

# Darovitost u matematici

---

Ileković, Valentina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:677112>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-28**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**UČITELJSKI FAKULTET**  
**ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

**VALENTINA ILEKOVIĆ**  
**DIPLOMSKI RAD**

# **DAROVITOST U MATEMATICI**

**Petrinja, srpanj 2018.**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**UČITELJSKI FAKULTET**  
**ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**  
**Petrinja**

**PREDMET: Metodika matematike**

**DIPLOMSKI RAD**

Ime i prezime pristupnika: Valentina Ileković

TEMA DIPLOMSKOG RADA: Darovitost u matematici

MENTOR: doc. dr. sc. Goran Trupčević

**Petrinja, srpanj 2018.**

## SADRŽAJ

<b>Sažetak .....</b>	<b>3</b>
<b>Summary .....</b>	<b>4</b>
<b>1. UVOD .....</b>	<b>5</b>
<b>2. DAROVITOST .....</b>	<b>6</b>
2.1 Povijesni osvrt .....	6
2.2 Što je darovitost? .....	8
<b>3. MATEMATIČKA DAROVITOST .....</b>	<b>11</b>
3.1 Karakteristike matematički daroviti učenika .....	12
3.2 Razlike matematički darovitih učenika i njihovi vršnjaka .....	16
3.3 Brzina napredovanja matematički daroviti učenika .....	16
<b>4. IDENTIFIKACIJA DAROVITIH UČENIKA .....</b>	<b>19</b>
4.1 Liste i skale za procjenu .....	23
4.2 Testovi za otkrivanje darovitosti .....	25
4.2.1. Standardne progresivne Ravenove matrice.....	26
4.3 Ekspertni sustav za prepoznavanje učeničke darovitosti iz matematike .....	27
<b>5. RAD S MATEMATIČKI DAROVITIM UČENICIMA.....</b>	<b>31</b>
5.1 Obogaćivanje kurikula.....	31
5.2 Učenje matematike otkrivanjem i vođenim otkrivanjem .....	32
5.2.1 Domišljato računanje i induktivno zaključivanje .....	33
5.2.2 Mjerenje, procjenjivanje i određivanje veličina .....	34
5.2.3 Ravnina, prostor i oblici.....	35
5.2.4 Obrada podataka .....	35
5.3 Matematičke igre .....	36
5.4 Suradničko učenje .....	38
5.5 Projekti .....	39
5.6 Model Hopkins .....	40
<b>6. ULOGA UČITELJA.....</b>	<b>42</b>
6.1 Istraživanje o stavovima učitelja i metodama rada s matematički nadarenim učenicima.....	43
<b>7. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>46</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>47</b>
<b>IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI DIPLOMSKOG RADA .....</b>	<b>50</b>

## Sažetak

Ulaskom u razred primjećuje se mnogo različitih učenika, svaki učenik ima svoje posebnosti i svaki je drugačiji na svoj način. Među svim tim učenicima uvijek će se pojaviti učenici koji će se po uspjehu isticati od vršnjaka. No možemo li sve te učenike nazvati darovitima? Darovitost je mnogo više od odličnih ocjena u školi, darovitost osim razvijenih posebnih sposobnosti čine i osobine ličnosti te kreativnost. No kada govorimo o matematičkoj darovitosti tu često dolazi do zablude da su daroviti samo oni koji točno i brzo riješe zadatak. Svakako to može biti jedna od karakteristika matematički darovitih učenika, ali ne i jedina. Vrlo je važno što ranije identificirati darovitog učenika kako bi ga se na adekvatan način moglo poticati i usmjeravati pri razvijanju darovitosti. Ukoliko se potencijalno darovit učenik ne uoči na vrijeme dolazi do rizika da izgubi interes za matematiku, te nikada ne razvije darovitost. Učitelji su ti koji sustavno promatraju napredovanje i učenje učenika te su iz tog razloga u najboljoj poziciji za procjenu njihove darovitosti. U tome im mogu pomoći različite liste, skale i testovi za procjenu. Nakon identifikacije bitno je uočiti potrebe svakog darovitog učenika te ga usmjeravati prema ostvarivanju punog potencijala. Cilj ovog rada je upoznati mogućnosti rada s darovitim učenicima te istražiti koliko učitelji koriste te mogućnosti.

