

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Ivana Đurđević-Tomaš

Uvođenje pojma površine u nastavi matematike

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Ivana Đurđević-Tomaš

Uvođenje pojma površine u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor rada:

Izv. prof. dr. sc. Tin Perkov

Zagreb, srpanj 2022.

Zahvala

Želim od srca zahvaliti mentoru, izv. prof. dr. sc. Tinu Perkovu na ponuđenom znanju, vremenu, strpljenju i svim savjetima tokom pisanja i izrade ovoga diplomskog rada. Također, zahvalila bih profesorici, izv. prof. dr. sc. Dubravki Glasnović Gracin na pomoći i savjetima.

Posebno hvala mojim dragim roditeljima i moja dva brata koji su mi bili stalna podrška tokom cijelog fakultetskog obrazovanja.

Hvala ostalim dragim ljudima koji su mi obogatili dane studiranja.

Sažetak	5
Summary.....	6
1. Uvod	1
2. Metodika nastave matematike	2
2.1. <i>Metodika početne nastave matematike.....</i>	2
2.2. <i>Ciljevi i zadaci nastave matematike u razrednoj nastavi.....</i>	4
2.3. <i>Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole</i>	6
3. Formiranje osnovnih matematičkih pojmova	7
3.1. <i>Spoznajne osnove nastave matematike.....</i>	8
3.2. <i>Proces formiranja pojmova.....</i>	9
3.3. <i>Načela metodike nastave matematike</i>	12
3.4. <i>Organizacija nastave matematike</i>	12
4. Formiranje osnovnih geometrijskih pojmova	13
4.1. <i>Formiranje pojmova oblika u prostoru.....</i>	14
4.2. <i>Formiranje pojmova odnosa u prostoru</i>	16
4.3. <i>Formiranje pojmova dužina, duljina i opseg</i>	17
4.4. <i>Formiranje pojmova pravac i polupravac</i>	18
4.5. <i>Formiranje pojmova ploha i ravnina</i>	19
5. Pojam površine.....	20
5.1. <i>Formiranje pojma površina</i>	21
5.2. <i>Primjeri aktivnosti uvođenja pojma površine</i>	22
5.3. <i>Mjerenje površina</i>	23
5.4. <i>Primjeri aktivnosti mjerenja površine.....</i>	23
6. Pojam površine u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike za osnovne škole ..	24
6.1. <i>Domena Oblik i prostor i domena Mjerenje</i>	25

6.2. Zastupljenost domena C i D po razredima	25
7. Pojam površine u udžbenicima razredne nastave matematike	27
7.1. Udžbenici nastave matematike	27
7.2. Prikaz početnih aktivnosti i zadataka za uvođenja pojma površine u udžbenicima	28
7.3. Prikaz početnih aktivnosti i zadataka za mjerenje površine u udžbenicima	44
7.4. Usporedba zadataka za usvajanje pojma površine u udžbenicima	58
8. Zaključak	63
Literatura	64
Izjava o izvornosti rada	66

Sažetak

U nastavi matematike matematički pojmovi imaju posebne načine uvođenja. Osnovni geometrijski pojmovi su sadržaji učenja visoke razine apstrakcije, odnosno elementi logičkog mišljenja dobiveni apstrahiranjem i generaliziranjem. Učitelji neovisno o brojnosti raznih aktivnosti i zadataka u praksi i u udžbenicima moraju znati odabrati i prilagoditi širinu i dubinu sadržaja, osmisлити metode i strategije, te ih prilagoditi potrebama, mogućnostima i interesima svojih učenika. Uvođenje pojma površine u nastavi matematike je opisano prema više izvora (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik 2001). Zajedničko ovim autorima je da ističu da se pojam površine izgrađuju na predmetima, objektima i pojavama realnog svijeta dovodeći ih u veze i odnose na mentalnom planu, uz pomoć simboličkih struktura kakvi su govor i pisani znakovi. Međutim, aktivnosti i zadaci koje nude za uvođenje pojma površine se razlikuju. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO], 2019) također nudi posebne preporuke za ostvarivanje odgojno – obrazovnog ishoda pojma površine. Poput spomenutih autora udžbenici matematike uvode pojam površine na osnovi objekata iz stvarnog svijeta, ali je pojam predstavljen kroz različite aktivnosti i zadatke. Ovaj rad nudi pregled raznih aktivnosti i zadataka uvođenja pojma površine u nastavi matematike od strane nabrojanih autora, iz Kurikuluma, i u udžbenicima razredne nastave matematike, te ih sve međusobno uspoređuje. Prikazuje sličnosti i razlike između pet različitih hrvatskih udžbenika, te nudi pregled početnih aktivnosti i zadataka za uvođenje ovog pojma. Prikazani su sljedeći udžbenici: Otkrivamo matematiku 4 (Glasnović Gracin i sur., 2021a, 2021b), Nina i Tino 4 (Lončar i sur., 2021), Super matematika za prave tragače 4 (Martić i sur., 2021), Moj sretni broj 4 (Jakovljević Rogić i sur., 2021) i Matematička mreža 4 (Cindrić i sur., 2021). Rad može pomoći učiteljima u lakšem pregledu ponuđenih aktivnosti i zadataka za uvođenje pojma površine, te na temelju ponuđenog i u jednostavnijem odabiru aktivnosti za njihove učenike s ciljem uspješnijeg usvajanja ovog apstraktnog matematičkog pojma.

Ključne riječi: metodika nastave matematike, formiranje osnovnih matematičkih pojmova, formiranje osnovnih geometrijskih pojmova, pojam površine, hrvatski udžbenici nastave matematike.

Summary

Introducing the notion of surface area in mathematics teaching

Mathematical notions are introduced in different ways in mathematics teaching. Basic geometrical notions are contents of learning with high level of abstraction, that is elements of logical thinking obtained by abstraction and generalization. Regardless of the number of different activities and assignments in practice and in textbooks, teachers must be able to choose and adjust the width and depth of the content, devise methods and strategies, and adapt them to the needs, abilities and interests of their students. The introduction of the notion of surface area in mathematics teaching has been described according to several sources (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik 2001). These authors emphasize that the notion of surface area is built on objects, items and phenomena of the real world, bringing them into connections and relationships on the mental plan, with the help of symbolic structures such as speech and written signs. However, they offer different activities and assignments for introducing the notion of surface area. Curriculum of the subject Mathematics for primary schools and grammar schools in the Republic of Croatia (Ministry of Science and Education [MZO], 2019) also offers special recommendations for achieving the educational outcome of the notion of surface area. Like the mentioned authors, mathematics textbooks introduce the notion of surface area based on real-world objects, but the notion is presented through various activities and assignments. This thesis offers an overview of various activities and assignments of introducing the notion of surface area in mathematics teaching by the listed authors, from the Curriculum, and in textbooks for mathematics, and compares them all. It shows the similarities and differences between five different Croatian textbooks, and offers an overview of initial activities and assignments for introduction of this notion. These are the presented textbooks: *Otkrivamo matematiku 4* (Glasnović Gracin i sur., 2021a, 2021b), *Nina i Tino 4* (Lončar i sur., 2021), *Super matematika za prave tragače 4* (Martić i sur., 2021), *Moj sretni broj 4* (Jakovljević Rogić i sur., 2021) and *Matematička mreža 4* (Cindrić i sur., 2021). The thesis can help teachers to have an easier overview of the offered activities and assignments for the introduction of the notion of surface area, and based on the offered materials an easier selection of activities for their students, with the aim of more successful learning of this abstract mathematical notion.

Keywords: methodology of mathematics teaching, the formation of basic mathematical notions, the formation of basic geometrical notions, the notion of surface area, Croatian textbooks for teaching mathematics.

1. Uvod

Matematički pojmovi, jednostavni ili složeni, imaju posebne načine uvođenja u nastavi matematike. Oni nisu realno postojeći objekti već su apstrahiranjem i generaliziranjem dobiveni elementi logičkog mišljenja, stoga je nezaobilazna važnost neposredne okoline kao bitnog metodičkog uporišta kod njihovog razvoja (Markovac, 2001). Osnovni geometrijski pojmovi su sadržaji učenja visoke apstrakcije. Kod obrade tih pojmova za učenike je dosta težak prijelaz s konkretnog na apstraktno kada počinje postupak apstrahiranja (Kurnik, 2001). Djetetovo matematičko iskustvo se mora razvijati sljedećim slijedom apstrahiranja: I – iskustvo fizičkih predmeta, G – govorni jezik koji opisuje to iskustvo, S – slike koje prikazuju to iskustvo i Z – pismeni znakovi koji generaliziraju to iskustvo (Liebeck, 1995). Uvođenje pojma površine u nastavi matematike opisano je prema više izvora (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik 2001). Zajedničko ovim autorima je da ističu da se pojam površine izgrađuje na predmetima, objektima i pojavama realnog svijeta dovodeći ih u veze i odnose na mentalnom planu, uz pomoć simboličkih struktura kakvi su govor i pisani znakovi. Međutim, aktivnosti i zadaci koje nude za uvođenje pojma površine se razlikuju. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO], 2019) također nudi posebne preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda pojma površine. U četvrtom razredu pojam površine se pojavljuje u udžbenicima matematike gdje se također predstavlja na različite načine – drugačijim redoslijedom, aktivnostima, ilustracijama, metodičkim postupcima itd. Udžbenici razredne nastave matematike su podloga učiteljima u svakodnevnom poučavanju jer nude što će učitelj podučavati, na koji način, te razne tipove zadataka koje će učenici rješavati (Vidić i sur., 2018). Stoga je učiteljima važno znati na koji je način matematički pojam poput pojma površine predstavljen u raznim udžbenicima kako bi znali odabrati i prilagoditi širinu i dubinu sadržaja, osmisliti metode i strategije, te ih prilagoditi potrebama, mogućnostima i interesima svojih učenika. Ovaj rad nudi pregled raznih aktivnosti i zadataka uvođenja pojma površine u nastavi matematike od strane nabrojanih autora, iz Kurikuluma, i u udžbenicima razredne nastave matematike, te ih sve međusobno uspoređuje. Cilj ovog rada je analizirati i usporediti načine uvođenja pojma površine u nastavi matematike, u Kurikulumu i u udžbenicima razredne nastave. Rad prikazuje osnovne ciljeve i zadatke nastave matematike, opisuje proces formiranja matematičkih pojmova uzimajući u obzir spoznajne osnove, načela i organizaciju nastave matematike. Prikazuje formiranje osnovnih geometrijskih pojmova bitnih kao preduvjet za

usvajanje pojma površine. Uvođenje pojma površine je detaljno opisano kroz formiranje pojma površine, primjere aktivnosti uvođenja pojma površine, mjerenja površina i primjere aktivnosti mjerenja površina, te kroz Kurikulum (MZO, 2019) u domenama Oblik i prostor (C) i Mjerenje (D). U posljednjem dijelu rada prikazane su početne aktivnosti i zadaci namijenjeni uvođenju pojma površine iz pet različitih hrvatskih udžbenika matematike, uz analizu koja uključuje međusobnu usporedbu udžbenika, kao i usporedbu udžbenika sa zahtjevima stručne literature i Kurikuluma.

2. Metodika nastave matematike

Metodika nastave matematike je znanost o matematičkom odgajanju i obrazovanju. Ostvaruje se na podlozi i uz pomoć matematičkih sadržaja. Matematičko odgajanje i obrazovanje se također može ostvarivati izvan nastave i škole (Markovac, 2001). Matematiku poučavamo jer nam služi u svakodnevnom životu, znanosti, trgovini i industriji, te jer je moćno, sažeto i nedvosmisleno sredstvo komunikacije, objašnjavanja i procjene (Liebeck, 1995). Metodika nastave matematike je opći termin koji se odnosi na sve stupnjeve školovanja, od osnovne škole do visokih škola i fakulteta. Stupanj u sustavu matematičkog odgajanja i obrazovanja koji je bitan za ovaj rad je metodika početne nastave matematike, a njegova posebnost proizlazi iz prirode matematičkih sadržaja koji se uče te stupnja intelektualnog razvoja učenika (Markovac, 2001). Metodika nastave matematike oduvijek ima istaknuto mjesto među odgojno-obrazovnim temama, te je stalno aktualna tema zbog problema i poteškoća u učenju i poučavanju matematike. Velik dio učenika ima teškoće u učenju matematike i zbog toga razvijaju negativne emocije i stavove prema matematici, te se javlja pitanje gdje leži problem (Horvat, 2018).

2.1. Metodika početne nastave matematike

Metodika početne nastave matematike se još naziva i metodikom nastave matematike u razrednoj nastavi te označava znanstvenu disciplinu koja proučava matematičko odgajanje i obrazovanje u razrednoj nastavi, tj. u prva četiri razreda osnovne škole. U tim razredima matematičko odgajanje i obrazovanje ima obilježja po kojima se razlikuje od ostalih stupnjeva školovanja jer upravo u tom stupnju dolazi do prijelaza s predškolskog obrazovanja na sustavno odgajanje i obrazovanje (Markovac, 2001). U početnoj nastavi matematike matematički razvoj

djeteta određuje organizirana i cilju usmjerena aktivnost kod koje se nastavni sadržaji usvajaju namjerno, organizirano i ne uvijek izravnim dodirima s realnošću. Prva karakteristika ove nastave je početno formiranje matematičkih pojmova kao što su prirodni broj, relacije i operacije s tim brojevima, pojmovi o nekim zakonitostima računskih operacija te elementarni geometrijski pojmovi (Markovac, 2001). Ovaj rad posebnu pažnju stavlja na formiranje elementarnih geometrijskih pojmova u metodici početne nastave matematike i nudi konkretne primjere aktivnosti i zadataka koji će učenicima omogućiti bolje usvajanje matematičkog pojma površine. Bitno je spomenuti kako proces formiranja pojmova u nastavi matematike ne mora, a vrlo često i ne može biti precizan i strog kao isti proces u znanosti (Kurnik, 2001). Matematika nam pomaže u rješavanju praktičnih problema, ali je ipak apstraktan predmet (Liebeck, 1995). U tome se ogleda razlika između matematike i ostalih nastavnih predmeta. Njihovi sadržaji učenja su realno postojeći objekti, dok su u početnoj nastavi matematike sadržaji učenja visoke apstrakcije (Markovac, 2001). Kod obrade nekog pojma kritično je mjesto prijelaz na onaj stupanj u kojem počinje postupak apstrahiranja, jer je prijelaz s konkretnog na apstraktno za neke učenike dosta težak (Kurnik, 2001).

U matematici, kao prva karakteristika, postoji hijerarhija apstrakcija jer ne možemo razumjeti nijedan matematički pojam ako ne razumijemo podređene pojmove. Zadaća je učitelja provesti učenike kroz tu hijerarhiju, a da pritom ne izgube vezu sa stvarnošću u kojoj je i najsloženija matematika ukorijenjena (Liebeck, 1995). Druga karakteristika početne nastave matematike je stupanj i kvaliteta intelektualne razvijenosti školskih početnika. U toj dobi dijete može logički misliti, ali isključivo ako je ta misao utemeljena na odgovarajućim radnjama s konkretnim objektima (Markovac, 2001). Djetetovo matematičko iskustvo se mora razvijati sljedećim slijedom apstrahiranja: I – iskustvo fizičkih predmeta, G – govorni jezik koji opisuje to iskustvo, S – slike koje prikazuju to iskustvo i Z – pismeni znakovi koji generaliziraju to iskustvo (Liebeck, 1995). Mišljenjem učenika u toj dobi dominira percepcija, njihovo mišljenje je intuitivno i uspješno može funkcionirati samo u neposrednom dodiru s objektima mišljenja. Visok stupanj metodičkog oblikovanja matematičkih nastavnih sadržaja je treća karakteristika početne nastave matematike. Dva su razloga tome: apstraktnost matematičkih sadržaja i razina te kvaliteta intelektualne razvijenosti učenika. Neovisno o iscrpnosti pripreme nastavnog sata od strane učitelja nijedna knjiga tj. matematički udžbenik ne može početi tamo gdje bi trebala, a to su po I-G-S-Z modelu iskustvo i govorni jezik. Matematički udžbenik za djecu isključivo obuhvaća samo posljednja dva slijeda spomenutog I-G-S-Z modela, a to su slike i znakovi (Liebeck, 1995).

Metodičko pravilo koje se uvijek primjenjuje – što je stupanj intelektualne razvijenosti učenika niži, stupanj metodičkog oblikovanja matematičkih sadržaja je viši, te je sukladno tome metodičko oblikovanje matematičkih sadržaja najveće u početnoj nastavi matematike, a u kasnijim stupnjevima se postupno smanjuje (Markovac, 2001). Učitelj kod pripremanja nastavnog sata matematike treba poznavati načine na koji se matematički pojam, poput pojma površine, predstavlja od strane raznih autora, u Kurikulumu i u raznim udžbenicima kako bi znali odabrati i prilagoditi širinu i dubinu sadržaja, osmisliti metode i strategije, te ih prilagoditi potrebama, mogućnostima i interesima svojih učenika. Isključivo na ovaj način se učenikove teškoće i negativne emocije prema učenju matematike mogu ublažiti ili čak otkloniti.

2.2. Ciljevi i zadaci nastave matematike u razrednoj nastavi

Glavni cilj početne nastave matematike jest odgajanje i obrazovanje učenika na podlozi i pomoću matematičkih sadržaja što ih propisuje nastavni program. Zadaci nastave matematike u razrednoj nastavi su sljedeći:

- usvajanje sadržaja kao što su prirodni brojevi, relacije i operacije među tim brojevima, operacije s tim brojevima i neke osnovne zakonitosti koje za njih vrijede, formiranje osnovnih geometrijskih pojmova,
- razvijanje psihičkih i intelektualnih sposobnosti učenika (mišljenje, pažnja, pamćenje, promatranje...), razvijanje misaonih operacija s pojmovnim objektima (brojevima) poput analize, indukcije i ostalih,
- formiraju se pozitivna svojstva ličnosti učenika kao što su točnost, urednost i upornost u rješavanju matematičkih zadataka, razvija se navika služenja geometrijskim priborom te se njeguje osjećaj za ljepotu geometrijskog crteža
(Markovac, 2001).

U drugu ruku, za razliku od autora u Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (MZO, 2019) se jasno navode odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja predmeta koji važnost stavljaju na logičko, kreativno i kritičko promišljanje, te rješavanje problemskih situacija. Navodi se i važnost prepoznavanja povijesne, kulturne i estetske vrijednosti matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima (MZO, 2019). Također je pokrivena odgojna, obrazovna i funkcionalna

komponenta, ali na način da je pomnije opisana i produbljena stavljanjem učenika u prvi plan. Novije teorije nastave i učenja stavljaju u prvi plan aktivnosti učenika što se ogleda u iskazivanju obrazovnih ishoda u vidu kompetencija koje će učenici steći na nastavi matematike, a od nastavnika se očekuje da za svaki sat istaknu i opišu što će i kako tijekom sata raditi učenici i koji se ishodi učenja očekuju (Matijević, 2011). Slijedeći ovu metodičku orijentaciju od nastavnika se očekuje da napišu koje će konkretne kompetencije učenici učiti, vježbati i stjecati na određenom satu.

