rezultata ankete je vidljivo kako je čak 61% ispitanih studenata čulo za slagalicu tangram prije provedbe ovih aktivnosti. Na slici 16 se može vidjeti gdje su se to studenti prvi puta upoznali sa slagalicom.



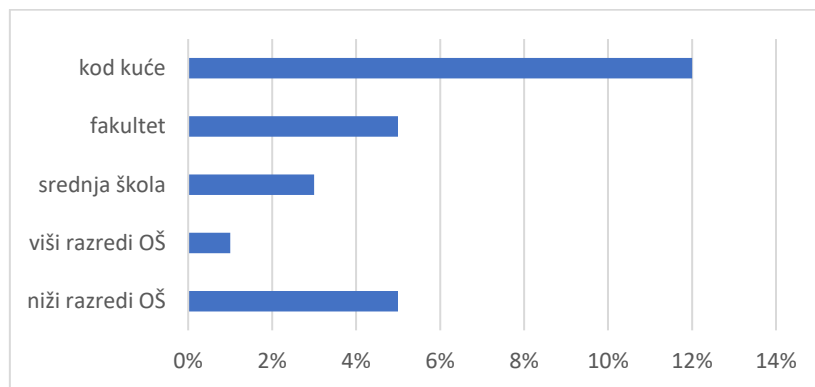
Slika 16. Odgovor na pitanje iz ankete: „Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, gdje ste čuli za tangram slagalicu?“

Kao što se može vidjeti, većina ispitanih studenata, točnije njih 19%, se prvi puta s tangram slagalicom susrelo na fakultetu. Što se tiče susreta s tangram slagalicom u razrednoj nastavi, samo 7% studenata navodi kako su se u nižim razredima osnovne škole imali priliku susreti s ovom slagalicom. Nešto bolja situacija je s višim razredima osnovne škole te sa srednjom školom, gdje po 12% studenata navodi kako se na ovaj način prvi puta susrelo s tangram slagalicom. Njih 11% se susrelo s tangramom izvan obrazovnog sustava, putem

interneta ili društvenih igara, od ukućana ili prijatelja, prilikom stručno pedagoške praske ili Montessori edukacije.

Nadalje se tražilo koliko je ispitanih studenata slagalo slagalicu tangram prije provedenih aktivnosti te se došlo do rezultata kako je samo 25% ispitanih studenata imalo priliku slagati tangram i na taj se način s njime upoznati.

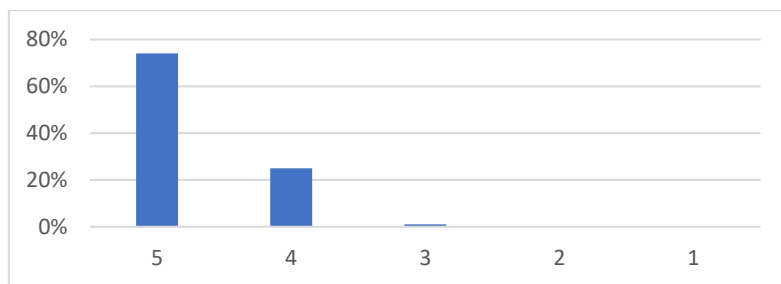
Od onih studenata, koji su imali priliku slagati tangram prije aktivnosti, tražilo se da navedu kada i gdje su slagali tangram, a rezultati su vidljivi na slici 17.