Ključne riječi: darovitost, matematička darovitost, identifikacija, metode poučavanja

## **Summary**

Entering into the classroom we can notice many different students, each student has his own particulars and each is different in their own way. Among all those students we will always notice students who have better grades. But can we call all these students gifted? Giftedness is much more than good grades in school, on developing giftedness, besides special abilities also affects personality traits and creativity. But when we talk about mathematical giftedness it often comes to mischief that only those who answer the task quickly and correctly are gifted. Certainly, this may be one of the characteristics of mathematically gifted students, but not the only one. It is very important to identify a gifted student early enough to be able to stimulate and direct it in an adequate way to develop giftedness. If a potentially gifted student is not identified early enough, we risk that he might lose interest in math. Teachers are those who systematically observe the progress of students and are therefore in the best position to identify gifted students. Different lists, scales and evaluation test can help them. After identification, it is important to spot the needs of each gifted and direct him towards developing his full potential. The purpose of this paper is to familiarize yourself with the possibilities of working with gifted students and to explore how many teachers use different methods while teaching mathematical gifted students.

Key words: giftedness, mathematical giftedness, identification, teaching methods

## 1. UVOD

Tema ovog diplomskog rada je darovitost u matematici. Radom se želi ukazati na važnost stjecanja znanja o darovitim učenicima, a posebno matematički darovitim učenicima. Jedino stjecanjem tih znanja se mogu kvalitetno procijeniti i identificirati matematički daroviti učenici, a time i postupati u skladu s njihovim potrebama.

Na početku rada opisuje se povijesni pogled na darovitost. To je pojam koji se istražuje već dugi niz godina, od shvaćanja darovitosti kao visoke inteligencije preko podjela na više vrsta inteligencije pa do razmatranja pojedinih iznadprosječnih sposobnosti i njihovog utjecaja na darovitost. Razmatraju se različiti pogledi na darovitost te pojmovi koji su zajednički svim različitim teorijama darovitosti.

U radu je razrađen pojam matematičke darovitosti i što podrazumijevamo kada učenika nazovemo matematički darovitim. Prikazani su znakovi matematičke darovitosti koji se mogu primijetiti već kod predškolske djece. Također se kroz rad upoznajemo s karakteristikama matematički darovitih učenika i ponašanjima koja su karakteristična kod njih.

Važan dio rada je poglavlje *Identifikacija darovitih učenika* u kojemu se opisuje važnost same identifikacije i različiti načini kako identificirati matematički darovite, ali i potencijalno darovite učenike. Nadalje, jednako bitno poglavlje je *Rad s darovitim učenicima* kroz koji se upoznaju mnoge metode i načini kako zainteresirati i zadržati njihov interes i ljubav prema matematici, te kako poticati razvoj darovitosti.

Na kraju rada navode se važnosti učiteljeve uloge te istraživanje u kojem se proučavaju stavovi i metode rada učitelja s matematički nadarenim učenicima.

## **2. DAROVITOST**

Darovitost je pojam s kojim se često susrećemo no možemo li ga u potpunosti definirati? Najstarije i najrasprostranjenije shvaćanje darovitosti je nadprosječna inteligencija. Mnogi znanstvenici su svoja istraživanja posvetili darovitim učenicima te tako produbili pojam darovitosti.

### **2.1 Povijesni osvrt**

Vraćajući se u prošlost sve do filozofa Sokrata i Platona nailazimo na shvaćanje darovitosti kao brže prolaženje faza znanja i postizanja viših razina razumijevanja. George (2005) izdvaja Galtona (1869) kao jednog od prvih znanstvenika koji je pokušao napraviti test inteligencije. Njegovo je nastojanje nastavio Binet koji je dobio zadatak sastaviti test koji bi izdvojio i identificirao neinteligentne učenike. Na njihova istraživanja nadovezao se Lewis Terman kojeg Huzjak (2006) navodi kao prvog znanstvenika koji je počeo istraživati darovitost iako je tu i dalje najveći naglasak bio na inteligenciji.

Terman je pokrenuo 1921. godine istraživanje koje je pratilo tisuću i petsto nadarene djece tokom njihovog cijelog života. Došao je do procjene kako populacija sadrži 1% nadarenih pojedinaca, stavljajući naglasak na inteligenciju. Između ostalih zadataka od djece je očekivao da ponove sedam brojeva unatrag te riješe matematičke zadatke s poznatim točnim i netočnim brojevima. Nakon njegovog istraživanja mnogi su autori posvetili svoje znanstvene radove pojedincima koji su se isticali u nekim sposobnostima. Tako su dolazili do novih teorija i opisa nadarenosti.