Međutim, nastava matematike je i dalje pretežno usmjerena na izvršavanje plana i programa, a mnogi nastavnici matematike kao glavni zadatak si postavljaju da učenici usvoje što više propisanog matematičkog sadržaja. Iz tog razloga suvremena nastava matematike postavlja i zahtijeva rješavanje dvaju važnih problema: problem razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika, te problem odgovarajućeg osposobljavanja učitelja matematike (Kurnik, 2009). Rješavanje prvog problema nastavnik može pronaći u načelima, oblicima i metodama nastave matematike. Osim načela, oblika i metoda nastave matematike, bitno je pribrojiti i dobre udžbenike, kao i najbitniju komponentu – nastavnika matematike.

Nastavnik matematike je ključna komponenta zbog koje je moguće ostvariti ciljeve i zadatke nastave matematike, a bitno je da on bude kreativan i sposoban. Kreativan i sposoban nastavnik razvija stvaralačko mišljenje i matematičke sposobnosti svojih učenika (Kurnik, 2001). Odgojno-obrazovni rad nastavnika mora biti prožet pozitivnim iskustvima usmjerenima na doživljaje uspjeha, u komunikaciji koja uvažava osobnost, interese i sposobnosti učenika, te potiče učenike na iznošenje mišljenja i prijedloga kako bi se u potpunosti ostvario koncept nastave u kojoj je učenik u centru nastavnog procesa (Horvat, 2018). Učenike treba postupno i primjereno naučiti osnovnim metodama: analizi i sintezi, analogiji, apstrakciji i konkretizaciji, indukciji i dedukciji, generalizaciji i specijalizaciji. Ove metode su svojstvene svim znanostima, međutim nastavnik matematike ne mora biti znanstvenik da bi u nastavi pravilno i primjereno primjenjivao načelo znanstvenosti i znanstvene metode (Kurnik, 2009). Stoga, učitelj kao najbitnija komponenta treba biti sposoban i kreativan, a jedan od preduvjeta za to je da poznaje Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i zadatke koje nude razni autori.

2.3. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj donesen je od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja 2019. godine, te je zamijenio dotadašnji Nastavni plan i program. Kurikulum se sastoji od više podnaslova, koji opisuju različite dijelove nastave matematike. Pod podnaslovom C. STRUKTURA – MATEMATIČKI PROCESI I DOMENE KURIKULUMA NASTAVNOGA PREDMETA MATEMATIKA nakon opisanih matematičkih procesa slijede domene koje su nastale na temelju grupiranih srodnih koncepata koji su važni za razumijevanje informacija, procesa i pojava u svijetu. Domene i njihove slovne oznake su sljedeće: Brojevi (A), Algebra i funkcije (B), Oblik i prostor (C), Mjerenje (D) i Podatci, statistika i vjerojatnost (E). Matematika kao logična i zaokružena cjelina se ogleda i u cjelovitosti domena jer je usvojenost koncepata jedne domene često pretpostavka usvajanja koncepata u drugim domenama. Domene se postupno razvijaju i nadograđuju, a dio pojedine domene u godini učenja prilagođen je razvojnim mogućnostima učenika i potrebi izgradnje cjelovitoga matematičkog obrazovanja. Svaka domena u Kurikulumu je opisana. Domena Oblik i prostor (C) dio je geometrije koji se bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa, a u domeni Mjerenje (D) usvajaju se standardne mjerne jedinice za novac, duljinu, površinu, volumen, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu, te ih se mjeri odgovarajućim mjernim uređajima i kalendarom. Domene Oblik i prostor (C) te Mjerenje (D) bit će detaljnije pojašnjene u nastavku rada jer su uspravo one ključne kod usvajanja pojma površine. Podnaslov D. ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHODI, SADRŽAJI I RAZINE USVOJENOSTI PO RAZREDIMA I ORGANIZACIJSKIM PODRUČJIMA sadrži odgojno-obrazovne ishode opisane sljedećim elementima: odgojno-obrazovni ishod, razrada ishoda, odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti *dobar* na kraju razreda, sadržaji i preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda. Svakome odgojno-obrazovnom ishodu dodjeljuje se kratka oznaka, npr. MAT OŠ A.1.2. Za svaki razred postoji grafički prikaz zastupljenosti svake domene u toj godini učenja što je zanimljivo jer se jasno vidi koliko su zastupljeni geometrijski sadržaji koji spadaju u domene C i D. Dobar nastavnik matematike treba biti u mogućnosti prepoznati korisne sadržaje Kurikuluma i iskoristiti ih na najbolji mogući način pri poučavanju svojih učenika.

3. Formiranje osnovnih matematičkih pojmova

Pojam je oblik mišljenja u kojem se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju. Formiranje osnovnih matematičkih pojmova je postupan proces (Kurnik, 2009). Proces započinje pitanjem koje si uvijek postavlja metodika, a to je kako podučavati. Bitna, ako ne i najbitnija, stavka svakog metodičkog oblikovanja nastavnog procesa je intelektualna razvijenost učenika. Bitno je razmotriti psihološko utemeljenje procesa usvajanja osnovnih matematičkih pojmova jer se ono bitno razlikuje s obzirom na dob učenika (Markovac, 2001). Prema J. Piagetu intelektualni razvoj čovjeka dijelimo u četiri stadija: prvi stadij - od druge do pete godine života, drugi stadij - od pete do sedme godine, treći stadij - od sedme do jedanaeste godine i četvrti stadij - poslije jedanaeste (Markovac, 2001). Stadij koji je bitan za početnu nastavu matematike je stadij konkretnih intelektualnih operacija jer su učenici početne nastave matematike u tom stadiju na početku školovanja. Stadij konkretnih intelektualnih operacija ima sljedeća obilježja: nastajanje i razvijanje logičkog mišljenja uz uvjet da je potkrijepljeno perceptivnim (osjetilnim) podacima, početno formiranje operacija, tj. aktivnosti koje su postale interiorizirane (konkretna radnja pretvara se u misaonu) i reverzibilne (mišljenje se oslobađa perceptivnih podataka i može operirati neovisno o njima), te operativno mišljenje samo ako se zasniva na aktivnostima s konkretnim objektima.

Logičko i operativno mišljenje ovog stadija kod učenika je moguće samo uz aktivnosti s konkretnim objektima, te je stoga bitno razlikovati dvije vrste takvih aktivnosti. Prva vrsta su aktivnosti koje rezultiraju spoznajom kvalitativnih i fizičkih svojstava elemenata (one nisu važne u početnoj nastavi matematike), a druga vrsta su one što rezultiraju spoznajom svojstava koje objekti manipuliranja inače sami po sebi ne posjeduju (one imaju veliku važnost kod faze formiranja osnovnih matematičkih pojmova) (Markovac, 2001). Treba svakako uvijek uzeti u obzir da stupanj razvijenosti u trenutku učenja nije ni približno jednak kod svih učenika. Temeljna intelektualna sposobnost koju učenik mora posjedovati kako bi uspješno usvojio pojmove je sposobnost apstrahiranja i generaliziranja identificiranog zajedničkog svojstva u grupi predmeta ili pojava. „Otkrivanje i spoznavanje zajedničkog bitnog svojstva predmeta i pojava najvažniji je čin u formiranju pojmova“ (Markovac, 2001, str. 27).

Apstrakcija je misaoni proces kod kojeg se misaono odvlače opća bitna svojstva promatranog predmeta ili pojave od ostalih svojstava koja su nebitna za određeno proučavanje, te se nebitna svojstva odbacuju. Metodom generalizacije se izdvajaju opća svojstva promatranog skupa

predmeta i iz toga proizlazi apstrahiranje koje je s njom usko povezano (Kurnik, 2000a). Generalizacija ili poopćavanje je prijelaz s razmatranja skupa predmeta na razmatranje njegova nadskupa (Kurnik, 2000b). Apstrahiranjem se odbacuju nebitna svojstva predmeta i pojava, a generaliziranjem se zadržavaju nepromjenjiva svojstva koja se trajnije fiksiraju u svijesti. Upravo tu leži velika važnost pojmova u životu čovjeka jer su zajednička nepromjenjiva svojstva sadržana u pojmu ključ za identifikaciju pojedinih predmeta (Markovac, 2001).

Uspješnost procesa formiranja pojma osigurava pet značajnih znanstvenih postupaka: analiza, sinteza, konkretizacija, apstrakcija i generalizacija (Kurnik, 2009). Pojam nakon pažljive analize nastaje apstrahiranjem svojstava objekata koji stvarno postoje u svijetu oko nas i poopćavanjem (Kurnik, 2001). Važniji matematički pojmovi poput *puno, nekoliko, koliko i, više, manje, dugo, kratko, jednake duljine, dulje, kraće, okruglo, plosnato, ravno i zaobljeno* mogu se usvojiti pomoću četiri temeljne aktivnosti. To su: pridruživanje, razvrstavanje, sparivanje i nizanje (Liebeck, 1995). Učitelj treba poznavati misaoni proces formiranja osnovnih matematičkih pojmova kod učenika, te aktivnosti i zadatke koji će taj proces olakšati.

3.1. *Spoznajne osnove nastave matematike*

U nastavi matematike učenici pretežno usvajaju pojmove, a pojam nije realno postojeći objekt te stoga nije dostupan promatranju, slušanju ili nekoj drugoj osjetilnoj aktivnosti. Po sadržaju pojmovi mogu biti jednostavni i složeni. Jednostavan bi bio npr. pojam broja jer ima samo jednu oznaku, a primjeri složenih pojmova su: kut, pravac, dužina jer sadrže više oznaka. Jednostavan pojam ne znači da je jednostavan za razumijevanje i formiranje. Upravo ti pojmovi znaju biti apstraktniji od nekih složenih (Markovac, 2001). Temeljne postavke i ideje na kojima se zasniva i izvodi nastava matematike nazivaju se *nastavna načela*. Načelo znanstvenosti je načelo koje najčešće izaziva nedoumice, a bitan je dio obrade matematičkih pojmova. Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda te zahtijeva zakonitosti matematike kao znanosti (Kurnik, 2002). Drugim riječima, nastavnik matematike treba učenike upoznavati s onim činjenicama i pojmovima koji su danas znanstveno potvrđeni.

Nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti ako pravilno provodi proces formiranja pojma i pridržava se osnovnih pravila koja mora zadovoljavati definicija pojma. Proces formiranja pojma je postupan proces koji se odvija kroz tri stupnja koji su opisani u sljedećem podnaslovu

(Kurnik, 2009). Osnovna pravila koja mora zadovoljavati definicija pojma su: primjerenost, minimalnost sadržaja, sažetost, prirodnost, prikladnost, primjenjivost i suvremenost. „Jedna od značajki pojma kao oblika mišljenja jest to što je formiranje pojma u spoznaji čovjeka neodvojivo od njegova izražavanja riječima, zapisom ili simbolom“ (Kurnik, 2009, str. 10). Ovu značajku te njenu važnost posebno vidimo u matematici. Propusti u nastavi matematike i povreda načela znanstvenosti koji se događaju kod definiranja matematičkih pojmova mogu rezultirati slabom nastavom koja ne ostvaruje ciljeve odgoja i obrazovanja. Nastavnik mora pripaziti da je definicija primjerena definiranom pojmu, ni preuska, ni preširoka, te da razotkriva bit pojma. Bitno je da nastavnik obrati pažnju na udžbenike u kojima definicije znaju biti sažetije, ali i dalje preširoke, te da ih prilagodi učenicima. Pažnja se mora obratiti na cirkularne i negativne definicije koje mogu dodatno zbuniti učenike. Definicija ne smije biti negativna ako može biti pozitivna (Kurnik, 2009).

Za formiranje pojma osim osjetilnog (percepcije i predodžbe) i racionalnog faktora (apstrahiranje i generaliziranje) značajnu ulogu ima govor. Bez adekvatne uporabe govora mnoge bi se radnje pretvorile u beskorisno manipuliranje fizičkim objektima bez ikakvog smisla i značenja. Izražavanjem riječima misaone radnje se povezuju s fizičkim aktivnostima, a njima se također apstrahira i generalizira jer sadržaj objašnjenja govorom jesu kvantitativna, a ne kvalitativna svojstva skupova. Pojmovi trebaju biti imenovani i označeni. Svrha imenovanja i označavanja pojmova je ta da sadržaj postane dostupan osjetilnoj percepciji te da se razlikuje od sadržaja drugih pojmova (Markovac, 2001). Usvojen pojam kod učenika ne znači da će ga znati imenovati ili označiti, već identificirati i razumjeti njegov sadržaj.

3.2. Proces formiranja pojmova

Kod mnogih učenika se javlja strah od matematike i to kao posljedica početnih neuspjeha u razumijevanju matematičkih pojmova (Horvat, 2018). To samo potvrđuje koliko je bitno da nastavnik poznaje proces formiranja pojmova. U procesu formiranja pojmova mogu se uočiti određene etape odnosno aktivnosti. Proces formiranja pojma postupan je proces i ima tri stupnja:

1. Promatranje i opažanje. To je početni i najjednostavniji stupanj spoznavanja pojma. Promatraju se konkretni objekti i upoznaju njihova konkretna svojstva povezana s pojmom. U osnovi ovog stupnja je, prema tome, osjetilna spoznaja.

2. Predodžba o pojmu. Drugi stupanj je uočavanje nečeg općeg i zajedničkog objektima u promatranom skupu.
3. Formiranje pojma. Treći stupanj je izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata.
(Kurnik, 2001)

Svaki navedeni stupanj ima određenu težinu i važnost za razvoj mišljenja učenika te se stoga treba što pažljivije i primjerenije provoditi. Svakim stupnjem se razina mišljenja učenika povisuje. Kod formiranja pojma kritično mjesto je prijelaz na stupanj u kojem počinje postupak apstrahiranja jer je većini učenika prijelaz s konkretnog na apstraktno poprilično težak. Proces završava definicijom. U nižim razredima se proces formiranja pojmova može opisati kao konkretno-induktivan (Kurnik, 2001). Matematičkom apstrahiranju vodi već opisani I-G-S-Z model koji je izgrađen na spoznajama mnogih psihologa poput Piageta, Brunera, Vygotskog i drugih, a na ovaj način ga je prikazala Liebeck (Marendić & Vlahović-Štetić, 2010). Ovaj model je osnovni metodički put razvoja matematičkih pojmova.

Zajedničko svim ovim psiholozima i autorima je što ističu da se svi matematički pojmovi izgrađuju na predmetima, objektima i pojavama realnog svijeta dovodeći ih u veze i odnose na mentalnom planu, a uz pomoć simboličkih struktura kakvi su govor i pisani znakovi. Kod razvoja matematičkih pojmova važno metodičko uporište je da je neposredna okolina, koja uključuje i fizičku i socijalnu dječju okolinu, nezamjenjiva u procesu razvoja logičko-matematičkih struktura (Marendić & Vlahović-Štetić, 2010). Početni matematički pojmovi koje djeca trebaju usvojiti su: *puno, nekoliko, koliko i, više, manje, dugo, kratko, jednake duljine, dulje, kraće, okruglo, plosnato, ravno i zaobljeno*. Četiri temeljne aktivnosti kojim djeca usvajaju te pojmove su: pridruživanje, razvrstavanje, sparivanje i nizanje.

Pridruživanje je način kako djeca uče pravilno upotrebljavati jezik odnosno matematički jezik. „Djeca spontano usvajaju pojmove uočavanjem i izborom obilježja zajedničkih pojedinim iskustvima“ (Liebeck, 1995). Bitno je da djeca u ranoj dobi i prije škole shvate kako u zadacima pridruživanja tražimo zajednička obilježja, npr. sve kestene u kutiji s češerima, kestenima i školjkama. Poslije je potrebno učenicima reći koja su to obilježja. Na taj način se može od učenika tražiti da zaokruže trokute u zadatku gdje su kvadrati, trokuti i krugovi. Kasnije im se objasni koja su to obilježja koja razlikuju trokut od ostalih geometrijskih likova, a koja obilježja svi trokuti imaju ista. Učenicima se pomoću štapića uvode pojmovi *dugo*,

kratko i *jednako dugo* (Liebeck, 1995). Postupno se s učenicima dolazi do pojma *dulje* uspoređujući štapiće različite duljine.

Za razliku od zadataka pridruživanja gdje se traže zajednička obilježja, u zadacima razvrstavanja se traži da se neki skup rastavi u nove skupove koje čine elementi sa zajedničkim obilježjima. Aktivnosti pridruživanja se sve mogu pretvoriti u aktivnosti razvrstavanja koje su malo složenije. Učenci u zadacima pridruživanja pridružuju štapiće po duljini, npr. učenik iz skupa štapića treba pridružiti zadanom štapiću *jednako duge* štapiće iz skupa. U zadacima razvrstavanja učenika treba razvrstati štapiće iz skupa na *dulje*, *kraće* i *jednake duge* zadanom štapiću. Umjesto da učenici pridružuju štapiće po duljini mogu ih početi razvrstavati prema duljini (Liebeck, 1995).

Aktivnosti sparivanja su važne za uvođenje pojmova u svezi s brojem. Aktivnost sparivanja je jednostavnija od brojenja jer ako se pitate je li u prostoriji više ljudi ili stolaca dovoljno je „spariti“ svaku osobu sa stolcem i pogledati postoji li višak ljudi ili stolaca. Neki pojmovi koje djeca usvajaju aktivnostima sparivanja su: *jednako*, *više*, *manje*, *jednako mnogo*, *više od*, *manje od* (Liebeck, 1995).

Posljednja vrsta aktivnosti je nizanje skupa predmeta, koje traži da se razumiju pojmovi *prvi*, *pokraj*, *posljednji*, *između*. Pojmovi se uvode nizanjem igračaka, kuglica na ogrlici itd., te pitanjem „što slijedi?“. Nizanje predmeta prema relaciji *dulji od* omogućuje nam uvođenje pojmova *najdulji* i *najkraći*. Nizanje produbljuje pojmove poput *veće od*, *manje od*, i uvodi pojmove *najveće* i *najmanje* (Liebeck, 1995). Učitelj može pomoći djeci shvatiti bitne matematičke pojmove ako osmisli prikladne aktivnosti pridruživanja, razvrstavanja, sparivanja i nizanja. Na taj način može uvesti i odgovarajuće nazive za te pojmove. Kako učenike ne bi zbunjivali takozvanim šumovima (učenik poveže pojam s nečim što zapravo nije povezano s tim pojmom), učitelji trebaju pri tumačenju određenog pojma smisliti različite aktivnosti i upotrebljavati različite materijale. Čestom promjenom aktivnosti i ponavljanjem, također obraćajući pažnju na bit tumačenog pojma, učitelj osigurava formiranje matematičkih pojmova kod učenika (Liebeck, 1995).

3.3. Načela metodike nastave matematike

Načela su temeljne ideje i smjernice na osnovu kojih nastavnik izvodi nastavu. To su polazne osnove pri uspostavljanju, procjenjivanju i vrednovanju cjelokupnog odgojno-obrazovnog procesa u nastavi, tj. to su smjernice kojih bi se trebao pridržavati svatko tko organizira i provodi početnu nastavu matematike. Ona su podjednako važna i usko povezana, te se trebaju podjednako uvažavati i primjenjivati. Njihova svrha je matematičko odgajanje i obrazovanje učiniti maksimalno efikasnim (Markovac, 2001). Kurnik (2002) navodi da su načela na temelju kojih se izvodi nastava matematike u osnovnoj školi sljedeća: načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti, načelo sistematičnosti i postupnosti, načelo trajnosti znanja, vještina i navika, načelo individualizacije, načelo motivacije, načelo odgojnosti nastave, načelo problemnosti i načelo znanstvenosti. Međutim, Markovac (2001) naglašava kako je broj načela na kojim se utemeljuje početna nastava matematike različit, što je posljedica funkcije znanstvenih spoznaja o odgojno – obrazovnom procesu. Metodika početne nastave matematike prema autoru Markovcu uspostavlja sljedeća načela: načelo primjerenosti, načelo aktivnosti, načelo zornosti, načelo postupnosti, načelo individualizacije i načelo objektivne realnosti. Dobro organizirana i valjano izvođena nastava podjednako uvažava i ostvaruje sva metodička načela..