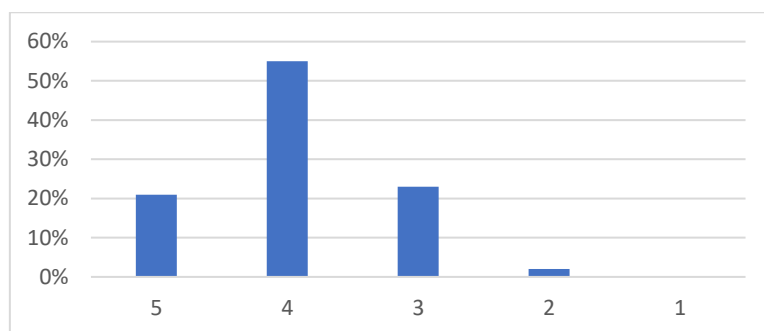
Slika 17. Odgovor na pitanje iz ankete: „Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, kada ste i GDJE slagali tangram?“

Vidljivo je kako je većina studenata slagala tangram kod kuće, čak njih 12%, dok u osnovnoj školi, samo njih 6%, od čega 5% u nižim razredima osnovne škole. Studenti koji su tangram slagalicu slagali kod kuće, navode kako su slagali tangram putem igre na mobilnom uređaju ili putem računala, kako su imali društvene igre koje su sadržavale tangram ili je netko od njihovih ukućana posjedovao slagalicu.

Što se tiče same provedbe aktivnosti s tangram slagalicom u ovome istraživanju, tražilo se kolikom su se postotku ispitanih studenta aktivnosti svidjele te jesu li im aktivnosti bile lagane, a rezultati su vidljivi na slikama 18 i 19. Studenti su na ova pitanja odgovarali pomoću linearne skale, gdje 5 označava stav ispitanika: „u potpunosti se slažem“, a 1 označava: „u potpunosti se ne slažem“.



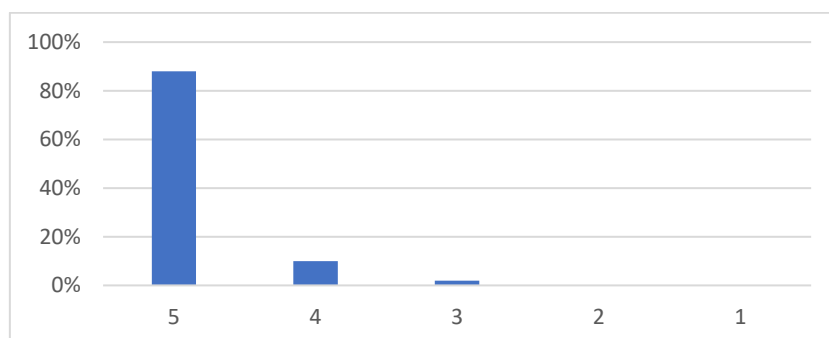
Slika 18. Odgovor na pitanje iz ankete: „Svidjele su mi se aktivnosti s tangramom u prezentaciji.“



Slika 19. Odgovor na pitanje iz ankete: „Aktivnosti s tangramom su mi bile lagane.“

Kao što je vidljivo iz slike 18, aktivnosti s tangramom su se svidjele 99% studenata, a na slici 19 je vidljivo kako 76% studenata navodi da su im aktivnosti bile lagane.

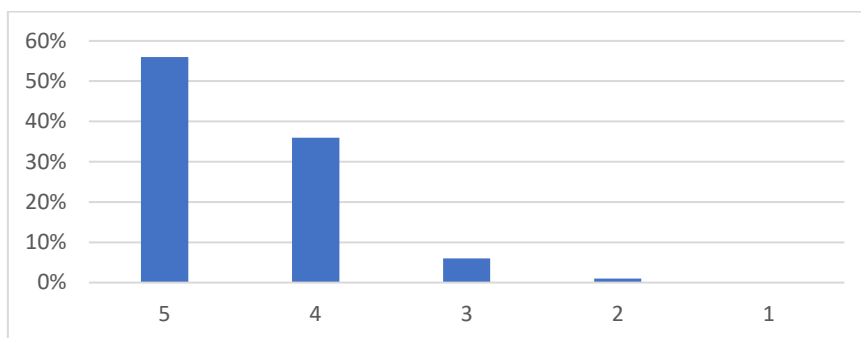
Ono na što se je najviše željelo utjecati je mišljenje studenata o prednostima upotrebe tangram slagalice u razrednoj nastavi, što se je i uspjelo, a vidljivo je na slici 20.