Velika promjena u spoznaji darovitosti dogodila se 1950. godine, znanstvenici su počeli razmatrati inteligenciju kao multifunkcionalni potencijal. Počeli su uključivati u definicije potencijal i kreativnost, a ne samo uspjeh. Jedan od tih znanstvenika bio je J. S. Renzulli koji je 1978. godine postavio teoriju o dvije vrste darovitosti. Školsku darovitost koju povezuje s visokom inteligencijom i reprodukcijom znanja te produktivno-kreativnu darovitost koja se temelji na primjeni znanja u životnim zadacima. Također je postavio troprstenasti koncept darovitosti koji uključuje sposobnosti, osobine ličnosti i kreativnost.



Nadalje, A. J. Tennenbaum je 1983. godine postavio teoriju zvijezde. On navodi pet činitelja koji moraju biti optimalni kako bi potencijal darovitog učenika bio realiziran kao postignuće: opća intelektualna sposobnosti, specifične sposobnosti, ne-intelektualni činitelji, okolinska podrška i slučajnost. Smatra kako je svaki od navedenih faktora nužan, ali sam po sebi nedovoljan za realizaciju potencijala. Nijedna kombinacija četiri faktora ne može nadoknaditi nedostatak u petom faktoru, a relativna važnost pojedinih faktora mijenja se s obzirom na vrstu nadarenosti. No navodi kako kreativnost nije uvjet darovitosti. Ovakvim modelom Tennenbaum je procijenio 10% nadarenih cijele populacije.

Svakako je na spoznaje o darovitosti utjecalo i stvaranje pojma inteligencije. Prijelaz od shvaćanja pojma inteligencije kao opće mentalne sposobnosti do shvaćanja inteligencije kao skupa većeg broja relativno nezavisnih sposobnosti dovodi do gledišta nadarenosti u kojoj se potencijalno nadareni pojedinac ističe u nekom konkretnom području. Howard Gardner postavio je široko poznatu teoriju o sedam vrsta inteligencije: logičko-matematička, lingvistička, vizualno-spacijalna, tjelesno-kinetička, glazbena, interpersonalna i intrapersonalna. Vlahović - Štetić (2008) navodi kako njegova teorija ističe različite međusobno nezavisne vrste inteligencija, a svaki pojedinac ima jedinstvenu kombinaciju inteligencija.

Prema Koren (2013) jedan od prvih psihologa koji je razdvojio pojam nadarenosti i talentiranosti jest kanadski psiholog F. Gagne. Svoju ideju iznio je 1985. godine, a osnova je da postoji nekoliko domena ljudskih sposobnosti od kojih svaka sadrži više specifičnih sposobnosti i na drugoj strani brojna specifična područja talenta. Autor navodi kako se potencijalna darovitost može uz pomoć okoline i ličnosti manifestirati u darovitost.

Sam pojam darovitosti je u početku poistovjećivan s visokim stupnjem inteligencije, a kasnije je dopunjavan s komponentama kao što su metakognitivne vještine, osobni konativni faktori, naročito oni motivativni, kao i utjecajne okolinske odrednice. Naravno, proces konceptualizacije nije završen, već se nastavlja u skladu s novim znanstvenim spoznajama u tom području. U svakom slučaju, taj proces ima svoju povijesnu dimenziju (Koren, 2013).

## 2.2 Što je darovitost?

Ljudske su sposobnosti u populaciji statistički raspoređene po Gaussovoj, zvonastoj krivulji normalne distribucije. To znači da većina ima određenu sposobnost razvijenu na nekoj prosječnoj razini, dok se broj pojedinaca s povećanim ili smanjenim sposobnostima simetrično smanjuje. One pojedince koji imaju jednu ili više sposobnosti značajno natprosječno razvijene obično nazivamo nadarenima u toj sposobnosti. U školskom sustavu obuhvaćena je praktički cijela populacija pa zbog toga među učenicima svakoga godišta postoje bitne individualne razlike u pojedinim sposobnostima. (Koren, 1989).

No uz shvaćanje darovitosti kao razvijene posebne sposobnosti javljaju se još i druga shvaćanja. U njihovoj osnovi pokušava se doći do spoznaje kako razlikovati dobro obrazovanog pojedinca od stvaraoca novih ideja ili marljivog sakupljača podataka od konstruktora novih smislenih cjelina.