3.4. Organizacija nastave matematike

Glavni elementi organizacije nastave matematike su sljedeći: proces usvajanja matematičkih sadržaja, obrađivanje novog gradiva, vježbanje i ponavljanje, provjeravanje znanja, metodičko oblikovanje nastavnog sata, oblici nastavnog rada, nastavne metode, nastavna sredstva i pomagala, praćenje učeničkog napretka i dr. Organizacija nastave matematike je postupak kojim se navedeni elementi spajaju u funkcionalnu cjelinu radi stvaranja uvjeta za realizaciju početnog matematičkog odgoja i obrazovanja. Važnost metodičkog oblikovanja nastavnog sata matematike je vrlo jasna. Bitni elementi sata koji se metodički oblikuju su: cilj sata, etape nastavnog sata, djelatnosti učenika i učitelja, oblici nastavnog rada, nastavne metode, sredstva i pomagala (Markovac, 2001). Cilj nastavnog sata je zamisao, prijedlog ili nacrt onoga što se radom na satu želi postići. Metodičko oblikovanje cilja sata uključuje promišljanje o sposobnostima učenika koje će se razvijati, a najčešće su to mišljenje, pažnja i pamćenje. Etape sata početne nastave matematike su: priprema, obrađivanje novog nastavnog sadržaja, vježbanje i ponavljanje, uključujući primjenu stečenog znanja. Svaka etapa ima poseban cilj

koji je određenom njenom prirodom (Markovac, 2001). Metodički se oblikuju i nastavne metode tako što se biraju one odgovarajuće, određuje se način njihove upotrebe i razmišlja se o izmjenjivanju pojedinih metoda. Metodički se također oblikuju i nastavna sredstva i pomagala u početnoj nastavi matematike, a tim terminom se označavaju najrazličitiji materijalni objekti koje se koriste pri učenju u nastavnom predmetu. Učenje je uspješnije ako se ostvaruje s više komponenata za primanje informacija, a najveći se broj informacija prima upravo vizualnom komponentom. U školi su najvažnije dvije komponente vizualna i auditivna, te su one osnova upotrebe nastavnih sredstava i pomagala u početnoj nastavi matematike. Zadnja komponenta metodičkog oblikovanja su oblici rada u početnoj nastavi matematike. To su različiti načini sudjelovanja u nastavnom procesu koji proizlaze iz različitog međusobnog odnosa učenika, učitelja i nastavnog sadržaja (Markovac, 2001).

Za organizaciju nastave matematike bitno je spomenuti i računske zadatke koji se mogu podijeliti u četiri karakteristične skupine: numerički ili zadaci brojevima, tekstualni ili zadaci riječima, zadaci s veličinama, te geometrijski zadaci. Geometrijski zadaci su posebno važni za uvođenje pojma površine u početnoj nastavi matematike jer su to zadaci geometrijskog sadržaja. Oni uključuju crtanje geometrijskih likova, prenošenje, zbrajanje, oduzimanje dužina, mjerenje dužina i površina, izračunavanje opsega i površine nekih likova i sl. Mogu se podijeliti na zadatke kojima se učenici osposobljavaju u služenju geometrijskim priborom i na zadatke kojim stječu elementarne geometrijske spoznaje. Elementarne geometrijske spoznaje uključuju određene geometrijske činjenice poput opsega trokuta i pravokutnika, površina pravokutnika i kvadrata, sukladnosti dužina i dr. Rješavanjem geometrijskih zadataka učenici stječu elementarno geometrijsko znanje i osposobljavaju se za primjenu tog znanja u realnim situacijama (Markovac, 2001).

4. Formiranje osnovnih geometrijskih pojmova

Početna nastava matematike ima pojedine zadatke koji se ostvaruju početnom nastavom geometrije. Nastavu geometrije je važno povezati sa stvarnim životom kako bi učenici vidjeli njenu primjenjivost u raznim područjima (arhitektura, inženjerstvo i dr.) i u svakodnevnim životnim situacijama (kupovanje namještaja, bojanje zidova, izrada ograde itd.). Kroz nastavu geometrije učenici razvijaju sposobnosti raznih vrsta mišljenja (logičkog, divergentnog i kritičkog), vizualizaciju, perspektivu i deduktivno rasuđivanje (Acman & Doutlik, 2019).

Učenik također razvija *postorni zor*, intuitivni osjećaj za oblike i odnose među njima, tj. sveobuhvatni pojam koji podrazumijeva prikazivanje, transformiranje, generiranje i prisjećanje prostorne informacije (Dečman i sur., 2013). Učenika za nastavu geometrije treba imati šestar, dva trokuta, ravnalo, geometrijsku bilježnicu, dobru gumicu, našiljenu olovku i crtovlje (list papira s podebljanim crtama). Dva glavna zadatka geometrije u početnoj nastavi matematike su izgraditi u učenika osnovne spoznaje o oblicima i odnosima u prostoru i formirati osnovne geometrijske pojmove. Polazište za formiranje osnovnih geometrijskih pojmova su aktivnosti s objektima iz neposredne okoline (promatranje, modeliranje, crtanje, prekrivanje, kretanje, dodirivanje itd.). Objekti iz neposredne okoline su podloga i uporište mišljenju učenika u spoznavanju sadržaja tih geometrijskih pojmova.

Međutim, ove aktivnosti imaju odgojno-obrazovnu vrijednost samo ako su osnova u procesima apstrahiranja i generaliziranja (Markovac, 2001). Djeca od najranije dobi dodiruju, gledaju i slažu različita geometrijska tijela i likove. Djecu također zanimaju obilježja tih tijela i likova iako još nisu svjesna da je upravo to dio geometrije. Mnoge aktivnosti pridruživanja od ranije dobi mogu poslužiti za uvođenje pojmova i riječi za *okruglo, ravno, ploha, brid, ravno, zakrivljeno, vrh* (Liebeck, 1995). Učenike kroz nastavu matematike učitelj treba osposobiti za sposobnost promatranja. Promatranjem učenici stječu perceptivno-predodžbeni materijal potreban za misaonu izradu geometrijskih pojmova. Bitno je da učitelj učenike osposobi i u prostornom predočavanju koje se očituje u mogućnosti zamišljanja različitih geometrijskih likova. Još jedan zadatak koji ima nastava geometrije, a stoga i učitelj, je razvijati intelektualne sposobnosti učenika (mišljenje, pažnju, pamćenje i dr.). Ovo je posebno važno naglasiti kako se nastava geometrije ne bi reducirala na perceptivno-predodžbenu razinu i manualnu aktivnost s objektima, već da je to samo polazište za uključivanje viših misaonih procesa poput apstrahiranja i generaliziranja (Markovac, 2001).

4.1. *Formiranje pojmova oblika u prostoru*

Formiranje pojmova oblika u prostoru započinje učiteljevom pripremom sata i biranjem nastavnih pomagala. Učitelj na sat donosi razne predmete poput kutija, sanduka, posuda, cijevi, konzervi i sl. Budući da oblike u prostoru učenici upoznavaju upravo pomoću predmeta iz neposredne okoline (Markovac, 2001). U suvremenim metodama poučavanja važno je aktivno i iskustveno učenje u bogato pripremljenoj okolini tj. učionici jer upravo takva okolina

povoljno utječe na funkcionalnost mozga učenika (Acman & Doutlik, 2019). Promatrajući predmete učenici se u prvom razredu prvo osposobljavaju u vizualnom prepoznavanju i imenovanju *uglatog* i *oblog* oblika, i *ravnih* i *zakrivljenih* ploha. Uz vizualno bitno je da učenici predmete upoznaju i taktilno obuhvaćajući ih dlanovima i dirajući prstom bridove predmeta. Učitelj učenicima treba prikazati razliku između *uglatog* i *oblog* predmeta kako bi im olakšao imenovanje i to radi kotrljajući predmete. Učenici mogu primijetiti da se samo obli predmeti kotrljaju, dok ugli predmeti ne (Markovac, 2001).

Pojmovi vezani uz oblik su još i *okruglo*, *ravno* i *sukladno*. Pojam *okruglo* učitelj može prikazati zadatkom pridruživanja gdje učenici pridružuju predmete sa zajedničkim obilježjima, a to obilježje je da se predmet može kotrljati. Učitelj kotrlja loptu i kaže: „Lopta se kotrlja jer je okrugla.“ Učitelj zatim kotrlja konzervu i kaže: „Konzerva se kotrlja jer je jednim dijelom okrugla.“ Pojam *ravno* učitelj može prikazati na isti način. Obilježje ovih predmeta je da čvrsto stoje na stolu i ne kotrljaju se. Učitelj kaže: „Konzerva stoji na mjestu jer je jednim dijelom ravna“ i pokazuje taj dio konzerve. Učenici na ovaj način još mogu shvatiti pojmove *valjkasto* i *stožasto*. Pojam *sukladnosti*, u smislu intuitivnog razumijevanja jednakosti po obliku i veličini, shvaćaju i posve mala djeca (Liebeck, 1995).

Nakon predmeta prikazuju se i ponavljaju obilježja na geometrijskim tijelima kvadra (kocke), valjka, kugle, piramide i stošca. Posebnu pažnju treba posvetiti kvadru. Kvadar kojem su svi bridovi jednake duljine se naziva kocka. Zatim učenici promatraju krug, pravokutnik (kvadrat) i trokut (Markovac, 2001). S obzirom da trodimenzionalne geometrijske oblike učitelj može donijeti na sat, učenike s dvodimenzionalnim oblicima moramo upoznati na druge načine. Pomoću pojma *ravno* usvojenog na trodimenzionalnim oblicima učitelj učenicima ukazuje na plohe geometrijskih tijela koje su dvodimenzionalne (Liebeck, 1995). Učenici mogu obojati ravne dijelove geometrijskih tijela i otisnuti ih na papir te tako prikazati geometrijske likove, ili ih pak mogu izrezivati iz kolaža.

U nastavi geometrije učenici bi trebali istraživati i analizirati oblike predmeta iz svoje okoline, stvarati iskustva u građenju i rastavljanju raznih konstrukcija te njihovom prikazivanju crtežima i riječima (Acman & Doutlik, 2019). Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik u prvom razredu izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okruženju. Sadržaj su geometrijska tijela (kugla, valjak, kocka, kvadar, piramida, stožac) i likovi (trokut, kvadrat, pravokutnik, krug), te ravne i zakrivljene plohe.

4.2. Formiranje pojmova odnosa u prostoru

Kao što je navedeno jedan od zadataka geometrije je izgraditi u učenika osnovne spoznaje o oblicima i odnosima u prostoru. Učenik promatrajući trodimenzionalne i dvodimenzionalne geometrijske oblike u prvom razredu primjećuje odnose među tim oblicima, a ti odnosi su *lijevo-desno, ispred-iza, iznad-ispod, gore-dolje, između*. Osim promatranjem predmeta učenik formira pojmove odnosa u prostoru i kretanjem u prostoru. Poznavanje već navedenih osnovnih prostornih relacija je ključno u učenikovom praktičnom životu kao i u nastavi matematike, te u nastavi ostalih predmeta. Formiranje odnosa u prostoru se treba zasnivati na promatranju, kretanju, pokazivanju i premještanju predmeta, te na misaonoj elaboraciji tih aktivnosti koja se odvija pravilnom govornom interpretacijom i ispravnom uporabom naziva.

Odnos *lijevo-desno* se zasniva na učenikovom poznavanju lijeve i desne strane njegova tijela. Bitno je da učitelj osposobi učenike da identificiraju odnose uz pomoć dijelova vlastitog tijela, npr. lijevo su predmeti koji su s lijeve strane lijeve ruke. Taj odnos je relativan i ovisi o stajalištu promatrača, stoga učitelj treba učenike stavljati u situacije gdje promjenom stajališta promatranja učenici pronalaze i određuju odnos predmeta prema sebi. Odnos *ispred-iza* se uvodi na sličan način jer također ovisi o stajalištu promatrača. Formiranje ovih odnosa učitelj započinje imenovanjem predmeta koje učenici vide (ono što je ispred) i imenovanjem predmeta koje ne vide (ono što je iza). Odnos *gore-dolje* se povezuje s upoznavanjem odnosa *ispod-iznad*. Odnosi *gore-dolje* i *ispod-iznad* se promatraju uočavanjem odnosa predmeta prema Zemlji tj. podu. Odnos *između* učenici upoznaju promatranjem tri učenika u redu: „Mara je između Leone i Karle.“

Nakon usvajanja navedenih odnosa učenike se osposobljava u uspoređivanju istovrsnih predmeta: *dulji-kraći, uži-širi, viši-niži, tanji-deblji* (Markovac, 2001). Kod uspoređivanja dužina učitelj može uvesti jedinice za mjerenje dužine koje će biti *fizikalne jedinice*. Fizikalne jedinice se mogu vidjeti, prebrojati i dodirnuti, npr. kutije za šibice, spajalice, štapići i dr., a učenicima je potrebno takvo iskustvo mjerenja dužine predmeta. Dužine predmeta se mogu mjeriti i *jedinicama osobne naravi*, a to je raspon prstiju ili stopalo. Postupno učitelj može mjerenje dužine povezati s brojevima tako da se duljina igračke mjeri brojem štapića, te da se radnja prikaže $3 + 2 = 5$ (Liebeck, 1995). Navedene spoznaje učenici stječu promatranjem

predmeta koje učitelj odabire i pravilnim imenovanjem otkrivenih odnosa među predmetima (Markovac, 2001).

4.3. *Formiranje pojmova dužina, duljina i opseg*

Formiranje pojma dužine započinje upoznavanjem pojmova crta i točka. Učenici crtu i točku upoznaju u prvom razredu. Crtu poznaju kao trag predmeta koji se giba po podlozi. Crte mogu biti ravne i zakrivljene. Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik u prvom razredu crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte. Zatim, crte prepoznaju kao brid geometrijskog tijela i kao stranice geometrijskog lika. Koristeći geometrijski pribor (ravnalo ili trokut) učenici crtaju ravne crte u svoje geometrijske bilježnice. Učenik još upoznaje otvorene i zatvorene crte koje učitelj može prikazati pomoću trake ili konopca, a zatim te crte učenik crta u bilježnicu. Učitelj ukazuje na područje koje zatvorena crta omeđuje. Točka je presjek crta i do shvaćanja tog pojma učenici dolaze promatranjem mjesta gdje se pojedine crte sijeku. Točke se imenuju velikim slovima latinske abecede (A, B, C...) i prikazuju tako da se vrhom olovke dotakne papir i malo zaokruži (Markovac, 2001). Učenik u prvom razredu prepoznaje i ističe točke (MZO, 2019). Dužinu učenici usvajaju u drugom razredu. Dužina je ravna crta koja spaja dvije točke ili najkraća spojnica između dvije točke. Učenici dužinu crtaju tako da prvo odrede dvije točke, primjerice A i B, a zatim ih povežu ravnom crtom. Crtež se čita: dužina A,B. Učenici moraju znati da se dužina sastoji od beskonačno mnogo točaka ali ima samo dvije krajnje koje također pripadaju dužini (Markovac, 2001). Dužinu učenici prepoznaju kao stranicu geometrijskih likova, odnosno bridove geometrijskih tijela. Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik u drugom razredu opisuje i crta dužine. Sadržaj navedenog ishoda: dužina kao najkraća spojnica dviju točaka, krajnje točke, stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta, te bridovi geometrijskih tijela. Učenik također, prema Kurikulumu (MZO, 2019), povezuje poznate geometrijski objekte tj. povezuje odnose među geometrijskim tijelima i likovima, te dužinama i točkama.

Uz pojam dužine u drugom razredu se uvodi i pojam duljine. Duljina je mjerni broj pridružen nekoj dužini. Izgrađivanje pojma duljine ostvaruje se metodičkim pristupom koji uključuje mjerenje dužine relativnim jediničnim dužinama, mjerenje konstantnim jediničnim dužinama i mjerenje dužine jediničnim dužinama od 1 km, 1 m, 1 dm, 1 cm i 1 mm. Za mjerenje relativnim jediničnim dužinama se najčešće koriste koraci, a za mjerenje konstantnim jediničnim dužinama letvica, štap, traka itd. Važno je nakon mjerenja analizirati rezultate s učenicima i objasniti da se mjerenjem uspoređuje prikazana dužina (npr. konopac) s dužinom

koraka, letvice ili trake, a također se dužini pridružuje broj koji pokazuje koliko se puta korak, štap ili letvica nanosila na dužinu koja se mjeri. Nakon toga se objašnjava potreba za mjerenje konstantnim jediničnim dužinama, a to je da osoba koja nije vidjela letvicu ili korak kojim smo mjerili neće mjerenje razumjeti. Učenici se upoznaju s jediničnim dužinama 1 km, 1 m, 1 dm, 1 cm i 1 mm. Učitelj na ploči treba prikazati dužinu duljine 1 m, te s učenicima u njihovim bilježnicama nacrtati dužine duljine 1 dm i 1 cm. Jedinične dužine od 1 mm učenici će promatrati na milimetarskom papiru, ravnalu ili trokutu, a dužine od 1 km će učitelj objasniti pomoću realnih situacija poput mjerenja cesta, željezničkih pruga itd. Potrebno je povezati duljinu dužine s pojmom dužine i naglasiti da je ono što se mjeri dužina, a ono što se mjerenjem doznaje je duljina dužine. Svaka dužina ima svoju duljinu koja se doznaje mjerenjem i zapisuje s dva znaka npr. 3 cm. Znak se sastoji od broja i oznake za veličinu jedinične dužine (Markovac, 2001). Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik drugog razreda procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.

U trećem razredu učenik određuje opseg likova i opisuje opseg kao duljinu ruba bilo kojeg geometrijskog lika. Opseg se prvo mjeri neformalnim načinima (koncem, vrpcom itd.), a zatim mjernim jedinicama. Učenici shvaćaju da je opseg zbroj duljina svih stranica mnogokuta. Učenici u trećem razredu određuju opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata pomoću zbroja duljina stranica, a ne formulom za opseg. Oznaka za opseg je o (MZO, 2019).

4.4. *Formiranje pojmova pravac i polupravac*

Formiranje pojma pravca započinje u trećem razredu zornom demonstracijom produljivanja dužine preko krajnjih točaka kako bi učenici razumjeli pojam beskonačnosti. Ovo učitelj može izvesti na više načina: pomoću vrpce, konopca ili konca, spajanjem učeničkih bilježnica s nacrtanim pravcima, produljivanjem pravca na ploči dokle se može i riječima: „A zamislite da ide još!“ itd. Pravac se dakle opisuje kao ravna, s obje strane neomeđena crta (Markovac, 2001). Pri upoznavanju pravca važno je naglasiti da se pravac ne može cijeli nacrtati, nego ga prikazujemo na dogovoreni način ravnim crtom (MZO, 2019). Demonstracije su samo osnovni materijal iz kojega se misaonom preradom izgrađuje pojam pravac. Bez perceptivnih podataka učenik bi zamisao ravne neomeđene crte usvojio samo formalistično i bez sadržaja pojma (Markovac, 2001).