Slika 20. Odgovor na pitanje iz ankete: „Smatram da je tangram koristan za razvoj dječjeg mišljenja.“

Kao što se iz ove slike može iščitati 98% ispitanih studenata smatra kako je slagalica tangram korisna za razvoj dječjeg mišljenja.

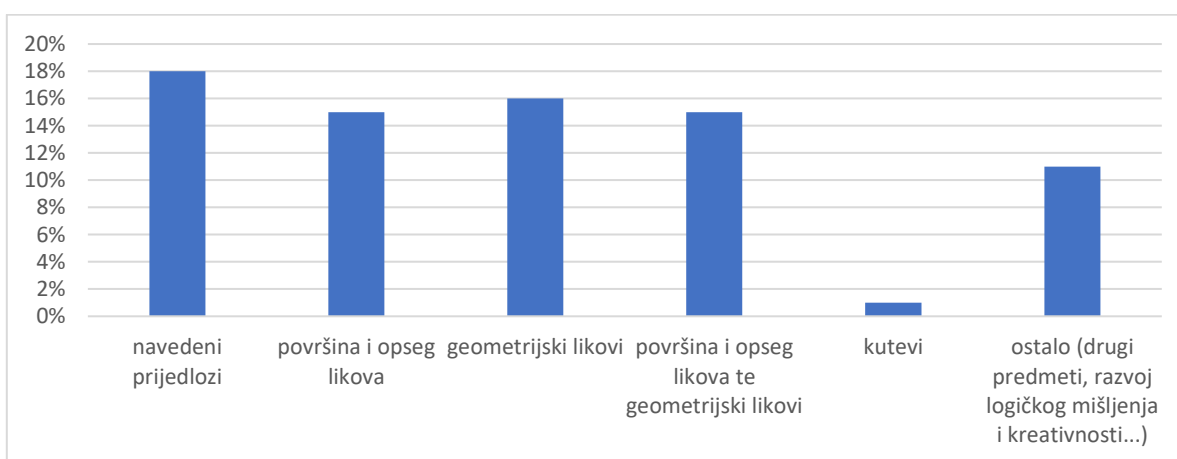
Kao što je navedeno u prethodnim potpoglavljima, osim što je studentima prezentirana kratka povijest tangrama, navedeni su razlozi upotrebe slagalice tangram u nastavi te su dani prijedlozi aktivnosti s tangram slagalicom tokom razredne nastave. Nadalje se tražilo koliki postotak ispitanih studenata, kao budući učitelji, bi koristilo tangram u razrednoj nastavi, a rezultati su vidljivi na slici 21.



Slika 21. Odgovor na pitanje iz ankete: „Kao budući učitelj koristit ću slagalicu tangram u nastavi Matematike.“

92% navodi kako će slagalicu tangram, kao budući učitelji, upotrebljavati u razrednoj nastavi.

Studente, koji su naveli da kao budući učitelji planiraju koristiti tangram u razrednoj nastavi, upitano je za koje nastavne sadržaje, odnosno ishode, bi koristi slagalicu tangram u razrednoj nastavi, a njihovi odgovori su vidljivi na slici 22. Kako je ovo bilo pitanje otvorenog tipa, odgovori su kategorizirani.



Slika 22. Odgovor na pitanje iz ankete: „Ukoliko biste tangram koristili na nastavi, za što biste, konkretno, iskoristili ovu slagalicu?“