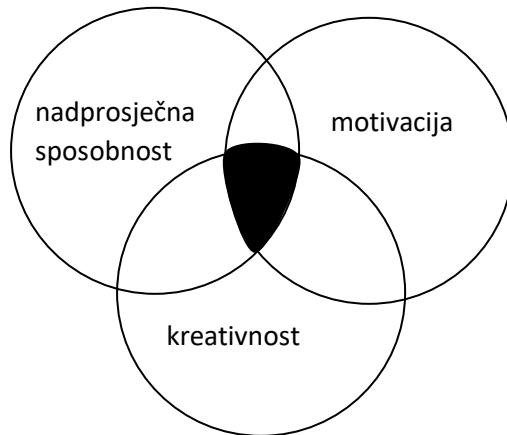
Čudina - Obradović (1991) navodi kako nas je traganje za načinom otkrivanja darovitosti dovelo do shvaćanja darovitosti kao:

- opće intelektualne sposobnosti;
- opće kreativne sposobnosti;
- produktivno-kreativne sposobnosti;
- specifične sposobnosti;
- sposobnosti upotrebe misaonih procesa;
- područno-specifične inteligencije i kreativnosti.

Prema novijim definicijama i shvaćanjima nadarenost nije samo sposobnost brzog i kvalitetnog sakupljanja informacija i reprodukcije znanja. Ona je upotreba znanja u produkciji, ali ne bilo kakvoj, stereotipnoj, već u takvoj koja donosi nešto novo, originalno, dovodi do spoznaja koje obogaćuju ili mijenjaju poimanje prirode, umjetnosti, čovjeka (Čudina - Obradović, 1991).

Većina današnjih autora koji proučavaju darovitost definiraju ju kroz troprstenastu koncepciju darovitosti koju je postavio Renzulli 1978. godine. Prema Renzulliju produktivnu darovitost uvjetuju tri osnovne skupine osobina:

1. iznad prosječno razvijene sposobnosti;
2. osobine ličnosti, posebno specifična motivacija za rad;
3. kreativnost.



Slika 1. Prikaz Rezullieve troprstenaste definicije darovitosti (Čudina - Obradović, 1991, str. 20)

Kao što možemo zaključiti ova tri prstena nisu jednake konstantnosti. Najmanje podložne promjenama su sposobnosti dok su motivacija i kreativnost faktori koji se mijenjaju tijekom vremena. Kod većine nadarene djece moći ćemo primijetiti i identificirati visoke sposobnosti, dok će se motivacija postepeno razvijati, pri čemu važnu ulogu imaju i faktori okoline. Također je i kreativnost sposobnost koja se tijekom vremena javlja kao rezultat dugotrajnog bavljenja aktivnošću. Udio svake od tri skupine faktora različit je u različitim razvojnim fazama stvaralaštva. No kada pojedinac dođe do nivoa stvaralaštva ti su prsteni toliko čvrsto isprepleteni da ih nije moguće posebno analizirati.

Vizek - Vidović (1996) u svome članku navodi kako je ovom koncepcijom darovitosti vidljivo da nadarena djeca nesumnjivo posjeduju potencijal za uspjeh u različitim aktivnostima, no hoće li se on razviti i hoće li dijete zaista postizati iznadprosječni uspjeh u jednom ili više područja, ovisi i o ostalim vanjskim i unutarnjim činiteljima. Od unutarnjih činitelja se najčešće spominju motivacija, samopoimanje, ustrajnost, sustav vrijednosti, interes, mjesto kontrole, temperament i sl. Novija istraživanja pokazuju da su ovi činitelji odgovorni ne samo za razlike u

uspješnosti između nadarene i prosječne djece već i za razlike unutar skupine nadarenih.

Prema Vlahović - Štetić (2008) definicije darovitosti usmjerene su na različite aspekte tog pojma i mogući su brojni načini grupiranja. Ističe Mönksa i Masona koji su predložili 1993. podjelu na četiri osnovne skupine definicija:

- definicije usmjerene na urođenost, odnosno genetske činitelje;
- definicije usmjerene na kognitivne modele;
- definicije usmjerene na postignuća;
- definicije sa sustavskim pristupom.