Formiranje pojma polupravca se ostvaruje promatranjem pravca i jedne njegove točke na temelju čega se utvrđuju činjenice o polupravcu. Te činjenice se utvrđuju vježbanjem i ponavljanjem crtajući različite polpravce i objašnjavajući sadržaj crteža pomoću bitnih oznaka polupravca. Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik trećeg razreda opisuje i crta točku, dužinu, polpravac i pravac te njihove odnose. U trećem razredu također učenik prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima. Pravci mogu biti usporedni ili okomiti (pravci se sijeku). Učitelj učenicima pokazuje tračnice, prugu, usporedne ceste, raskrižja cesta i tramvajskih pruga kao zorne primjere međusobnih položaja pravaca (Markovac, 2001). Učenike se može tražiti da pokažu usporedne ili okomite bridove nekog geometrijskog tijela ili lika i da nabroje usporedne pravce u razredu (prozorske daske, bridove stolove itd.) (Liebeck, 1995). Bitna je preciznost crteža, a učitelj posebno treba obratiti pažnju na crtanje okomitih pravaca pomoću trokuta i ravnala ili dvaju trokuta. Još je bitno da učenici usvoje pripadnost odnosno nepripadnost točke pravcu (Markovac, 2001). Prema Kurikulumu (MZO, 2019), učenik trećeg razreda prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.

4.5. Formiranje pojmova ploha i ravnina

Formiranje pojma *površina* je neposredno povezano s formiranjem pojmova *ploha* i *ravnina*. U svakodnevnom govoru riječ površina se koristi i u smislu plohe, npr. zelene površine, no u matematici učenici trebaju razlikovati plohu koja je objekt od površine koja je mjera tog objekta (ploština). Ploha može biti ravna i zakrivljena, a ravnina je ravna neomeđena ploha.

Formiranje pojma *ploha* prema Kurikulumu (MZO, 2019) se ostvaruje u 1. razredu gdje se učenici u prvi put susreću s pojmovima ravne i zakrivljene plohe promatrajući ih na predmetima i geometrijskim tijelima, a pojmovi *ravnina* i *površina* prema Kurikulumu se ostvaruju u četvrtom razredu osnovne škole. U početku se plohe dodiruju dlanom i koristi se taktilni pristup, a zatim učenici mogu zatvoriti oči i opisati govorom što dodiruju. Uočavajući plohe na geometrijskim tijelima učenici istovremeno uočavaju geometrijske likove. U četvrtom razredu, učitelj bi trebao učenicima smjestiti riječ *površina* u svakodnevicu, prvo površinu kao plohu, a zatim kao mjeru, pitanjima: “Gdje u svakodnevnom životu koristimo riječ *površina*?” ili „Recite smislenu rečenicu koja u sebi sadrži riječ *površina*.“ Zatim, kod učenika je važno izgraditi spoznaju o plohi kao granici ili međi između predmeta i okoline. Ploha je ono što na

predmetima vidimo. Glavni oblici rada koje učitelj koristi su promatranje i demonstracija različitih ploha na predmetima u razredu i okolini, tj. vizualni pristup. Važno je da učenici upoznaju i položaje u prostoru. Učenici trebaju moći prepoznati i imenovati položaj pravca i ravnina u prostoru koji mogu biti *vodoravni*, *uspravni* i *kosi*.

Spoznaje o plohama su podloga za formiranje pojmova *ravnina* i *likovi u ravnini*. Promatranje je, i kod pojma ravnine, uporište za formiranje pojma kod učenika. Učenici promatraju sve veće i veće plohe te zamišljaju da se ta ploha neograničeno povećava. Učitelj može na ploči crtati nekoliko krugova s istim središtem koji imaju sve veći i veći polumjer, te na taj način pomoći učenicima u zamišljanju ravnine kao ravne neomeđene plohe. Učenici mogu i zamisliti bacanje kamenčića u vodu te kako krugovi na vodi postaju sve veći i veći. Likovi u ravnini se prikazuju crtanjem raznih likova u udžbeniku, bilježnici, ploči ili na papiru, te pitanjem: „Pripadaju li ovi likovi ravnini?“. Međusobni odnos točke i ravnine, te pravca i ravnine se također demonstrira raznim aktivnostima učitelja, a onda objektivira govorom. Na primjer, na površini stola učitelj nacrtava dvije točke koje pripadaju ravnini, a stoga toj ravnini pripada i pravac koji te točke određuje. Točke i pravac pripadaju ravnini. Nepripadnost pravca ravnini se predočuje pomoću tvrdog papira koji se probode iglom. Igla predstavlja pravac, a tvrdi papir ravninu. Pravac siječe tj. probada ravninu. Sve navedene aktivnosti je obavezno objasniti govorom (Markovac, 2001). Mjerenje dijelova plohe uključuje pojam površine.

5. Pojam površine

Površina, koja se naziva i ploština, je mjera dvodimenzionalnog skupa u ravnini ili prostoru, npr. trokuta. Površinu nije jednostavno matematički precizno definirati, osobito kada govorimo i o površinama likova omeđenih krivuljama. No, za matematiku u nižim razredima osnovne škole možemo se ograničiti na likove omeđene dužinama, tj. poligone (mnogokute). Definicija pojma površine poligona je sljedeća:

Neka je P skup svih poligona u ravnini, uključujući i prazan skup. Površina na skupu P je preslikavanje $p: P \rightarrow \mathbb{R}$ koje ima četiri osnovna svojstva površine iz kojih se mogu izvesti i sva ostala svojstva:

1. Površina je uvijek nenegativan broj
2. Ako je neki lik sastavljen od dijelova, onda je njegova površina jednaka zbroju površina tih dijelova

3. Sukladni likovi imaju jednake površine
4. Kvadrat sa stranicom duljine 1 ima površinu jednaku 1

(Kurnik, 2001)

Mjerne jedinice za površinu su mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 i km^2 . Osnovna mjerna jedinica za površinu je metar kvadratni m^2 (još se naziva kvadratni metar i četvorni metar). Učenici u drugom razredu usvajaju mjerenje duljine jediničnom dužinom, a u četvrtom razredu mjere površinu jediničnim kvadratom.

5.1. Formiranje pojma površina

Osnovni metodički put razvoja pojmova u nastavi matematike, koji je već prethodno opisan, je I-G-S-Z model. Učitelj slijedeći ovaj model osigurava lakše usvajanje apstraktnog pojma površine kod svojih učenika. Kod I-G-S-Z modela dolazi do lakšeg prijelaza s konkretnog na apstraktno tj. postupak apstrahiranja kod učenika je osiguran. Polazeći od iskustva učenici promatraju predmete u svojoj okolini i njihove plohe, a zatim govorom opisuju to iskustvo tj. je li ploha ravna ili zakrivljena. Slijedi promatranje slika tog iskustva u bilježnici, udžbeniku, ploči i dr. Za kraj se znakovima generalizira iskustvo. Kao što je već spomenuto, učenicima se pojam površine približuje raznim aktivnostima.

Pojam površine je apstraktan pojam koji je potrebno približiti učenicima raznim aktivnostima, koje bi se prema preporukama iz literature (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik 2001) mogle sažeti ovako:

- prikazivanjem pripadnosti likova, točke i pravca ravnini
- smještanjem pojma površina u učenikovu svakodnevnicu (kao plohe i kao mjere)
- promatranjem i demonstracijom različitih ploha na predmetima u okolini
- građenjem spoznaje o plohi kao granici ili međi između predmeta i okoline
- korištenjem kvadratne mreže
- mjerenjem površine

U sljedećim podnaslovima biti će prikazani razni načini uvođenja pojma površine i mjerenja površine.

5.2. Primjeri aktivnosti uvođenja pojma površine

Pojam površine se uvodi vizualnim i taktilnim pristupom gdje učitelj na sat donosi razne predmete i geometrijska tijela, te se na njima promatraju plohe. Učitelj s učenicima promatra razne geometrijske likove i uspoređuje plohe različite veličine: „Što je veće?“. Potiče učenike na razmišljanje pitanjima: „Kako ćemo precizno odrediti koji lik zauzima veći dio ravnine?“. Izrezuje s učenicima likove od kolaž papira ili tkanine. Također razgovara s učenicima o pojmu površine u svakodnevnom životu. Jedna od aktivnosti je aktivnost slaganja gdje učenik uzorke geometrijskih likova slaže jedne uz druge tako da pokrivaju određenu površinu poput pločica. Učenicima učitelj podijeli sukladne likove npr. krugove, kvadrate, pravokutnike i trokute. Zadatak je da geometrijske likove slože kao pločice i prekriju određenu površinu bez praznina. Učenici u ovoj aktivnosti uočavaju kako se neki likovi mogu složiti bez praznina, a neki ne mogu. Kada učenici slože određeni oblik treba ih se zamoliti da slože nekoliko različitih oblika od istog broja kvadrata ili trokuta. Na ovaj način učenici mogu shvatiti održavanje površine tj. da svi likovi imaju jednaku površinu iako su različiti (Liebeck, 1995).

Aktivnost za uvođenje mjernih jedinica za površinu je rad na milimetarskom papiru. Učenici prvo trebaju osvijestiti što znači mm, cm, a tek zatim pretvarati mjerne jedinice. Na milimetarskom papiru učenici s učiteljem uokvire kvadrat stranice 1 cm, 1 mm i 1 dm, te ih izrežu. Učitelj zatim prikazuje 1 m na podu ili panou. Na milimetarskom papiru prikazuju razne geometrijske likove i učenici broje kvadratiće unutar likova raznim tehnikama: jedan po jedan, grupiranjem, brojanjem po redcima ili stupcima. Odrediti površinu znači odrediti koliko kvadratića stane u nacrtani geometrijski lik. Do generalizacije se dolazi postupnim povećavanjem likova, a samim time i broja kvadratića koje učenici trebaju prebrojati. U slučaju pravokutnih površina učenici počinju množiti broj stupaca i redaka i na taj način računaju površinu. To je ujedno i zadnja faza kod usvajanja pojma površine jer se površina pravokutnika u praksi računa množenjem duljina stranica, a ne brojanjem jediničnih kvadrata. Po Kurikulumu (MZO, 2019), zadnja faza, gdje učenici množe duljine stranica kako bi dobili površinu, se ne spominje i ostavljena je za 5. razred. U nastavi matematike od 1. do 4. razreda se također ne uvodi formula za površinu.

5.3. Mjerenje površina

Mjerenje je određivanje bilo kakve veličine, količine ili iznosa u standardnim jedinicama i s pomoću sredstava za mjerenje. Mjeri se tako da se izabere jedinična veličina, tj. standardna jedinica, npr. jedinična površina. Površina se mjeri jediničnim površinama. Mjerne jedinice za površinu su mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 i km^2 . Osnovna mjerna jedinica za površinu je metar kvadratni m^2 . Konačni rezultat mjerenja je broj koji pokazuje koliko se puta jedinična površina nalazi u površini koja se mjeri. Česta pogreška učitelja je što se mjerenje površina svede na fizički čin mjerenja, a nedovoljno se uključuju misaone aktivnosti za razumijevanje mjerenja (Markovac, 2001). Mjerenje površina bi se trebalo izgrađivati polazeći od potreba stvarnog života i pomoću odgovarajućih aktivnosti. Postoje razne aktivnosti mjerenja površine, slijede neke od njih.

5.4. Primjeri aktivnosti mjerenja površine

Pred učenike bi trebalo staviti pravokutnike raznih veličina za koje se procjenom može reći koji je veći, a koji manji. Učenici promatraju pravokutnike, a učitelj ističe poveznicu između veličine površine i veličine stranica. Što su stranice veće, veća je i površina. Učenici prvo procjenjuju površinu. Zatim, pred učenike se postavljaju pravokutnici ispunjeni jediničnim kvadratima na kojima je teško procjenom utvrditi koji je veći ili manji. Učenici se pitaju kako doći do odgovora. Odgovor se nalazi u mjerenju površina pravokutnika i stvara se svijest kod učenika o potrebi mjerenja površina. Površinu mjere prebrojavajući jedinične kvadrate u prikazanom liku (Markovac, 2001). U već opisanoj aktivnosti slaganja učenici su brojili sukladne kvadrate ili trokute u raznim oblicima. Mjerili su površinu *proizvoljnim fizikalnim jedinicama*. Međutim, iako se površina može mjeriti brojem raznih likova koji se upotrebljavaju za slaganje najčešće se upotrebljavaju kvadrati kao jedinica za mjerenje. Kvadrati imaju površinu od jednog kvadratnog centimetra, oni su *kvadratni centimetri*. Postoje razne vježbe za mjerenje površine, a jedna od prvih bi trebala biti da izračunaju površinu likova nacrtanih na papiru podijeljenom na kvadratne centimetre. Učenicima učitelj mora naglasiti da svaki od tih kvadratića ima površinu od 1 kvadratnog cm (Liebeck, 1995). Sljedeća aktivnost mjerenja se odnosi na računanje površina četverokuta kako bi učenici uočili vezu između duljine, širine i površine svakog pravokutnika. Učenici za svaki prikazani pravokutnik (neki su iscrtani na kvadratiće, a neki nisu) trebaju popuniti tablicu: duljina, širina i površina. Rješavanjem ove vježbe učenici mogu shvatiti da se površina prikazanih pravokutnika može izračunati tako da se pomnoži broj kvadratića u jednom redu s brojem redova (Liebeck, 1995).

Ovo je bitno da učenici usvoje jer je to preduvjet za kasnije računanje površine pravokutnih površina množenjem duljina stranica. Aktivnosti koje pomažu učenicima osvijestiti mjerenje površine su također aktivnosti popločavanja, prekrivanja, postavljanja pločica i bojanja zida. Pretvaranje mjernih jedinica za površinu se kod učenika ostvaruje samostalnim istraživanjem raznim zadacima koje učitelj postavlja pred njih. Učenici prebrojavaju koliko cm^2 stane u 1 dm^2 . Pomoću navedenih aktivnosti učitelj može učenicima olakšati usvajanje ovog apstraktnog i složenog matematičkog pojma. Kurikulum također sadrži preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda usvajanja pojma površine (MZO, 2019).

6. Pojam površine u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike za osnovne škole

Pojam površine u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (MZO, 2019) dio je dvije domene: C-Oblik i prostor i D-Mjerenje. Domena Oblik i prostor (C) dio je geometrije koji se bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa, a u domeni Mjerenje (D) usvajaju se standardne mjerne jedinice za razne pojmove, pa tako i za površinu. Površina kao pojam se u Kurikulumu prvi put spominje u četvrtom razredu osnovne škole u domeni D-Mjerenje. Ishod u kojem se spominje je sljedeći: MAT OŠ D.4.2. Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima. U razradi ishoda se vidi na što se sve navedeni ishod odnosi:

- učenik će u ravnini uspoređivati likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznavati pojam površine,
- učenik će mjeriti površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži prebrojavanjem kvadrata,
- učenik će u kvadratnu mrežu ucrtavati likove zadane površine,
- učenik će mjeriti površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom,
- učenik će upoznati standardne mjere za površinu (centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni),
- učenik će mjeriti pravokutne površine u neposrednoj okolini.

Sadržaj ovog ishoda je mjerenje površine, kvadratna mreža i mjerne jedinice za površinu, a prošireni sadržaj je preračunavanje mjernih jedinica.

6.1. *Domena Oblik i prostor i domena Mjerenje*

Domene Oblik i prostor i Mjerenje su domene koje se odnose na geometrijske sadržaje i stoga su posebno važne za pojam površine. Domene povezuju srodne koncepte i nedjeljive su, a to se ogleda i kod navedene dvije domene. Usvojenost konceptata domene Oblik i prostor je pretpostavka za usvajanje konceptata domene Mjerenje, i obrnuto. Domena oblik i prostor je fokusirana na razvijanje prostornog zora kod učenika kako bi razvili sposobnost misaone predodžbe objekta i prostornih odnosa. To se postiže rastavljanjem i sastavljanjem oblika te usporedbom njihovih svojstava i uspostavljanjem veza među njima. Upravo iz uočenih svojstava i odnosa izvode se pretpostavke i tvrdnje. Tvrdnje se zatim dokazuju crtežima i algebarskim izrazima. Učenici će koristiti geometrijski pribor, te istraživati i primijenjivati geometrijska svojstva. Znat će prepoznati razne oblike u ravnini i prostoru, uočiti njihova svojstva, te ih upotrebljavati za opis i analizu svoje okoline. U domeni Mjerenje učenici procjenom, mjerenjem, preračunavanjem i računanjem raznih veličina određuju mjerljiva obilježja oblika. Mjeri se upotrebom odgovarajućeg alata, a rezultati se izražavaju u dogovorenoj jedinici mjere. Mjerenje je bitno povezati sa svakodnevnim životom učenika kako bi mogli prepoznati obilježja oblika u ravnini i prostoru, te ih koristiti pri opisu i analizi svoje okoline (MZO, 2019).

6.2. *Zastupljenost domena C i D po razredima*

Domene Oblike i prostor i Mjerenje su različito zastupljene po razredima od prvog do četvrtog. U prvom razredu osnovne škole domene su zastupljene sljedećim redoslijedom (od najzastupljenije do najmanje zastupljene):

- Brojevi (A)
- Oblik i prostor (C)
- Algebra i funkcije (B) i Mjerenje (D) - jednako zastupljene domene
- Podatci, statistika i vjerojatnost (E)

Domena C je na drugom mjestu po zastupljenosti i sastoji se od tri ishoda: izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okružju, crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte, prepoznaje i ističe točke. Domena D je na trećem mjestu i jednako je zastupljena kao domena B. Sastoji se od dva ishoda, no samo se jedan odnosi na geometrijske sadržaje: analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu. U drugom razredu

osnovne škole domene su zastupljene sljedećim redoslijedom (od najzastupljenije do najmanje zastupljene):

- Brojevi (A)
- Mjerenje (D)
- Algebra i funkcije (B), Oblik i prostor (C) i Podatci, statistika i vjerojatnost (E) - jednako zastupljene domene

Domena C je na trećem mjestu po zastupljenosti, kao i domene B i E, i sastoji se od dva ishoda: opisuje i crta dužine, povezuje poznate geometrijske objekte. Domena D je na drugom mjestu i sadrži tri ishoda, no samo se jedan odnosi na geometrijske sadržaje: procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine. U trećem razredu osnovne škole domene su zastupljene sljedećim redoslijedom (od najzastupljenije do najmanje zastupljene):

- Brojevi (A)
- Mjerenje (D)
- Oblik i prostor (C)
- Algebra i funkcije (B) i Podatci, statistika i vjerojatnost (E) - jednako zastupljene domene

Domena C je na trećem mjestu po zastupljenosti i sastoji se od tri ishoda: opisuje i crta točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose, prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima, služi se šestarom u crtanju i konstruiranju. Domena D je na drugom mjestu i sadrži četiri ishoda i sva četiri se odnose na geometrijske sadržaje: procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine, procjenjuje i mjeri masu tijela, određuje opseg likova, procjenjuje i mjeri volumen tekućine (MZO, 2019). U četvrtom razredu osnovne škole domene su zastupljene sljedećim redoslijedom (od najzastupljenije do najmanje zastupljene):

- Oblik i prostor (C)
- Brojevi (A)
- Mjerenje (D) i Podatci, statistika i vjerojatnost (E) - jednako zastupljene domene
- Algebra i funkcije (B)

Domena C je na prvom mjestu po zastupljenosti i sastoji se od pet ishoda: određuje i crta kut, razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut, Opisuje i konstruira krug i njegove elemente, crta i konstruira geometrijske likove, povezuje sve poznate geometrijske oblike. Domena D je na trećem mjestu, kao i domena E, i sadrži dva ishoda te se oba odnose na geometrijske sadržaje: procjenjuje i mjeri volumen tekućine, uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima (MZO, 2019). Domena C je najzastupljenija

u prvom i četvrtom razredu kada se i usvaja pojam površine kao dio domene D. Domena D je najzastupljenija u drugom i trećem razredu.