Kao što je vidljivo iz slike 22, najviše studenta kao budući učitelji, točnije njih 18%, bi upotrijebili predložene aktivnosti s tangramom. Njih 15% bi slagalicu upotrijebilo samo u četvrtom razredu kod usvajanja nastavnoga sadržaja vezanog u površinu i opseg likova, a njih 16% bi slagalicu upotrijebilo samo kod usvajanja geometrijskih likova u prvom razredu. 15% studenta smatra kao bi slagalicu upotrijebili za usvajanje sadržaja opsega i površine likova te geometrijskih likova. 11% ispitanih studenata nije navelo nastavni sadržaj u koji bi implementirali tangram nego kako bi koristili za razvoj dječjeg mišljenja i kreativnosti ili u nekim drugim nastavnim predmetima. Tako je netko naveo da je tangram dobar „prvenstveno za razvoj geometrijskog mišljenja i razvoj specijalnog faktora“. Jedna studentica je navela kako bi tangram koristila „za razvoj razmišljanja kod učenika te kao orijentir sebi kao učiteljici koliko su učenici snalažljivi pred odgovarajućim "problemom" te kako ga rješavaju.“ Što se tiče implementacije tangrama u ostale nastavne predmete, jedna studentica daje prijedlog upotrebe tangrama „u likovnoj kulturi kod crtanja nekih geometrijskih likova, moguće je napraviti i oblike slova za hrvatski jezik, oblike brojeva za matematiku, oblike životinja, prometnih znakova za prirodu i društvo, oblike nota za glazbenu kulturu...“ Čitajući dane odgovore i prijedloge može se zaključiti kako su studenti zadovoljni tangramom te kako će ga sigurno na neki način implementirati u nastavu.

5.4. Zaključci o provedbi aktivnosti s tangramom

Iz prethodnog potpoglavlja te analize prikupljenih podataka, vidljivo je kako su studenti zadovoljni s aktivnosti s tangram slagalicom te kako bi neke aktivnosti, kao budući učitelji, proveli u razrednoj nastavi. Uvidom u rezultate ankete, došla sam do zaključka kako je studentima, koji su sudjelovali u aktivnosti s tangramom, potaknut interes za slagalicom. Čitajući odgovore na otvorena pitanja, zaključila sam da im se slagalica svidjela te sam dobila dojam da će ju i koristiti u svojem budućem zanimanju. Od puno pozitivnih povratnih komentara, istaknula bih sljedeći: „...neovisno je li sat matematike ili nekog drugog predmeta, smatram da se takve igre koje pozitivno utječu na razvoj dječjeg mišljenja, ali i kreativnosti trebaju što više koristiti u nastavi. Ovo mi je odlična ideja!“ Naime, ovaj odgovor na posljednje pitanje u anketi, mi je odlična povratna informacija o mišljenju studenata o tangram slagalici, ali i o mojem trudu uloženog u pripremanje video prezentacije i aktivnosti s tangramom.

Budući da su povratne informacije bile pozitivne, ne bih mijenjala aktivnosti s tangram slagalicom za studente. Naime, žao mi je što nisam bila u mogućnosti prezentaciju i aktivnosti provesti uživo, kako bi povratne informacije bile pouzdanije.

Što se tiče radionice s učenicima, prijedlog aktivnosti ne bih uvelike mijenjala. Možda bih samo dodala još pokoji zadatak proizvoljnog slaganja i istraživanja tangram slagalice prilikom upoznavanja sa slagalicom.

Također, učiteljima razredne nastave, ali i predmetne nastave bih preporučila da u svoje nastavne sate uvedu tangram kako bi potaknuli interes kod učenika i radili na njihovom razvijanju logičkog mišljenja. Slagalice tangram je takva da se može uklopiti u nastavni sadržaj ukoliko se učitelj malo potruži, a učenici će sigurno biti zahvalni na novim načinima usvajanja, ali i ponavljanja nastavnog sadržaja. Kako su studenti četvrte godine Učiteljskog fakulteta bili zadovoljni ovim aktivnostima, smatram da bi se svidjele i djeci pošto je njima igra još bliža i interesantnija.