Podjelom na ove vrste definicija autori su htjeli objediniti definiranja darovitosti ostalih znanstvenika. Autori koji pripadaju pristupu usmjerenom na kognitivne modele smatraju da bi s djecom valjalo uvježbavati vještine rješavanja problema, suočavati ih s novim situacijama u kojima trebaju primjenjivati staro znanje, uvježbavati strategije mišljenja i metakognitivne vještine.

Definicija darovitosti usmjerena na postignuće definira motivaciju i kreativnost kao osobine koje dovode do realizacije darovitosti. Kreativni način mišljenja i usmjerenost na zadatak su nešto što se može i mora poticati u školi.

Sustavski pristup naglašava važnost cjelokupnog sustava u kojem dijete živi za razvoj darovitosti. Okolina je važna za darovitu djecu, od ranog utjecaja bliske okoline do utjecaja predškolskih i školskih institucija, ali i cijelog društva. Vlahović - Štetić (2008) ističe kako je Tannenbaum dao prvu definiciju darovitosti vezanu za sustavski pristup.

Čudina - Obradović (1991) navodi spoznaje koje su zajedničke brojnim istraživanjima darovitosti, a to su:

- darovitost je kombinacija sposobnosti i osobina ličnosti;
- javlja se u različitim domenama kao jedinstvena sposobnost ili kombinacija sposobnosti;
- može biti manifestna pa su rezultati vidljivi ili potencijalna koja će se razviti uz poticaje i potporu okoline.

### 3. MATEMATIČKA DAROVITOST

Matematika je po mnogo čemu u privilegiranom položaju u odnosu na ostale znanosti. Zbog svoje logičke strukture i aparata kojima se služi, ona predstavlja izuzetno plodan medij za privlačenje darovitih učenika u najmlađem uzrastu. Matematički ceh morao bi znati iskoristiti tu prednost i zadržati interes darovitih prema matematici za vrijeme čitavog školovanja (Elezović, 2005).

Govoreći o matematičkoj darovitosti neizbježno je govoriti i o matematici zato što su neophodni aspekti matematičke darovitosti podijeljeni u sposobnosti specifične za matematiku te s druge strane, kao i za ostala područja darovitosti, osobine ličnosti koje omogućuju razvoj matematičke darovitosti. Matematička darovitost se ne javlja isključivo kod matematičara već je ona odličje velikih filozofa, fizičara, znanstvenika, kemičara i biologa.

Mnogi povezuju matematičku nadarenost s logičko-matematičkom inteligencijom, koja se može poistovjetiti s općom intelektualnom sposobnošću. No osim visoke inteligencije matematički nadareni učenici pokazuju sposobnosti fleksibilnog mišljenja, originalnost, kreativnost i mnoge druge sposobnosti. Matematička darovitost ima svoju složenu strukturu koja prema Korenovej (1989) strukturi darovitosti podijeljenoj na sposobnosti, osim općih intelektualnih sposobnosti, sadrži stvaralačke sposobnosti, opće školske sposobnosti i rukovodne sposobnosti.

Čudina - Obradović (1991) predstavlja matematičku sposobnost kao rezultat aktivacije sljedećih užih sposobnosti:

1. numeričke sposobnosti: razumijevanje numeričkih simbola, značenje oznaka za različite matematičke operacije, razumijevanje pojma količine, razumijevanje numeričkih operacija, sposobnost čitanja i pisanja matematičkih simbola, razumijevanje numeričkih odnosa;
2. sposobnost pamćenja i planiranja koja je potrebna za sukcesivno rješavanje koraka u problemu kao i lanca zaključaka;

3. sposobnost prostornog predočavanja koja je potrebna za upotrebu papira i olovke, razumijevanje geometrije i prostornih odnosa;
4. sposobnost logičkog zaključivanja i uočavanja veza.

Numerička je sposobnost odvojena od govorne, verbalne sposobnosti zato što su najvažniji oblici numeričke sposobnosti proizvod desne hemisfere mozga, a za verbalne sposobnosti je odgovorna lijeva hemisfera. Ostale sposobnosti koje osim numeričke također sudjeluju u rješavanju problema matematičke prirode proizlaze iz funkcioniranja različitih dijelova mozga. Zato kod matematičke darovitosti ne možemo primijeniti lokalizaciju, nego kod nje zamjećujemo mnogo veću fleksibilnost mozga.