7. Pojam površine u udžbenicima razredne nastave matematike

Pojam površine u udžbenicima razredne nastave matematike se pojavljuje u udžbenicima četvrtog razreda. Ovaj matematički pojam se u udžbenicima pojavljuje na različite načine - drugačijim redosljedom, aktivnostima, ilustracijama, metodičkim postupcima itd. Udžbenici razredne nastave matematike su podloga učiteljima u svakodnevnom poučavanju jer nude što će učitelj podučavati, na koji način, te razne tipove zadataka koje će učenici rješavati (Vidić i sur., 2018). Stoga je učiteljima važno znati na koji je način matematički pojam poput pojma površine predstavljen u raznim udžbenicima kako bi znali odabrati i prilagoditi širinu i dubinu sadržaja, osmisliti metode i strategije, te ih prilagoditi potrebama, mogućnostima i interesima svojih učenika (MZO, 2019). U nastavku će biti opisani načini na koje je pojam površine uveden u pet različitih udžbenika matematike.

7.1. Udžbenici nastave matematike

Udžbenik je nastavno sredstvo koje posreduje između Kurikuluma i poučavanja u učionici. Za neke učitelje je nastavno sredstvo koje stalno aktivno koriste i koje im daje samopouzdanje pri podučavanju, dok je za druge samo pomoćno sredstvo (Vidić i sur., 2018). Mnogi učitelji čak potpuno odbacuju udžbenike i sami osmišljavaju sve aktivnosti koje realiziraju na satu. Ova idealizacija profesionalne autonomije vodi k pogledu da je dobar učitelj samo onaj koji se ne oslanja na udžbenike. Međutim, to nije točno. Dobar učitelj zapravo prepoznaje razne koristi udžbenika i proširuje njegov sadržaj svojim idejama (Ma, 2010). Neovisno koliko se učitelj oslanja na udžbenike oni svakako imaju iznimno važnu ulogu jer utječu na način i sadržaj poučavanja. Neki od faktora koji utječu na kvalitetu udžbenika su: kreativnost, raznovrsnost i količina zadataka, ilustracije i metodički postupak (Vidić i sur., 2018).

Istraživanje koje su proveli Vidić i suradnici (2018) pokazalo je da su učitelji u Republici Hrvatskoj zadovoljni udžbenicima za matematiku. Učitelji su samo istaknuli kako u udžbenicima nedostaje veći broj raznovrsnih zadataka. Udžbenici imaju neosporan autoritet i utječu na nastavu matematike, no ipak nastava ovisi o učitelju i njegovoj interpretaciji

udžbenika. Učitelj određuje koji će se udžbenik koristiti, kada i kako, koji dijelovi udžbenika i kojim redosljedom, te kako i koliko će učenici raditi s udžbenikom (Glasnović Gracin & Domović, 2009). Neovisno o iscrpnosti pripreme koju učitelj napravi nijedan matematički udžbenik ne može početi tamo gdje bi trebao, a to su po I-G-S-Z modelu, iskustvo i govorni jezik. Matematički udžbenik isključivo obuhvaća samo posljednja dva slijeda spomenutog I-G-S-Z modela, a to su slike i znakovi (Liebeck, 1995). Stoga, najbitnija komponenta nastavnog sata matematike je nastavnik matematike, a njemu je uz načela, oblike i metode nastave matematike bitno pribrojiti dobre udžbenike. Postoje mnogi udžbenici razredne nastave matematike, a na učitelju je da odabere onaj koji najviše odgovara njemu i njegovim učenicima.

7.2. Prikaz početnih aktivnosti i zadataka za uvođenja pojma površine u udžbenicima

Pojam površine se dakle u udžbenicima pojavljuje u četvrtom razredu osnovne škole. Većina udžbenika se sastoji od dva dijela, te se u većini pojam površine pojavljuje u drugom dijelu. Najčešće se u prvom dijelu udžbenika uvodi pojam ravnine koji je bitan za usvajanje pojma površine. Međutim, po novom Kurikulumu (MZO, 2019) pojam ravnine se ne spominje već se umjesto tog pojma preporuča korištenje izraza *ravna ploha*, a problem nastaje kada učitelj s učenicima dođe do pojma kuta kada je potrebno da učenici već poznaju riječ *ravnina*. Mnogi autori udžbenika uvode riječ *ravnina* neovisno o Kurikulumu uz pojam kružnice ili kuta. U sljedećim primjerima udžbenika prikazani će biti samo početni zadaci, oni kojima udžbenici započinju uvođenje pojma površine. Prvo će biti prikazan jedan zadatak/aktivnost uvođenja pojma ravnine, a zatim par zadataka/aktivnosti uvođenja pojma površine. Pojam površine se kod nekih udžbenika uvodi tek kod mjerenja površine te će ti zadaci biti prikazani u sljedećem podnaslovu. Udžbenicima, koji prije pojma površine uvode kvadratnu mrežu, će prvo biti prikazani zadatci s kvadratnom mrežom.

Udžbenici su redom prikazivanja sljedeći:

1. Otkrivamo matematiku 4 – 1. i 2. dio (Glasnović Gracin i sur., 2021a, 2021b),
2. Nina i Tino 4 – 1. i 2. dio (Lončar i sur., 2021),
3. Super matematika za prave tragače 4 – 1. i 2. dio (Martić i sur., 2021),
4. Moj sretni broj 4 (Jakovljević Rogić i sur., 2021),
5. Matematička mreža 4 (Cindrić i sur., 2021).

1. Otkrivamo matematiku 4, 1. dio.

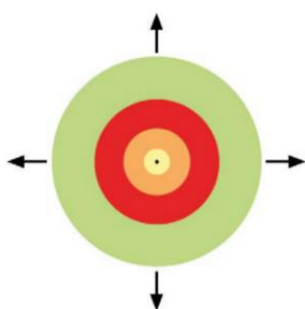
Pojam ravnine se prvi put spominje i uvodi pod naslovom *Kružnica, krug, polumjer*. Učenici imaju zadatak izrezivati krugove od kolaž papira različitih polumjera. Zadatak je prikazan na slici 1.

Slika 1.

Pojam ravnine



6. Izreži od kolaž-papira krugove koji imaju različite duljine polumjera. Postavi ih kao na slici tako da imaju zajedničko središte.



Zamisli da dodaješ sve veće i veće krugove i da tome nema kraja.

Na taj se način ravna ploha sve više i više povećava sa svih strana. Takvu ravnu plohu koja nije omeđena nazivamo **ravnina**.



Ravninu zamišljamo kao ravnu neomeđenu plohu.

Preuzeto iz Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (1. dio) (85. str.), D. Glasnović Gracin i sur., 2021a, Alfa.

1. Otkrivamo matematiku 4, 2. dio.

Pojam površina se prvi put spominje pod naslovom *Površina*. Zatim slijede naslovi: *Mjerenje površine, Mjerne jedinice za površinu*, te prošireni sadržaj pod naslovom *Koliko u metru kvadratnom ima decimetara kvadratnih?* Pojam površine se uvodi zanimljivim zadatkom gdje učenici uspoređuju veličine sagova sa slike. Zamišljanjem prekrivanja poda učionice sagovima raznih površina učenici shvaćaju koji sag ima veću/manju površinu i da to znači da prekriva više/manje poda učionice. Zadatak je prikazan na slici 2.

Slika 2.

Pojam površine

1. Učenici su uštedjeli novac i odlučili kupiti sag za svoju učionicu. Što misliš, koji će sag prekriti više poda? Procijeni i dodijeli sagovima redne brojeve počevši od onog koji će prekriti najviše poda.



Što misliš, što znači kada kažemo da „plavi sag ima veću površinu od zelenog“?

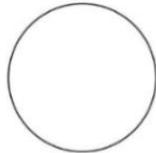
Preuzeto iz *Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (22. str.)*, D. Glasnović Gracin i sur., 2021b, Alfa.

Sljedeći zadatak omogućuje učenicima građenje spoznaje o crti kao granici ili međi geometrijskog lika. Zadatak potiče na razgovor o rubu (okviru) pravokutnika i pravokutniku koji je obojan. Ilustracija jasno prikazuje obojanu površinu geometrijskog lika, te dvije djevojčice koje drže kružnicu i krug prikazujući jasnu razliku između ta dva pojma. Zadatak je prikazan na slici 3. Slijede zadaci gdje učenici imenuju što se nalazi na slici i zaokružuju ono što ima površinu, spajaju koje se slike odnose na opseg i koje na površinu, crtaju zadane geometrijske likove i različitim bojicama bojjaju opseg i površinu.

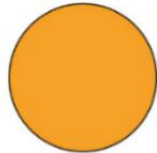
Slika 3.

Pojam površine

2. Pogledaj slike i objasni razliku između geometrijskog lika i crte koja ga omeđuje.



KRUŽNICA



KRUG



RUB PRAVOKUTNIKA
(OKVIR)

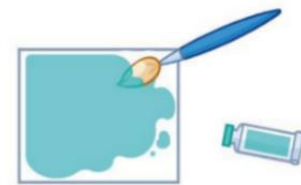


PRAVOKUTNIK



Kod geometrijskih likova možemo mjeriti koliki dio ravnine oni prekrivaju.

Kažemo: geometrijski likovi imaju **površinu**.



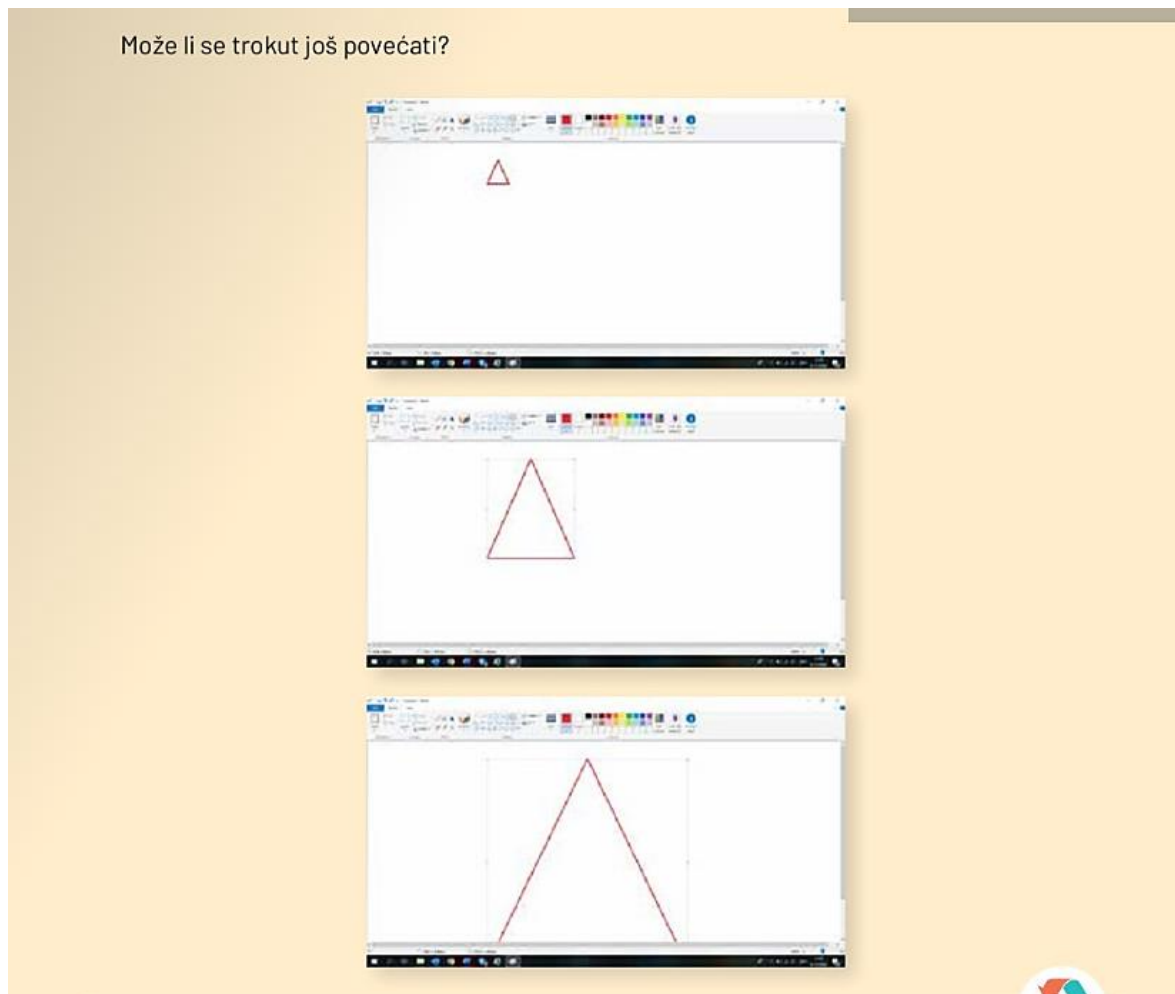
Preuzeto iz Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (22. str.), D. Glasnović Gracin i sur., 2021b, Alfa.

2. Nina i Tino 4, 1. dio.

Pojam ravnine se prvi put spominje i uvodi pod naslovom *Ravnina, što je to?*. Zadatak je prikazan na slici 4, a ispod se nalazi objašnjenje iz udžbenika. Ploha programa paint uspoređena je s ravninom jer se može povećavati gotovo beskonačno. Objašnjenje zadatka je na slici 5.

Slika 4.

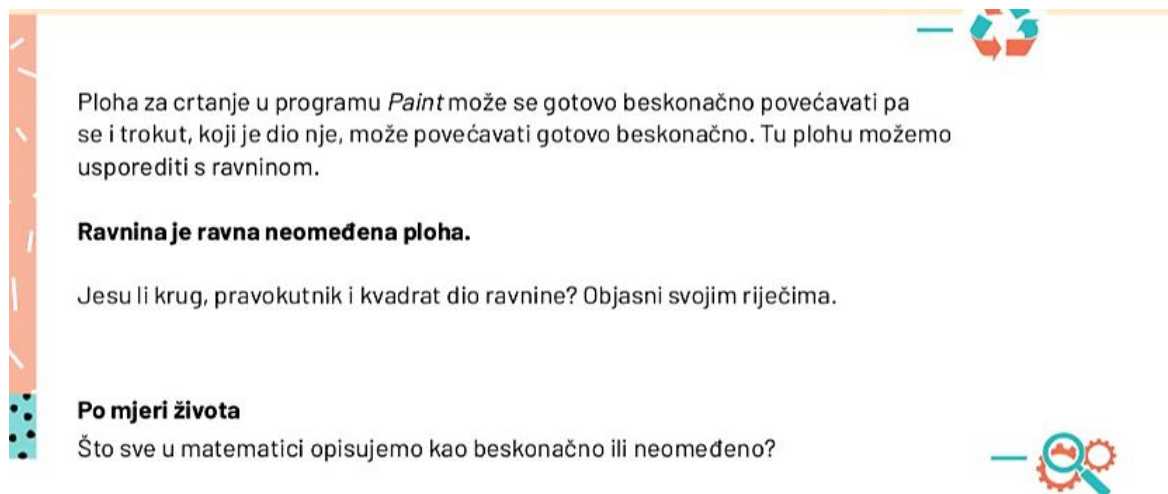
Pojam ravnine



Preuzeto iz Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (1. dio) (124.str.), L. Lončar i sur., 2021a, Profil Klett.

Slika 5.

Pojam ravnine-objašnjenje zadatka



Ploha za crtanje u programu *Paint* može se gotovo beskonačno povećavati pa se i trokut, koji je dio nje, može povećavati gotovo beskonačno. Tu plohu možemo usporediti s ravninom.

Ravnina je ravna neomeđena ploha.

Jesu li krug, pravokutnik i kvadrat dio ravnine? Objasni svojim riječima.

Po mjeri života
Što sve u matematici opisujemo kao beskonačno ili neomeđeno?

The image shows a screenshot of a math lesson page. On the left, there is a vertical orange bar with white dashed lines and a small icon of a person. On the right, there is a small icon of a recycling symbol. The text is in a clean, sans-serif font. The page is titled 'Slika 5. Pojam ravnine-objašnjenje zadatka'. The main text explains that a drawing area in Paint can be enlarged almost infinitely, just like a triangle that is part of it. It then defines a plane as a flat, unbounded surface. A question asks if a circle, rectangle, and square are parts of a plane, and asks for an explanation. A section titled 'Po mjeri života' (By the measure of life) asks what in mathematics is described as infinite or unbounded. On the right side of the page, there is a small icon of a magnifying glass over a gear.

Preuzeto iz *Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (1. dio)* (124.str.), L. Lončar i sur., 2021a, Profil Klett.

2. Nina i Tino 4, 2.dio.

U cjelini *Mjerenje* slijede naslovi vezani uz pojam površine, a to su *Kvadratna mreža* i *Mjerenje površina*. Pojam površine se prvi put spominje pod naslovom *Mjerenje površina* i biti će prikazan u sljedećem podnaslovu. Pod naslovom *Kvadratna mreža* u početnom zadatku učenici trebaju obojiti kvadrate u kvadratnoj mreži kako bi pas došao do kosti. S lijeve strane kvadratne mreže se nalaze upute kretanja. Prije uvođenja pojma površine uvodi se kvadratna mreža. Zadatak je prikazan na slici 6.

Slika 6.

Kvadratna mreža

Prati upute i oboji kvadrate kojima se pas treba kretati da bi došao do kosti.

10										🎯
9		🍏								
8										
7	🥕									
6										
5									🍖	
4				🍋						
3										
2										
1	🐕					🍌				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

- 5x ↑
- 3x →
- 4x ↑
- 2x →
- 8x ↓
- 1x →
- 3x ↑
- 3x →

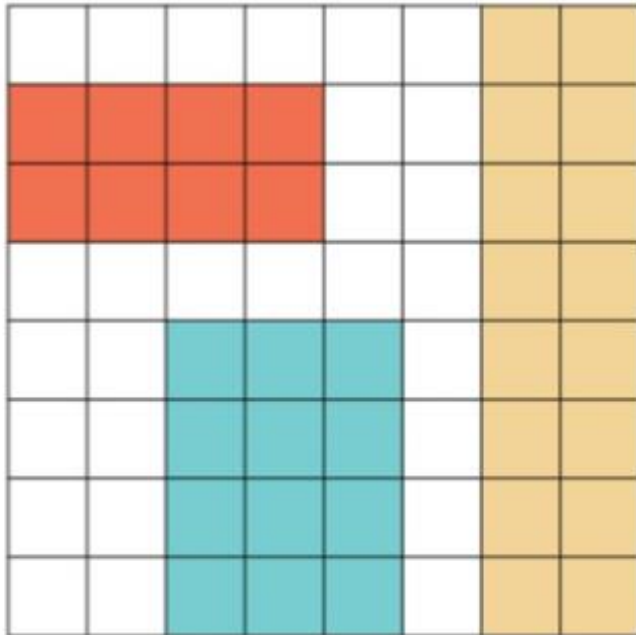
Preuzeto iz *Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio)* (114.str.), L. Lončar i sur., 2021b, Profil Klett.