6. Zaključak

Slagalice tangram, kao što je već nekoliko puta navedeno, može se iskoristiti kod usvajanja nastavnog sadržaja iz geometrije, a razlog implementacije ove slagalice leži u tome što tangram može uvelike pomoći pri razvoju geometrijskoga mišljenja, zaključivanju i snalaženju u prostoru, razvijanju strategija rješavanja problema, ali i razvoju vizualno-prostorne vještine. Također, može pomoći pri približavanju geometrije učenicima, samoj motivaciji učenika, ali i njihovom aktivnom sudjelovanju. Tangram je slagalica, a time se svrstava u igre, a igra je bliska učenicima. Potrebno je uzeti u obzir da je „igra prirodni oblik učenja i razvoja djeteta“ te da „pojedinač kroz igru razvija sve svoje razvojne aspekte: a) kognitivni, b) razvoj govora, c) socijalnoemocionalni, d) psihomotorni“ (Galić, Nikčević-Milković, Rukavina, 2011, str. 1 i 2). Slagalica ima pozitivan učinak za razvoj logičkog mišljenja, a implementacijom ove slagalice u nastavu, učitelj potiče učenika na aktivno sudjelovanje u nastavi. Učenicima se daje nov i zanimljiv način usvajanja, ali i ponavljanja nastavnog sadržaja.

Kako se najviše informacije prima vizualnim putem (Markovac, 1990), slagalica tangram je idealno nastavno sredstvo koje učitelji mogu koristiti u poučavanju matematičkog sadržaja. Korištenjem tangrama u nastavi geometrije, učenike potičimo na samostalno istraživanje i zaključivanje, a što dovodi do boljeg razumijevanja nastavnog sadržaja geometrije, a time i trajnosti znanja.

Tangram slagalica se na brojne načine može implementirati u nastavi geometrije, a prijedlog aktivnosti je dan i u ovom radu u prethodnim poglavljima. Pregledom rada se može zaključiti kako su studenti četvrte godine Učiteljskog fakultet u Zagrebu, bili zadovoljni provedbom aktivnosti s tangramom te kako bi većina njih koristila tangram slagalicu u razrednoj nastavi, kao budući učitelji. Ako je ovakav slučaj bio sa studenima, može se zaključiti da bi učenicima u razrednoj nastavi, ove aktivnosti bile još zanimljivije i privlačnije jer je ipak riječ o igri.

Naime, ovu slagalicu je potrebno ponajprije prezentirati učiteljima, ali i studentima kako bi im se proširio obzor na neke nove i zanimljive načine poučavanja matematičkog sadržaja, ali i kako bih se dodatno educiralo. Važno je nastavu općenito, a pogotovo nastavu matematike, obogatiti igrom kako bi se sadržaji približili učenicima. Slagalica tangram, osim što je vrsta igre, pomaže razvijanju logičkog mišljenja te vizualno-prostorne vještine. Prednosti su mnogobrojne, a načina implementacije je još mnogo više.

Literatura

1. Baranović, N. i Kavajin, A. (2019). Tangram u nastavi matematike, 1. dio. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 101, 18-26. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/28/broj/101/clanak/1397/tangram-u-nastavi-matematike,-1.-dio> (18.10.2019.)
2. Baranović, N. i Lehman, S. (2016). Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. *Simpozijum Matematika i primene*, 7(1), 81-92. Preuzeto s https://www.academia.edu/35569717/Razvoj_geometrijskog_mi%C5%A1ljenja_kroz_tangram_aktivnosti (05.10.2019.)
3. Baranović, N. i Lehman, S. (2018). Matematika u tangramu, tangram u matematici. *Poučak*, 19(76), 20-37. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/220085> (05.10.2019.)
4. Baranović, N. i Lehman, S. (2019). Tangram u nastavi matematike, 2. dio. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 102, 69-75.
5. Božović, R. (2009). Euklidove aksiome i postulati: *Vaspitanje i obrazovanje: Časopis za pedagošku teoriju i praksu*, 2, 53-62.
6. Cindrić, M. i Vlasnović, H. (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van Hieleovoj teoriji. *Školski vjesnik: časopis za pedagojsku teoriju i praksu*, 63(1-2), 37-51. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/123229> (24.02.2020.)
7. Dakić, B. (2008). Arhimedov palimpsest. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 46, 36-40. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/11/broj/46/clanak/595/arhimedov-palimpsest> (24.02.2020.)
8. Dakić, B. (2009). Matematičke igračke. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 62, 87-90. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/18/broj/62/clanak/888/matematicke-igracke> (24.02.2020.)
9. Davide, V. (1979). *Na izvorima matematike*, Osijek: Revija.
10. Galić, M., Nikčević-Milković, A. i Rukavina, M. (2011). Korištenje i učinkovitost igre u razrednoj nastavi. *Život i škola*, 25(1), 108-121. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/71642> (07.06.2020.)