U sljedećem zadatku (slika 7) učenici trebaju prepoznati geometrijske likove u kvadratnoj mreži i prebrojati jedinične kvadrate od kojih se ti likovi sastoje. U zadacima koji slijede učenici trebaju prebrojavati jedinične kvadrate raznih likova u kvadratnoj mreži, te ucrtavati različite likove u kvadratnu mrežu.

Slika 7.

Kvadratna mreža

- 1.** Koje likove prepoznaješ u kvadratnoj mreži?
Sastoje li se od jednakoga broja kvadrata?



Odgovori: _____

Preuzeto iz Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (115.str.), L. Lončar i sur., 2021b, Profil Klett.

3. Super matematika za prave tragače 4, 1. dio.

Pojam ravnine se prvi put spominje i uvodi pod naslovom *Od točke do kuta*. Ravnina je prikazana pomoću geografske karte. Zadatak je prikazan na slici 8.

Slika 8.

Kvadratna mreža

Ravninu zamišljamo kao ravnu neomeđenu plohu. Ravni list papira u tvojoj bilježnici ili mapi predočavamo kao dio ravnine na kojoj pišemo i crtamo. U ravnini crtamo i geografske karte.



Luka i Ivan uočavaju gradove na geografskoj karti RH. Luka je odlučio povući ravnu crtu od Zagreba prema Sisku i dalje.

Ivan će povući ravnu crtu od Zagreba prema Bjelovaru i dalje. Pomozi im i ucrtaj njihove ravne crte.

Kako se zovu nacrtane crte?
Nacrtani su polupravci. Polupravac je dio ravnine.

Osjenčaj olovkom dio između nacrtanih polupravaca.

Preuzeto iz Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (1. dio) (94. str.), M. Martić i sur., 2021, Profil Klett.


3. Super matematika za prave tragače 4, 2. dio.

Pojam površine se prvi put spominje pod naslovom *Kako se mjeri površina?* (*Mjerenje površine*). Naslovi vezani uz pojam površine redom pojavljivanja u udžbeniku su: *Kvadrat po kvadrat* (*Kvadratna mreža*), *Kako se mjeri površina?* (*Mjerenje površine*), te zatim *Ponavljanje* (*Mjerenje površine*). Kvadratna mreža se uvodi prikazom igre sudoku (slika 9). Kasnije slijedi prikaz kvadratne mreže i prikaz kvadratne mreže s ucrtanim raznim likovima.

Slika 9.

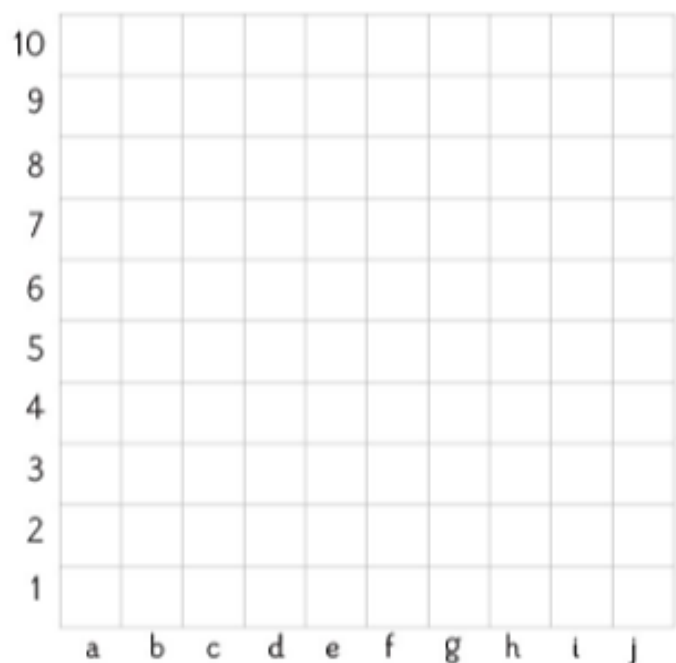

Kvadratna mreža

Kira igra sudoku za početnike. Znaš li što je sudoku?



Sudoku je igra u kojoj se trebaju popuniti polja tako da se lik ili broj pojavljuju samo jednom u svakome retku ili stupcu.

Koji su geometrijski likovi ucrtani u ovoj sudoku?



Nacrtna je **KVADRATNA MREŽA**.
Koliko jednakih kvadrata uočavaš u mreži?

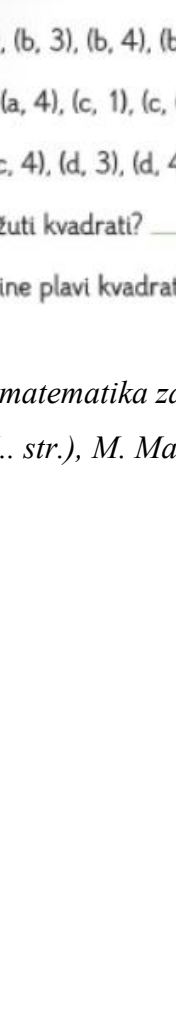
Preuzeto iz *Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (114. str.)*, M. Martić i sur., 2021, Profil Klett.

U prvom zadatku učenici trebaju obojati kvadrate koju su zadani, te odrediti koje likove čine obojani kvadrati (slika 10). Zatim slijede zadaci u kojima moraju odrediti od koliko se kvadrata sastoji pravokutnik u kvadratnoj mreži, ucrtati veći pravokutnik, riješiti zadani sudoku, zapisati koja su polja obojena u kvadratnoj mreži itd.

Slika 10.

Kvadratna mreža

1 Oboji kvadrate (polja) kako je zadano.



zeleno: (b, 2), (b, 3), (b, 4), (b, 5), (c, 2), (c, 5), (d, 2), (d, 5), (e, 2), (e, 3), (e, 4), (e, 5)

plavo: (a, 3), (a, 4), (c, 1), (c, 6), (d, 1), (d, 6), (f, 3), (f, 4)

žuto: (c, 3), (c, 4), (d, 3), (d, 4)

Koji lik čine žuti kvadrati? _____

Koje likove čine plavi kvadrati? _____

Preuzeto iz Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (116.. str.), M. Martić i sur., 2021, Profil Klett.

4. Moj sretni broj 4.

Pojam ravnine se prvi put spominje pod naslovom *Ravnina*. Učenici zamišljaju da ravan list papira počne rasti u svim smjerovima unedogled (slika 11). Neomeđena ravna ploha je ravnina. Spominje se pripadnost točke, crte i likova ravnini. Slijede zadaci gdje se učenika pita što sve pripada ravnini – nacrtani trokuti, stranica udžbenika, razni likovi i dr.

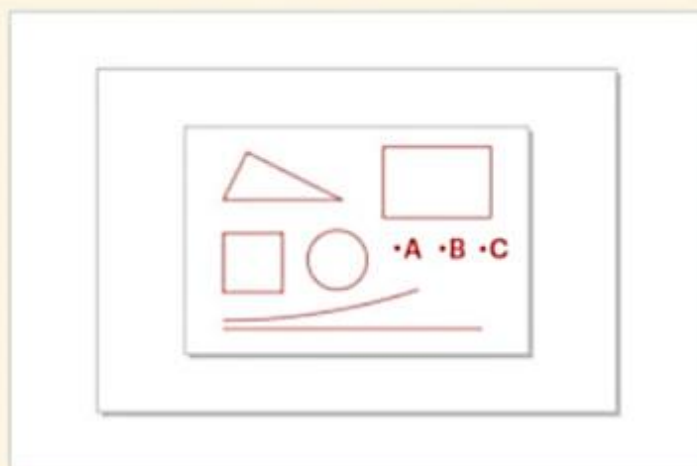
Slika 11.

Pojam ravnine

Zamisli da ravan list papira koji se nalazi na tvom stolu odjednom počne rasti u svim smjerovima i postane velik kao ploha stola na kojem se nalazi. Zatim se širi na hodnik pa izvan škole i nastavi beskonačno rasti unedogled.

Zamisli neomeđenu ravnu plohu koju zovemo **ravnina**.

Ravninu u svakodnevnom životu predočavamo ravnim plohom stola, ravnim plohom školske ploče, ravnim listom papira... Te su plohe ograničene, no kad predstavljaju ravninu, zamišljamo da se prostiru dalje u svim smjerovima.



U ravnini **crta**mo točke, crte i likove.

Sve što je nacrtano u nekoj ravnini **pripada** toj ravnini.

Može li se kocka ili kugla nalaziti u ravnini?



Ravninu zamišljamo kao ravnu plohu koja se širi na sve strane, a predočavamo je ravnim zidom, ravnim pločom, ravnim papirom...

Kad nešto nacrtamo na papiru, onda to pripada ravnini određenoj tim papirom.

Navedi još nekoliko primjera iz svog okruženja kojima bismo mogli predočiti neograničenu ravnu plohu – ravninu.

Preuzeto iz Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (30. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

Pojam površine se prvi put javlja pod naslovom *Mjerenje površine*. Slijede naslovi: *Površina pravokutnika i kvadrata*, *Mjerne jedinice za površinu*, *Preračunavanje mjernih jedinica za površinu*. U početnoj aktivnosti pod naslovom *Mjerenje površine* učenici promatraju prozore i uspoređuju njihovu veličinu tj. površinu (slika 12). Zatim se promatra travnjak na koji stane određeni broj jediničnih kvadrata duljine stranice 1 dm i učenici moraju to provjeriti koristeći pripremljene jedinične kvadrate od papira (slika 13). Uvodi se i oznaka za površinu.

Slika 12.

Pojam površine

Zaokruži najveći prozor.
Prekriži najmanji prozor.



Preuzeto iz Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (98. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

Slika 13.

Pojam površine

Da bismo procijenili koji su prozori veći ili manji od drugih prozora, dovoljno ih je samo promotriti. No, da bismo točno znali kolika je veličina nekog prozora, trebamo IZMJERITI ili IZRAČUNATI njegovu POVRŠINU.

Površinu mjerimo prekrivajući je **jediničnim kvadratima**. Jedinični kvadrat može biti bilo koji kvadrat kojime mjerimo površinu.

Mjerenjem površine saznajemo koliko jednakih jediničnih kvadrata stane u neki prozor, u neka vrata, na neki pod, na neko igralište... Znak za površinu je veliko slovo *P*.

Kvadrati koje si pripremio/pripremila na nastavi likovnoga neka budu tvoji jedinični kvadrati. Izmjeri površinu dijela travnjaka jediničnim kvadratima različitih veličina i zapiši je.

Na travnjak stane ___ jedinični kvadrat duljine stranica 1 dm.

$P =$ ___ jedinični kvadrat duljine stranica 1 dm

Na travnjak stanu ___ jedinična kvadrata duljine stranica 5 cm.

$P =$ ___ jediničnih kvadrata duljine stranica 5 cm

Kojim bismo još jediničnim kvadratima mogli izmjeriti površinu travnjaka na slici?



_____ prozora, vrata, travnjaka... mjerimo prekrivanjem jediničnim kvadratima.

Preuzeto iz *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (98. str.)*, S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

5. Matematička mreža 4.

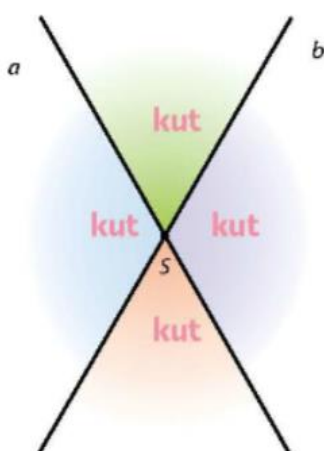
Pojam ravnine je uveden pod naslovom *Kut*. Stranice u bilježnici i školska ploča su opisani kao dio ravnine. Ravnina je opisana rečenicama. Na ilustraciji se nalazi prikaz dva ukrštena pravca koja dijele ravninu na četiri dijela koja su obojena različitim bojama (slika 14).

Slika 14.

Pojam ravnine

Stranica u tvojoj bilježnici kao i školska ploča jesu dijelovi ravnine.

Ravnina je ravna neograničena ploha. Pravac je ravna neograničena crta.



Dva ukrštena pravca dijele ravninu na četiri dijela. Svaki taj dio ravnine zovemo **kut**.

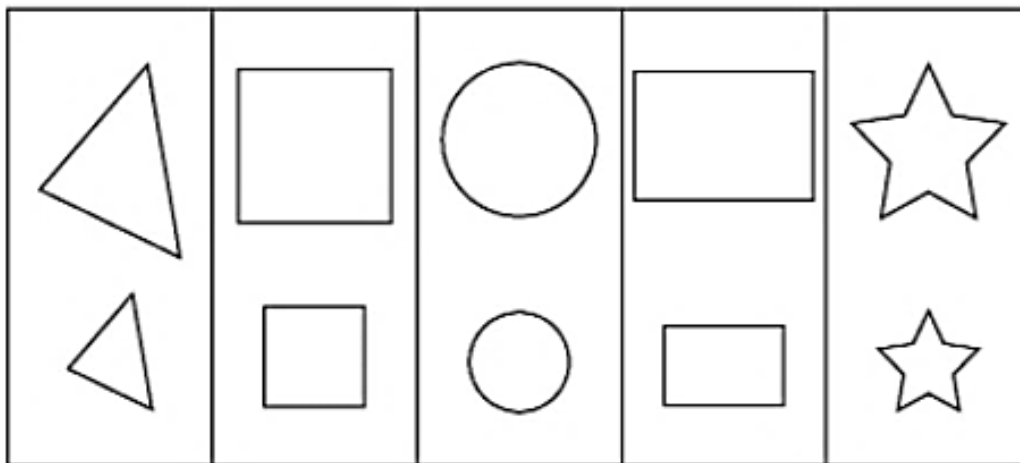
Preuzeto iz Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (32. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

Pojam površine je uveden pod naslovom *Površina lika*. Slijede naslovi: *Kvadratna mreža, Mjerne jedinice za površinu, Mjerenje površine pravokutnika i kvadrata*. Početna aktivnost je obojati veće likove zeleno, a manje žuto (slika 15). Veći likovi zauzimaju veći dio ravnine i stoga imaju veću površinu. Uvedena je oznaka za površinu.

Slika 15.

Pojam površine

Veći lik oboji zeleno, a manji žuto.



Likovi su dio ravnine. Svaki lik zauzima određeni dio ravnine.

Veći lik zauzima veći dio ravnine. Kažemo da on ima **veću površinu**.

Manji lik zauzima manji dio ravnine, pa kažemo da ima **manju površinu**.

Zeleni likovi imaju _____ površinu od žutih likova.

Žuti likovi imaju manju _____ od zelenih likova.

Površinu u matematici označavamo slovom *P*.

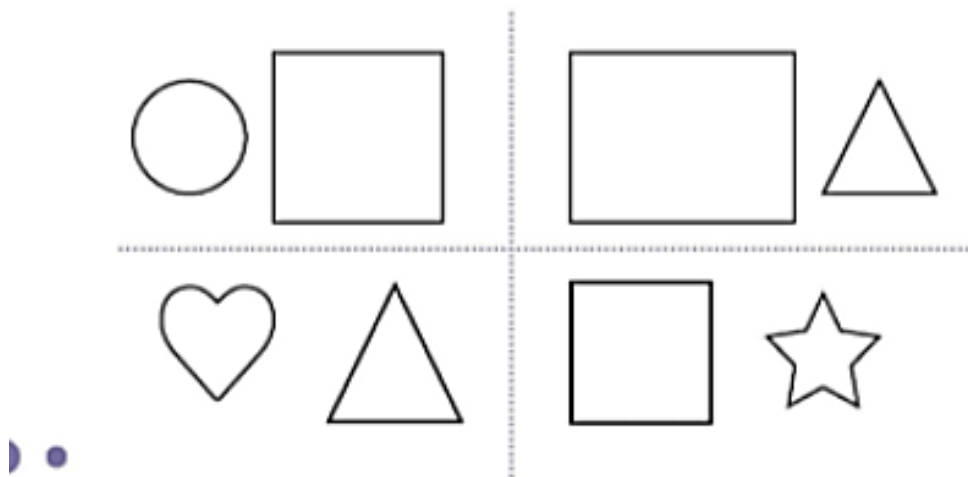
Preuzeto iz Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (94. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

U prvom zadatku učenici trebaju zaokružiti lik koji ima veću površinu (slika 16). Slijede zadaci gdje moraju zaokružiti predmet koji ima manju površinu, usporediti površinu stranice udžbenika s površinom stranice udžbenika prijatelja, nacrtati likove manjih ili većih površina od prikazanih likova, nacrtati tri kruga sa zajedničkim središtem itd.

Slika 16.

Pojam površine

► 1. Koji od nacrtanih likova ima veću površinu? Zaokruži ga.



Preuzeto iz *Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole* (94. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

7.3. Prikaz početnih aktivnosti i zadataka za mjerenje površine u udžbenicima

Mjerenje površine se kod udžbenika koji se sastoje od dva dijela nalazi u drugom dijelu. Mjerenje površine se u većini udžbenika pojavljuje nakon uvođenja pojma površine. U nekim udžbenicima je pretvaranje mjernih jedinica za površinu prošireni sadržaj, u nekim je dio osnovnog sadržaja usvajanja pojma površine, a u nekima ga uopće nema. Kvadratna mreža je osnova na kojoj učenici uče mjeriti površinu i uvodi se prije samog mjerenja površine mjernim jedinicama za površinu. Udžbenici su prikazani istim redoslijedom kao u prethodnom podnaslovu.

1. Otkrivamo matematiku 4, 2. dio udžbenika.

Pod naslovom *Mjerenje površine* se nalazi zadatak u kojem su prikazani djevojčica i dječak koji kvadratima od kolaž papira prekrivaju površinu kvadratne mreže. Ovdje se prvi put uvodi kvadratna mreža koja je bitan preduvjet za mjerenje površine. Zadatak je na slici 17.

Slika 17.

Kvadratna mreža

1. Pogledaj sliku.



Opiši što učenici rade. _____

Tko će za cijelu svoju sliku upotrijebiti više kvadratića? _____

Oboji preostale kvadrate tako da dobiješ lijepu sliku potpuno prekrivenu kvadratićima u boji.

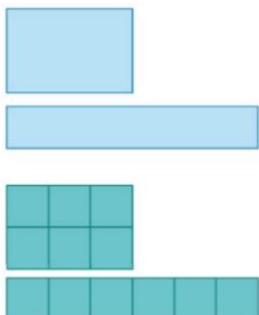
Preuzeto iz Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (24. str.), D. Glasnović Gracin i sur., 2021b, Alfa.