11. Glasnović Gracin, D., Osrečak, M. i Rovan, D. (2017). Motivacijska uvjerenja učenika o aritmetici i geometriji. *Napredak*, 159(1-2), 53-72. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/202775> (02.04.2020.)
12. Glasnović Gracin, D. i Kuzle, A. (u tisku). „What is geometry for you? Draw a picture.“ Young students' understanding of geometry revealed through drawings. CTE Conference
13. Hercigonja (2017). Suvremeni nastavnik u odgoju i obrazovanju. Preuzeto s <https://suvremeninastavnik.wordpress.com/2017/09/12/nastavna-sredstva/> (26.02.2020.)
14. Jankov, D. (2011). Egipatski razlomci. *Osječki matematički list*, 11, 11-18. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=111241 (04.03.2020.)
15. Jukić, Lj. (2009). Matematičke slagalice. *Osječki matematički list*, 9, 13-20. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=67178 (05.10.2019.)
16. Khairiree, K. (2015). Creative Thinking in Mathematics with Tangrams and The Geometer's Sketchpad. Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics, 153-161. Preuzeto s <http://atcm.mathandtech.org/EP2015/invited/11.pdf> (11.10.2019.)
17. Kovačević, N. (2016). Prostorno mišljenje i geometrija prostora. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 85, 196-204. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/23/broj/85/clanak/1182/prostorno-misljenje-i-geometrija-prostora> (25.02.2020.)
18. Kurnik, Z. (2013). *Oblici matematičkog mišljenja*, Zagreb: Element.
19. Markovac, J. (1990). *Metodika početne nastave matematika*, Zagreb: Školska knjiga.
20. MZOS - Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2006). Nastavni plan i program za osnovnu školu. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta. Preuzeto s https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_s_kolu_-_MZOS_2006_.pdf (24.01.2020.)
21. MZOS - Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije. Zagreb: Ministarstvo znanosti i obrazovanja. Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_215.html (24.01.2020.)

22. Romano, D. A. (2009). Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije. *Metodički obzori: časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu*, 4(1-2), 95-103. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/45746> (25.02.2020.)
23. Serin, H. (2018). Perspectives on the Teaching of Geometry: Teaching and Learning Methods. *Journal of Education and Training*, 5, 131-137. Preuzeto s https://www.researchgate.net/publication/323373285_Perspectives_on_the_Teaching_of_Geometry_Teaching_and_Learning_Methods (26.02.2020.)
24. Slocum, J. (2004). *The tangram book*, New York: Sterling Publishing Co.
25. Znam, Š. i dr. (1989). *Pogled u povijest matematike*, Zagreb: Tehnička knjiga.