Kvadratna mreža se kasnije raznim zadacima utvrđuje. Učenici prekrivaju površine likova jediničnim kvadratima, kao na slici 18. U zadacima koji slijede učenici zapisuju broj jediničnih kvadrata u pravokutnicima, crtaju u kvadratnoj mreži pravokutnike određene površine (u jediničnim kvadratima), određuju koliku površinu kvadratne mreže prekrivaju obojeni kvadrati itd.

Slika 18.

Kvadratna mreža

2. Ivan želi saznati koji pravokutnik ima veću **površinu**. Pogledaj kako se snašao i objasni njegovu ideju.



Prvi pravokutnik prekrili smo sa _____ kvadrata.

Drugi pravokutnik prekrili smo sa _____ kvadrata.

Što možeš reći o površinama ovih dvaju pravokutnika?

Preuzeto iz Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (24. str.), D. Glasnović Gracin i sur., 2021b, Alfa.

Pod naslovom *Mjerne jedinice za površinu* uvode se mjerne jedinice za površinu. Na slici 19 učenici zamišljaju svakodnevne situacije gdje se površine mjere jediničnim kvadratima duljine stranice 1 dm, 1 cm, 1 mm. Kasnije se uvodi oznaka za površinu i oznaka za centimetar kvadratni. Učenici također imaju zadane aktivnosti izrezivanja kvadrata iz kolaž papira s duljinom stranice 1 cm i 1 dm.

Slika 19.

Mjerenje površine

1. Pogledaj slike i opiši ih. Kakve jedinične kvadrate koriste učenici, a kakve radnik?



Duljina stranice ovog kvadrata iznosi 1 dm.

Duljina stranice ovog kvadrata iznosi 1 m.

Jediničnih kvadrata ima različitih. Veće površine mjerit ćemo većim jediničnim kvadratima, a manje površine manjima.

Koje je površine prirodno mjeriti jediničnim kvadratima sa stranicom duljine 1 dm?
klupa, _____

Koje je površine prirodno mjeriti jediničnim kvadratima sa stranicom duljine 1 m?

Koje je površine prirodno mjeriti jediničnim kvadratima sa stranicom duljine 1 cm?

Koje je površine prirodno mjeriti jediničnim kvadratićima sa stranicom duljine 1 mm?

Preuzeto iz Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (28. str.), D. Glasnović Gracin i sur., 2021b, Alfa.

2. Nina i Tino 4, 2. dio udžbenika.

Pod naslovom *Mjerenje površina* se nalazi početna aktivnost (slika 20) gdje slijedi tekst o Blok puzzlama. Odmah zatim se uvode jedinice za mjerenje površine i oznaka za površinu. Slijede aktivnosti koje u kvadratnoj mreži prikazuju 1 cm^2 i 1 dm^2 . Zatim je prikazano pretvaranje mjernih jedinica za površinu. Sljedeći je zadatak povezivanje površina (4 cm^2 , 1 cm^2 , 3 cm^2 i dr.) s pravokutnicima ispunjenim jediničnim kvadratima.

Slika 20.

Mjerenje površine



Koji je od likova najveći?

Kako bismo sa sigurnošću mogli odgovoriti na pitanje, trebamo znati njihovu **površinu**.

Površina je dio ravnine koji zauzima neki lik. Površinu mjerimo kvadratnim jedinicama, tj. jedinicama za mjerenje površine koje su oblika kvadrata.

Jedinice za mjerenje površine jedinični su kvadrati:

kvadratni centimetar (cm^2), kvadratni decimetar (dm^2), kvadratni metar (m^2)

1 kvadratni centimetar (1 cm^2) je kvadrat duljine stranica 1 cm.

1 kvadratni decimetar (1 dm^2) je kvadrat duljine stranica 1 dm.

1 kvadratni metar (1 m^2) je kvadrat duljine stranica 1 m.


Kratica za površinu je veliko slovo **P**.

Preuzeto iz Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (120.str.), L. Lončar i sur., 2021b, Profil Klett.

Učenici u prvom zadatku trebaju napisati kratice jediničnih kvadrata za mjerenje površine (slika 21). Slijede zadaci gdje učenici trebaju popuniti tablicu s nazivima i kraticama (oznakama) za mjerne jedinice za površinu, trebaju izmjeriti površine raznih pravokutnika jediničnim kvadratom izrezanim iz papira, odabrati kojom će mjernom jedinicom mjeriti određene površine (pod spavaće sobe, poštansku marku i dr.), u kvadratnoj mreži prebrojati površinu stabala, u kvadratnoj mreži nacrtati likove zadane površine u cm^2 itd.

Slika 21.

Mjerenje površine

1. Napiši kratice jediničnih kvadrata za mjerenje površine. 

kvadratni metar	kvadratni centimetar	kvadratni decimetar

Preuzeto iz Nina i Tino 4, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (122. str.), L. Lončar i sur., 2021b, Profil Klett.

3. Super matematika za prave tragače 4, 2. dio udžbenika.

Naslov *Kako se mjeri površina?* (*Mjerenje površine*) započinje zadatkom gdje se još ne spominje pojam površine, ali se spominju razni mjerni instrumenti, mjerne jedinice i pojmovi (masa, volumen, duljina, vrijeme) koje njima mjerimo. Prikazan je zadatak (slika 22) gdje se uvodi pojam površine pomoću kvadratne mreže i likova ucrtanih u tu mrežu. Kako bi učenici odredili koji je lik najveći, moraju odrediti njihovu površinu. Slijede zadaci prebrojavanja kako bi se doznala površina izražena u jediničnim kvadratima, zatim se uvode mjerne jedinice za površinu i oznaka za površinu. U kvadratnoj mreži se prikazuje 1 cm^2 i 1 dm^2 .

Slika 22.

Pojam površine

NAUČI JOŠ NEŠTO O MJERENJU.

Nacrtana je kvadratna mreža. U njoj su likovi kuće, zrakoplova i broda. Sastavljeni su od kvadrata. Koji je lik najveći?

Da bismo odredili veličinu nacrtanih likova, moramo odrediti njihovu POVRŠINU.

ZAPAMTI!
Površine mjerimo jediničnim površinama. One imaju oblik kvadrata.

Preuzeto iz Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (124. str.), M. Martić i sur., 2021, Profil Klett.

Prvi zadatak je izmjeriti površinu prikazanog lika prekrivanjem površine jediničnim kvadratom (slika 23). Kasnije se u zadacima računaju površine raznih pravokutnika prekrivanjem jediničnim kvadratom, te se ucrtavaju likovi zadane površine ($P = 30 \text{ cm}^2$). Slijede i zadaci preračunavanja mjernih jedinica za površinu i pisanje brojke i oznake za mjernu jedinicu.

Slika 23.

Mjerenje površine

1 Izmjeri površinu nacrtanoga lika prekrivanjem površine jediničnim kvadratom od 1 cm^2 .



$P = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

Preuzeto iz Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (2. dio) (126. str.), M. Martić i sur., 2021, Profil Klett.

4. Moj sretni broj 4.

Pod naslovom *Mjerenje površine* se uveo pojam površine na način prikazan u prethodnom podnaslovu. Slijedi zadatak gdje učenici jediničnim kvadratom duljine stranice 1 cm mjere površine zadanih likova te računaju njihov opseg (slika 24). Slijede zadaci u kojim učenici računaju površinu likova jediničnim kvadratima stranice 1 cm, uspoređuju opseg i površinu likova, skiciraju likove zadanog broja jediničnih kvadrata i duljine stranice jediničnog kvadrata 5 cm, računaju opseg i površinu itd.

Slika 24.

Mjerenje površine

1. Jediničnim kvadratom duljine stranica 1 cm izmjeri površinu likova i izračunaj njihov opseg.



$P =$ jedinična kvadrata

$o =$



$P =$ jedinična kvadrata

$o =$



$P =$ jedinična kvadrata

$o =$

Usporedi površine i opsege likova. Što zaključuješ?

Preuzeto iz Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (99. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

Pod naslovom *Površina pravokutnika i kvadrata* se uvodi pojam kvadratne mreže (slika 25). Učenici broje retke, stupce i jedinične kvadrate u kvadratnoj mreži, te u likovima koji su ucrtani. Ucrtavaju pravokutnik površine 20 jediničnih kvadrata, te odgovaraju na koji način su prebrojili jedinične kvadrate. Slijede zadaci gdje učenici trebaju nacrtati pravokutnike određenih površina izraženih u jediničnim kvadratima, izračunati opseg svakog lika, izračunati površinu svakog lika itd.

Slika 25.

Kvadratna mreža

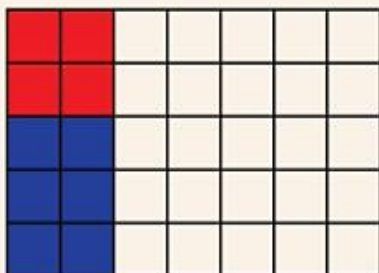
Prouči nacrtanu mrežu i objasni zašto takvu mrežu zovemo **kvadratna mreža**.

Od koliko se redaka i stupaca sastoji ta kvadratna mreža?

Od koliko se jediničnih kvadrata sastoji ta kvadratna mreža?



1. Prouči crveni kvadrat.



Od koliko se redaka i stupaca sastoji crveni kvadrat?

Od ___ retka i ___ stupca.

Od koliko se jediničnih kvadrata sastoji crveni kvadrat?

Od ___ jedinična kvadrata.

Kolika je površina crvenoga kvadrata?

$P =$ ___ jedinična kvadrata

2. Prouči plavi pravokutnik.

Od koliko se redaka i stupaca sastoji plavi pravokutnik?

Od ___ retka i ___ stupca.

Od koliko se jediničnih kvadrata sastoji plavi pravokutnik?

Od ___ jediničnih kvadrata.

Kolika je površina plavoga kvadrata?

$P =$ ___ jediničnih kvadrata

3. Koliko je ukupno jediničnih kvadrata u kvadratnoj mreži ostalo neobojeno? ___

Kako si odredio/odredila koliko je jediničnih kvadrata u mreži ostalo neobojeno?

Jesi li brojio/brojila preostale kvadrate? ___

Jesi li zbrajao/zbrajala kvadrate po stupcima ili po redcima? ___

Jesi li množio/množila broj kvadrata u stupcu s brojem kvadrata u retku? ___

4. U kvadratnu mrežu nacrtaj zeleni pravokutnik kojemu površina iznosi 20 jediničnih kvadrata. Od koliko se redaka i stupaca sastoji zeleni pravokutnik?

Razmisli, bismo li mogli nacrtati drukčije pravokutnike jednakih površina?



Površinu pravokutnika i kvadrata možemo izračunati na više načina. Možemo prebrojiti jedinične kvadrate, možemo zbrojiti jedinične kvadrate po stupcima ili po redcima, možemo pomnožiti broj jediničnih kvadrata u retku s brojem jediničnih kvadrata u stupcu (ili obratno).

Koji je način računanja najbrži? _____

Preuzeto iz *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (100. str.)*, S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

Pod naslovom *Mjerne jedinice za površinu* u kvadratnoj mreži su prikazani 1 cm^2 i 1 dm^2 . (slika 26). Napisane su sve mjerne jedinice za površinu, njihove kratice i za mjerenje kakvih površina se koriste.

Slika 26.

Mjerenje površine

Od koliko se jediničnih kvadrata sastoji prikazana kvadratna mreža?
Sjeti se da u kvadratnoj mreži imamo stupce i retke. _____

Izmjeri duljinu stranica jednoga jediničnoga kvadrata u mreži.
Koliko ona iznosi u cm? _____

Mreža se sastoji od 100 kvadrata duljine stranica 1 cm.
Ova je mreža zapravo kvadrat kojem su stranice duljine 10 cm ili 1 dm.
Provjeri je li to istina. Izmjeri duljine susjednih stranica mreže.



Jedinični kvadrat kojem su stranice duljine 1 cm ima površinu JEDAN CENTIMETAR KVADRATNI – 1 cm². ← Njime mjerimo površine manjih ploha i likova.

Jedinični kvadrat kojem su stranice duljine 1 dm ima površinu JEDAN DECIMETAR KVADRATNI – 1 dm². ← Njime mjerimo površine nešto većih ploha i likova.

Jedinični kvadrat kojem su stranice duljine 1 m ima površinu JEDAN METAR KVADRATNI – 1 m². ← Njime mjerimo površine velikih ploha i likova.

Mjerne jedinice za površinu su cm², dm², m².

 Površinu (P) mjerimo jediničnim kvadratima 1 cm², 1 dm², 1 m².

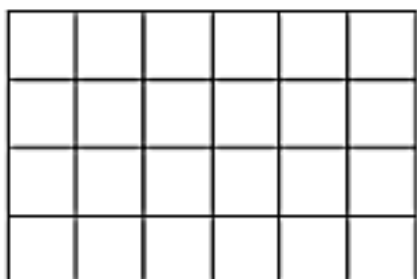
Preuzeto iz *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole* (102. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

U brojnim zadacima koji slijede površina pravokutnika se računa množenjem duljina stranica. Primjer jednog takvog zadatka je prikazan na slici 27. Ovo je jedini udžbenik koji sadrži računanje površina množenjem duljina stranica, koje se ne spominje u Kurikulumu, pa su ga ostali autori odlučili ostaviti za 5. razred.

Slika 27

Mjerenje površine množenjem duljina stranica

1. U kvadratnu mrežu nacrtaj pravokutnik duljina stranica 5 cm i 3 cm.



Najprije prebroji koliko jediničnih kvadrata od 1 cm^2 zauzima pravokutnik.

$P =$ _____

Zatim izračunaj njegovu površinu tako da pomnožiš duljine njegovih stranica.

$P = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} =$ _____

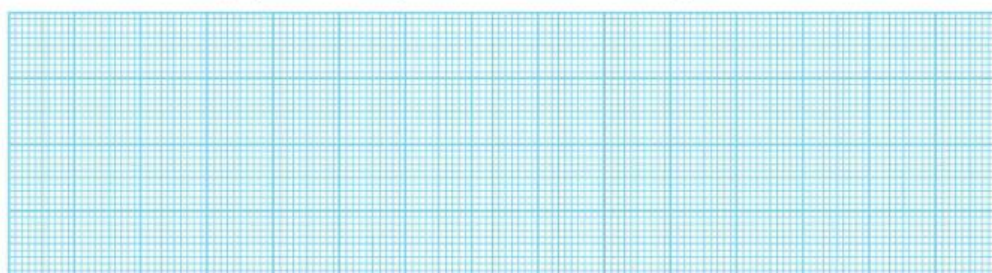
Preuzeto iz *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole* (103. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

Pod naslovom *Preračunavanje mjernih jedinica za površinu* učenici preračunavaju mjerne jedinice za površinu (slika 28).

Slika 28.

Mjerne jedinice za površinu

1. Preračunaj mjerne jedinice za površinu koristeći se milimetarskim papirom (kvadratna mreža koja se sastoji od jediničnih kvadrata od 1 mm^2 i 1 cm^2) tako da u milimetarski papir nacrtáš pravokutnike zadanih površina.



$6\text{ cm}^2 =$ _____ mm^2

$500\text{ mm}^2 =$ _____ cm^2

$30\text{ cm}^2 =$ _____ mm^2

$2\text{ cm}^2 =$ _____ mm^2

$4\text{ cm}^2 =$ _____ mm^2

$1\,200\text{ mm}^2 =$ _____ cm^2

Preuzeto iz *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole* (105. str.), S. Jakovljević Rogić i sur., 2021, Školska knjiga.

5. Matematička mreža 4.

Pojam mjerenja površine je već uveden i slijede naslovi: *Kvadratna mreža, Mjerne jedinice za površinu, Mjerenje površine pravokutnika i kvadrata*. Kvadratna mreža je uvedena preko zanimljivog zadatka s mrežom za ribolov (slika 29). Pitanje je koje će ribe Ante uloviti, a koje će mu pobjeći iz mreže? Slijede zadaci gdje učenici trebaju odrediti površine likova ucrtanih u kvadratnu mrežu (površina je izražena u jediničnim kvadratima), u kvadratnu mrežu ucrtati likove zadanih površina itd.

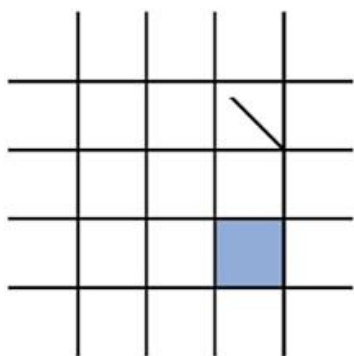
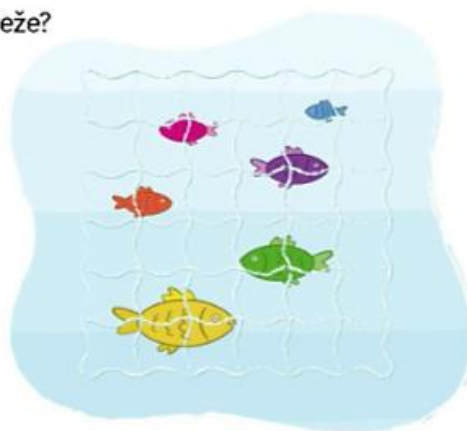
Slika 29.

Kvadratna mreža

Koje će ribe Ante uloviti, a koje će mu pobjeći iz mreže?

Objasni svoj odgovor.

U matematici se koristimo sličnom mrežom, ali njome ne lovimo ribe, već u nju ucrtavamo likove.



Ovo je kvadratna mreža.

Čine je pravci koji su međusobno okomiti i usporedni. Razmak između susjednih pravaca uvijek je jednak.

jedinični kvadrat

Stranice jediničnoga kvadrata duge su 1 cm.

Jedinični kvadrati mogu imati duljine stranica 1 km, 1 m, 1 dm, 1 cm ili 1 mm.

Preuzeto iz Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (96. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

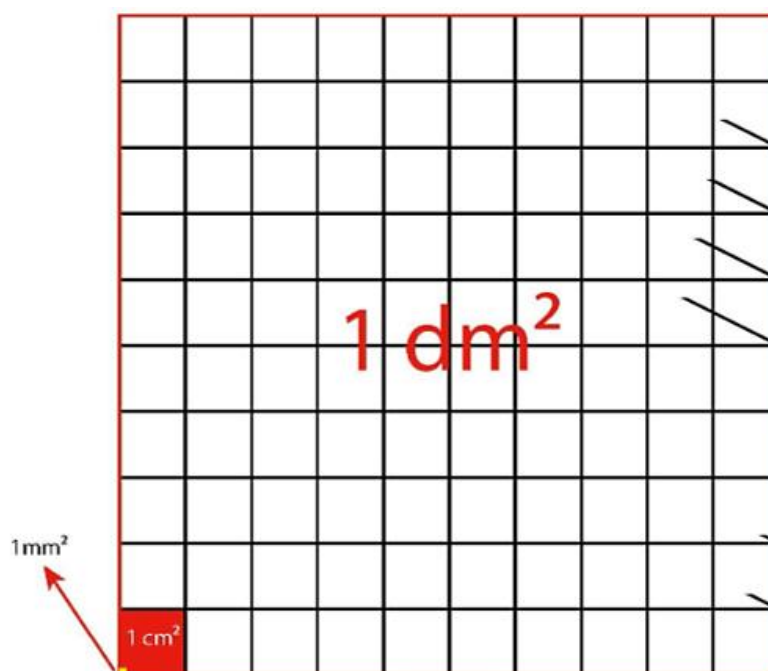
Pod naslovom *Mjerne jedinice za površinu* su uvedene mjerne jedinice i oznaka za površinu (slika 30). Slijede zadaci: nacrtaj kvadrat površine 1 cm^2 , odredi površine likova ucrtanih u kvadratnu mrežu u mm^2 i cm^2 , u kvadratnu mrežu nacrtaj pravokutnike zadanih površina (12 cm^2 , 16 mm^2 ...) itd.

Slika 30.

Mjerne jedinice za površinu

Površine likova mjerimo jediničnim kvadratima.

Površine jediničnih kvadrata mjerne su jedinice za površinu.



Oznaka za površinu je P .

Mjerna jedinica	Oznaka	Duljina stranice	Površina kvadrata
milimetar kvadratni	mm^2	1 mm	$P = 1 \text{ mm}^2$
centimetar kvadratni	cm^2	1 cm	$P = 1 \text{ cm}^2$
decimetar kvadratni	dm^2	1 dm	$P = 1 \text{ dm}^2$
metar kvadratni	m^2	1 m	$P = 1 \text{ m}^2$
kilometar kvadratni	km^2	1 km	$P = 1 \text{ km}^2$

Osnovna mjerna jedinica za duljinu jest **metar**, pa je osnovna mjerna jedinica za površinu **metar kvadratni**.

Preuzeto iz *Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole* (98. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

Zadnji naslov je *Mjerenje površine pravokutnika i kvadrata*. Prikazan je način mjerenja površine pomoću kvadratne mreže i mjernih jedinica za površinu (slika 31). Slijede zadaci gdje učenici procjenjuju koji je pravokutnik veći i mjere površinu oba pravokutnika pomoću jediničnih kvadrata. Crtaju pravokutnike zadanih duljina stranica izraženih u cm i trebaju procijeniti njihove površine, te stvoriti poveznicu između duljine stranice i površine. Trebaju izračunati površinu i opseg pravokutnika zadanih duljina stranica.

Slika 31.

Mjerenje površine

Marko razmišlja kako odrediti površinu pravokutnika i kvadrata na slici. Odlučio je prekriti ih kvadratnom mrežom.

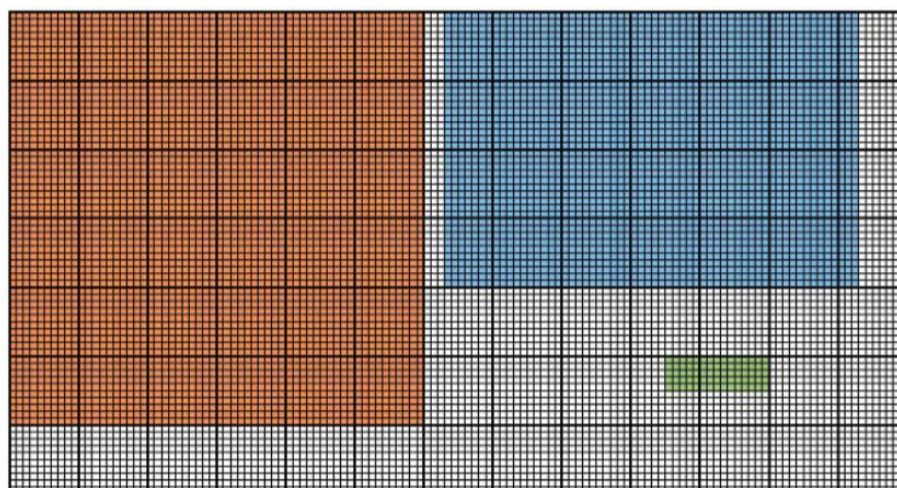


Mjerenje s pomoću kvadratne mreže

$$P = 36 \text{ cm}^2$$

$$P = 24 \text{ cm}^2$$

$$P = 75 \text{ mm}^2$$



Preuzeto iz *Matematička mreža 4*, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole (100. str.), M. Cindrić i sur., 2021, Školska knjiga.

7.4. Usporedba zadataka za usvajanje pojma površine u udžbenicima

U prethodnim podnaslovima bile su prikazane razne početne aktivnosti i zadaci za uvođenje pojma površine i mjerenje površine iz pet različitih udžbenika matematike. Redom prikazivanja to su bili ovi udžbenici: Otkrivamo matematiku 4, Nina i Tino 4, Super matematika za prave tragače 4, Moj sretni broj 4 i Matematička mreža 4. U nastavku će se svaki udžbenik usporediti s prijedlozima aktivnosti i zadataka navedenih autora (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik

2001) i s ishodima i prijedlozima Kurikuluma (MZO, 2019). Svaki od spomenutih udžbenika je poseban na svoj način i u svakom se ovaj matematički pojam pojavljuje na različite načine. Svaki udžbenik ima drugačiji redosljed naslova, aktivnosti i zadataka, drugačije ilustracije i drugačije metodičke postupke. Počevši od pojma ravnine, koji je neizostavan preduvjet za razumijevanje pojma površine, udžbenici prikazuju ovaj pojam u 1. dijelu udžbenika (ako se udžbenik sastoji od dva dijela) pod različitim naslovima. Također, pojam ravnine se uvodi na različite načine:

1. Otkrivamo matematiku 4 - ravnina se prikazuje pomoću krugova različitih polumjera i istog središta koji su izrezani od kolaž papira, te učenici zamišljaju da dodaju sve veće i veće krugove. Udžbenik kod uvođenja pojma površine prati savjete autora koji naglašavaju da je kod formiranja pojma ravnine uporište u promatranju, te da učenici trebaju promatrati sve veće i veće plohe te zamišljati da se ta ploha neograničeno povećava. To mogu biti krugovi s istim središtem koji imaju sve veći i veći polumjer, te na taj način pomoći učenicima u zamišljanju ravnine kao ravne neomeđene plohe. Ovaj udžbenik uvodi riječ *ravnina*, a ne *ravna ploha* kako navodi Kurikulum.
2. Nina i Tino 4 - na slici je prikazana ploha programa paint koja je uspoređena s ravninom jer se može povećavati gotovo beskonačno. Ovaj zadatak se ne nalazi u prijedlozima autora, ali je zanimljiv i na poseban način smješta pojam ravnine u učenikovu svakodnevicu. I u ovom udžbeniku koristi se riječ *ravnina*, iako se ona ne spominje u Kurikulumu.
3. Super matematika za prave tragače 4 - ravnina je prikazana pomoću geografske karte. Geografska karta je dobar prikaz ravnine jer se na njoj ogleda pripadnost točke i polupravca ravnini što je prema autorima bitan dio usvajanja ovog pojma. Udžbenik također spominje riječ *ravnina*.
4. Moj sretni broj 4 - stranice u bilježnici i školska ploča su opisani kao dio ravnine. Na slici se nalazi prikaz dva ukrštena pravca koja dijele ravninu na četiri dijela koja su obojena različitim bojama. Iako autori navode korištenje ploče i školske bilježnice u aktivnostima pri uvođenju pojma *ravnine* nigdje ne spominju da se ravnina uvodi pomoću kuta. Međutim, za razumijevanje kuta učenicima je potrebno znati riječ *ravnina*, te je stoga ovaj zadatak na ovom mjestu u udžbeniku.
5. Matematička mreža 4 - učenici zamišljaju da ravan list papira počne rasti u svim smjerovima unedogled. Na slici su prikazane točke, crte i likovi u ravnini. Udžbenik ima sličan primjer predstavljanja *ravnine* kao i autori, jedina je razlika da odmah uvodi pripadnost točke, crte i likova ravnini.

Udžbenici Nina i Tino 4 i Matematička mreža 4 pojam ravnine uvode zasebno, dok ostali udžbenici pojam ravnine uvode uz pojam kuta ili kruga. Pojam ravnine se u svim udžbenicima prikazuje kao beskonačno i neomeđeno širenje krugova, papira, plohe, karte ili ploče. Otkrivamo matematiku 4 je jedini udžbenik koji osim ilustracije i objašnjenja ima i aktivnost gdje se uključuje taktilni pristup, a ne samo vizualni. Ostali udžbenici ilustracijom prikazuju ravninu ili nude aktivnost zamišljanja.

Pojam površine i mjerenje površine se uvodi u drugom dijelu udžbenika (kod udžbenika koji se sastoji od dva dijela) i svaki udžbenik uvodi ovaj pojam pod različitim naslovima i različitim redoslijedom naslova. Također, aktivnosti i zadaci se bitno razlikuju:

1. Otkrivamo matematiku 4 – pojam površine se uvodi pod naslovom *Površina* zadatkom gdje se uspoređuju veličine sagova sa slike. Zamišljanjem prekrivanja poda učionice sagovima raznih površina shvaća se koji sag ima veću/manju površinu i da to znači da prekriva više/manje poda učionice. Prema autorima, aktivnosti koje pomažu učenicima osvijestiti mjerenje površine su aktivnosti popločavanja, prekrivanja, postavljanja pločica i bojanja zida. Zadatak smješta pojam površine u učenikovu svakodnevicu. Ostvaruje ishod Kurikuluma: učenik će u ravnini uspoređivati likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznavati pojam površine. Nakon pojma površine prvo se uvodi kvadratna mreža, a zatim mjerne jedinice za površinu. Zadatcima povećavanja broja kvadrata u kvadratnoj mreži učenike se potiče da sami shvate najbrži način računanja površine.
2. Nina i Tino 4 – prije uvođenja pojma površine uvodi se kvadratna mreža. Pod naslovom *Kvadratna mreža* je prikazana kvadratna mreža i trebaju se obojiti kvadrati kako bi pas došao do kosti. Ova vrsta zadatka nije opisana od strane autora i promatrajući Kurikulum ne ostvaruje jedan konkretan ishod, ali je zanimljiv predkorak prema shvaćanju kvadratne mreže. U sljedećem zadatku učenici trebaju prepoznati geometrijske likove u kvadratnoj mreži i prebrojati jedinične kvadrate od kojih se ti likovi sastoje. Markovac (2001) opisuje ovu aktivnost. Pred učenike se postavljaju pravokutnici ispunjeni jediničnim kvadratima na kojima je teško procjenom utvrditi koji je veći ili manji, a učenici se pitaju kako doći do odgovora. Odgovor se nalazi u mjerenju površina pravokutnika i stvara se svijest kod učenika o potrebi mjerenja površina. Površinu mjere prebrojavajući jedinične kvadrate u prikazanom liku. Ovaj zadatak ostvaruje ishod iz Kurikuluma gdje učenici mjere površinu likova ucrtanih u kvadratnu mrežu prebrojavajući kvadrate. Pod naslovom *Mjerenje*

površina se uvodi pojam površine tekstem o Blok puzzlama. Odmah zatim se uvode mjerne jedinice za površinu i oznaka za površinu.

3. Super matematika za prave tragače 4 – prije uvođenja pojma površine uvodi se kvadratna mreža. Kvadratna mreža se uvodi prikazom igre sudoku. Važnost prebrojavanja jediničnih kvadrata u kvadratnoj mreži autori objašnjavaju kao preduvjet za kasnije računanje površine pravokutnih površina množenjem duljina stranica. Ovaj zadatak na kreativan način uvodi kvadratnu mrežu koja je u Kurikulumu dio ishoda usvajanja pojma površine. Pojam površine se uvodi pod naslovom *Kako se mjeri površina?* prikazom kvadratne mreže i likova ucrtanih u nju. Uvode se mjerne jedinice za površinu i oznaka za površinu.
4. Moj sretni broj 4 – pojam površine se uvodi pod naslovom *Mjerenje površine*. Na slici se promatraju prozori i uspoređuje njihova veličinu tj. površina. Zatim se promatra travnjak na koji stane određeni broj jediničnih kvadrata duljine stranice 1 dm i učenici moraju to provjeriti koristeći pripremljene jedinične kvadrate od papira. Zadatak ima sličnosti s predloženim aktivnostima autora Liebeck, Markovca i Kurnika koji naglašavaju važnost smještanja pojma površine u učenikovu svakodnevicu, kao plohe i kao mjere. Prema Kurikulumu ova aktivnost je dio razrade ishoda i glasi: učenik će mjeriti površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom. Uvodi se i oznaka za površinu. Nakon računanja površine jediničnim kvadratima uvodi se kvadratna mreža, a zatim mjerne jedinice za površinu. Površina se također računa množenjem duljina stranica pravokutnika, iako se u Kurikulumu ova zadnja faza ne spominje već je ostavljena za 5. razred. Autori navode da se do generalizacije dolazi postupnim povećavanjem likova, a samim time i broja kvadratića koje učenici trebaju prebrojati kako bi počeli množiti broj stupaca i redaka i na taj način računali površinu.
5. Matematička mreža 4 – pojam površine se uvodi pod naslovom *Površina lika*. Na slici su prikazani razni likovi i treba se obojati veće likove zelenom, a manje žutom bojom. Veći likovi zauzimaju veći dio ravnine i stoga imaju veću površinu. Autori također spominju bojanje površina, a Kurikulum bojanje ne spominje. Uvodi se i oznaka za površinu. Slijedi uvođenje kvadratne mreže prikazom mreže za ribolov, a zatim se uvode mjerne jedinice za površinu. Ovaj udžbenik na posebno kreativan način uvodi kvadratnu mrežu i to se razlikuje od primjera aktivnosti autora. Spominje se da je površina pravokutnika i kvadrata jednaka umnošku duljina dviju susjednih stranice, no površina se mjeri jediničnim kvadratima. Kod autora se umnožak duljina dviju susjednih stranica ne spominje, već se do tog postupno dolazi prebrojavanjem stupaca i redaka. U Kurikulumu se ne spominje do 5. razreda.

Prikazani udžbenici se bitno razlikuju u načinu na koji uvode pojam površine. Udžbenici Otkrivamo matematiku 4 i Matematička mreža prvo uvode pojam površine, a zatim kvadratnu mrežu. Udžbenici Nina i Tino 4 i Super matematika za prave tragače 4 prvo uvode kvadratnu mrežu, a zatim pojam površine. Udžbenik Moj sretni broj 4 u isto vrijeme uvodi pojam površine i mjerenje površine, te već na prvoj stranici uvodi jedinični kvadrat, a tek kasnije kvadratnu mrežu. Udžbenici najčešće prvo uvode pojam površine, zatim kvadratnu mrežu, a zatim mjerenje površine mjernim jedinicama za površinu. Kvadratna mreža i jedinični kvadrat su potrebna predznanja za usvajanje mjernih jedinica za površinu i mjerenje površine mjernim jedinicama. Udžbenik Moj sretni broj 4 je jedini udžbenik koji uvodi računanje površine množenjem duljina stranica. Pojam površine se uvodi zamišljanjem prekrivanja određene površine, prekrivanja likova jediničnim kvadratima, bojanjem jediničnih kvadrata u kvadratnoj mreži, zauzimanjem većeg/manjeg dijela ravnine itd. Uspoređujući udžbenike s kroz rad opisanim aktivnostima i zadacima navedenih autora (Liebeck 1995, Markovac 2001, Kurnik 2001) i s ishodima i prijedlozima Kurikuluma (MZO, 2019) može se zaključiti da udžbenici imaju slične aktivnosti, iako se mogu primijetiti i one koje su potpuno drugačije. Kurikulum propisuje ishode i daje poneki primjer aktivnosti, ali ostavlja dosta prostora autorima udžbenika za kreativnost, što oni uvelike koriste. Svaki udžbenik nudi različite ilustracije, zadatke, aktivnosti i metodičke postupke, te je na učiteljima da sami odluče koji će udžbenik najviše odgovarati njihovom načinu poučavanja i njihovim učenicima.

8. Zaključak

Svaki nastavnik matematike treba poznavati načine na koje se određeni matematički pojam, poput u ovom radu opisanog pojma površine, predstavlja od strane raznih izvora. Na taj način će steći potrebna znanja koja će mu omogućiti da svojim učenicima olakša misaoni proces formiranja pojma površine. U ovom radu pojam površine je prikazan od strane raznih izvora poput autora Liebeck (1995), Markovca (2001) i Kurnika (2001), Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (MZO, 2019) i pet različitih hrvatskih udžbenika matematike s ciljem da učiteljima olakša izbor aktivnosti i zadataka ovisno o potrebama njihovih učenika. Ovaj rad nudi pregled raznih aktivnosti i zadataka uvođenja pojma površine, usporedbu tih zadataka iz udžbenika, te usporedbu zadataka iz udžbenika s aktivnostima i zadacima navedenih autora i Kurikulumom. Pomnom analizom spomenutih udžbenika može se doći do zaključka da gotovo u cijelosti slijede prijedloge spomenutih autora i Kurikuluma, s par iznimaka koje su detaljno navedene i opisane. Neovisno o količini i raznovrsnosti zadataka od strane raznih autora, Kurikuluma i u raznim udžbenicima na učitelju je da, kao najbitnija komponenta nastave matematike, prouči spomenute izvore kako bi odabrao zadatke i aktivnosti koji će njegovim učenicima olakšati usvajanje pojma površine.

Literatura

- Acman, J., & Doutlik, K. (2019). Dinamičko crtanje u primarnom obrazovanju. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 20(80), 52-61.
- Cindrić, M., Mišurac, I., Dragičević, A., & Pastuović, B. (2021). *Matematička mreža 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Dečman, S., Halavuk, A., & Milin Šipuš, Ž. (2013). Geometrija prostora - presjeci tijela ravninom. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 14(53), 5-13.
- Glasnović Gracin, D., & Domović, V. (2009). Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole. *Odgojne znanosti*, 11(2), 45-65.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., & Soucie, T. (2021a). *Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (1. dio)*. Alfa.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., & Soucie, T. (2021b). *Otkrivamo matematiku 4, Radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio)*. Alfa.
- Horvat, Z. (2018). Motivacija u suvremenoj nastavi matematike. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 19(73), 21-28.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., & Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Kurnik, Z. (2000a). Apstrakcija. *Matematika i škola*, 6(4), 11-15.
- Kurnik, Z. (2000b). Generalizacija. *Matematika i škola*, 4(2), 147-154.
- Kurnik, Z. (2001). Metodika uvođenja novih pojmova. *Matematika i škola*, 12, 55-59.
- Kurnik, Z. (2002). Načelo znanstvenosti. *Matematika i škola*, 13, 102-106.
- Kurnik, Z. (2009). *Znanstveni okviri nastave matematike*. Element.
- Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Educa.
- Lončar, L., Pešut, R., Rossi, Ž., & Križman Roškar, M. (2021a). *Nina i Tino Matematika, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (1. dio)*. Profil Klett.
- Lončar, L., Pešut, R., Rossi, Ž., & Križman Roškar, M. (2021b). *Nina i Tino Matematika, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole (2. dio)*. Profil Klett.

- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Routledge.
- Marendić, Z., & Vlahović-Štetić, V. (2010). Razvoj matematičkih pojmova. *Dijete, vrtić, obitelj*, 10(1), 3-7.
- Markovac, J. (2001). *Metodika početne nastave matematike*. Hrvatska: Školska knjiga.
- Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., & Martinić Cezar, J. (2021). *Super matematika za prave tragače 4, Radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole (1. dio)*. Profil Klett.
- Matijević, M. (2011). (Na)učiti kako se uči (matematika). *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 12(45), 30-38.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2019). Kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. *Narodne novine*, 7/2019.
- Vidić, T., Smetko, S., & Pintar, R. (2018). Kakve udžbenike žele učitelji? *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 19(73), 29-41.

Izjava o izvornosti rada

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.