Prilozi

Prilog 1: Predložak za izrezivanje tanova

TANGRAM RADIONICA

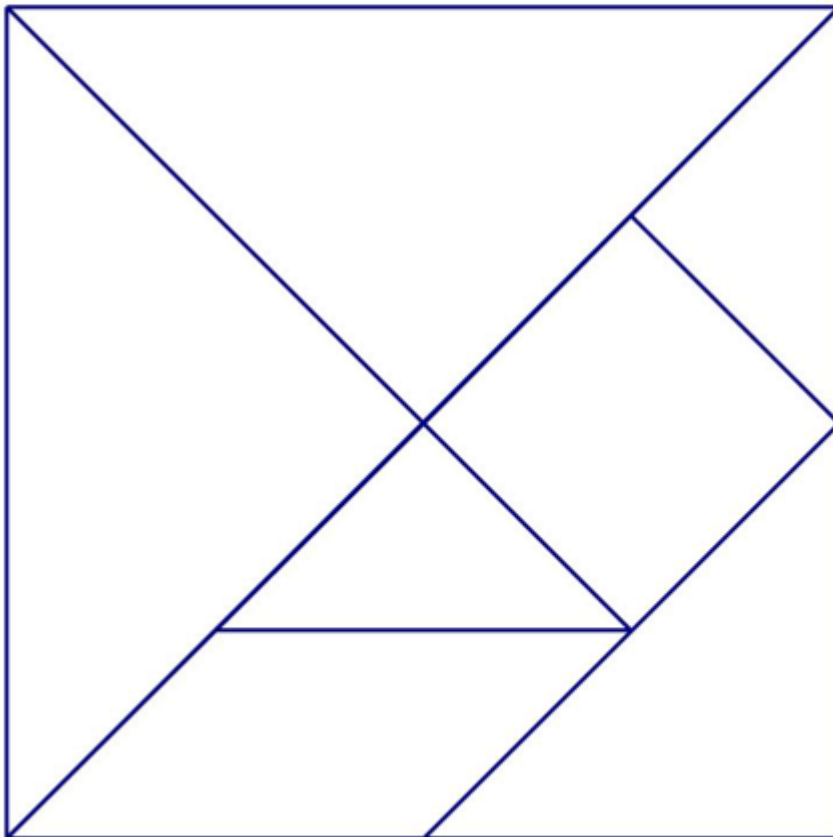
UPUTE ZA SLAGANJE: Potrebno je upotrijebiti svih 7 tanova.

Tanovi se postavljaju jedan do drugog te se ne smiju preklapati.

Tanovi se mogu preokrenuti na drugu stranu.

IZ OVOG PREDLOŠKA IZREŽITE 7 TANOVA.

Ukoliko nemate printer, možete sami nacrtati kvadrat i u njemu tanove pomoću ravnala i olovke kao na ovoj slici, a zatim izrezati.



Prilog 2: Anketa o tangram slagalici i njejoj pripremi u razrednoj nastavi

Spol: *

1. muško
 2. žensko
-

Studiram: *

1. na Odsjeku u Čakovcu
 2. na Odsjeku u Petrinji
 3. u središnjici u Zagrebu
-

Jeste li čuli za tangram prije prezentacije na Metodici matematike 2? *

1. Da.
 2. Ne.
-

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, gdje ste čuli za tangram slagalicu?

- niži razredi osnovne škole
- viši razredi osnovne škole
- srednja škola
- fakultet
- Ostalo...

Jeste li ikada osobno slagali tangram prije Metodike nastave matematike 2? *

1. Da.

2. Ne.

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, kada ste i GDJE slagali tangram?

Tekst kratkog odgovora

Bez naslova

Molimo Vas da iznesete svoje stavove o sljedećim tvrdnjama. Stav iskazujete zaokruživanjem SAMO JEDNOG od ponuđenih odgovora:

1 – u potpunosti se ne slažem

2 – ne slažem se

3 – niti se slažem, niti se ne slažem

4 – slažem se

5 – u potpunosti se slažem

Svidjele su mi se aktivnosti s tangramom u prezentaciji. *

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Aktivnosti s tangramom su mi bile lagane. *

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Smatram da je tangram koristan za razvoj dječjeg mišljenja. *

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kao budući učitelj koristit ću slagalicu tangram u nastavi Matematike. *

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Ukoliko biste tangram koristili na nastavi, za što biste, konkretno, iskoristili ovu slagalicu?

Tekst dugog odgovora

Izjava o izvornosti diplomskog rada

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istog nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

(vlastoručni potpis studenta)