Pavleković (2009) ukazuje na to kako je bitno matematičku darovitost ne shvaćati kao konstantu koju učenik ili ima ili nema. Treba ju shvaćati kao potencijal koji je u većoj ili manjoj mjeri podložan napredovanju i razvoju. Potrebno je pratiti spoznajni razvoj i rast djeteta, poticati njegovu kreativnost te socio-emocionalni razvoj. Valja sagledati i okolinske činitelje koji utječu na razvoj djetetovih sposobnosti te se prema njima postaviti aktivno s ciljem povećanja djetetove šanse za realizaciju njegove darovitosti.

### **3.1 Karakteristike matematički daroviti učenika**

Mnogi matematičari, fizičari, znanstvenici i filozofi su već u najranijem djetinjstvu pokazali neke karakteristike koje ukazuju na osjetljivost na probleme i razvijeno zaključivanje. Čudina - Obradović (1991) ukazuje na tridesetogodišnje istraživanje koje su proveli Moss i Kagan. Prateći skupinu djece od rođenja do zrelosti uočili su da djeca koja su pokazivala vanjsku pasivnost i inhibiciju su postali u zreloj dobi produktivni matematičari i fizičari. Istraživači su zaključili kako bi inhibicija mogla ukazivati na veliku osjetljivost i koncentraciju pažnje na vanjske podražaje.

Bloom je svojim kasnijim istraživanjem odredio dvije karakteristike u djetinjstvu koje razlikuju buduće velike matematičare :

- postavljanje svrhovitih pitanja;
- usamljena aktivnost i sanjarenje (Čudina – Obradović, 1991).

Matematički nadarena djeca pamte odgovore na postavljena pitanja, primjenjuju dobivene odgovore u novim situacijama te su nezadovoljni ako je odgovor površan ili djetinjast. Drugu karakteristiku, potrebu za samoćom, uočavamo već u prvoj razvojnoj fazi kada se dijete samo igra kockicama i drugim igračkama. Kasnije su to samostalne aktivnosti čitanja i istraživanja. Tipično je da sanjare otvorenih očiju, a kad ih se *probudi* iz sanjarenja obično kažu kako su razmišljali o nekom problemu ili nešto zamišljali. Zbog toga ponekad izbjegavaju društvo druge djece ili odraslih i imaju potrebu da se povremeno izdvoje iz društva.

Bitne dvije karakteristike koje Čudina - Obradović (1991) navodi u adolescentskoj dobi matematički nadareni učenika su samostalno učenje i velika sposobnost za matematiku i/ili fiziku. Najveći dio znanja stječu samostalno iz knjiga i iz oponašanja drugih. Oni su malokad oduševljeni školskim učenjem i uglavnom nisu najbolji učenici, a često školu smatraju nužnim zlom. No u područjima koja ih zanimaju napreduju samostalno vrlo brzim tempom i nerado traže pomoć odraslih. Vole promatrati stručnjake iz područja koje njih zanima, zapažaju njihove strategije pri rješavanju problema, imitiraju njihove postupke, tehnike i organizaciju rada.

Kao druga karakteristika je navedena velika sposobnost za matematiku i/ili fiziku. Veliki matematičari i fizičari su rijetko kad bili zapaženi prije adolescencije. Oni uglavnom nisu bili dobri učenici. Često se kod njih pojavljuju specifične teškoće u učenju, naročito teškoće u početnom čitanju, što uvelike utječe na ukupno napredovanje u školi. No u završnim razredima srednje škole oni se izrazito ističu među svojim vršnjacima. Rješavaju probleme koji su drugima preteški, pa obično postižu najviše ocjene u matematici i fizici.

U djetinjstvu matematički nadareni učenika je uočeno da vole boraviti sama i biti socijalno izolirana dok se u adolescenciji dobro snalaze i napreduju u društvu sebi sličnih. Traže društvo slično sebi po interesima i sposobnostima.

Singer i suradnici (2016) ističu kako Krutetskii (1976) koristi naziv *matematičke postavke uma* pomoću kojeg opisuje matematički nadarene učenike koji, kako on kaže, promatraju svijet kroz *matematički objektiv*. To znači da matematički nadareni učenici imaju, među ostalim kompetencijama, sposobnost za brzu i široku generalizaciju matematičkih odnosa i operacija, te fleksibilnost mentalnih procesa.

Prirodno je da učitelj pri određivanju matematički nadareni učenika započne uočavanjem učenika koji matematiku uče brže od vršnjaka, dublje razumiju matematičke sadržaje i pokazuju poseban interes za matematiku. No to nisu jedine karakteristike matematički daroviti učenika.

Pavleković (2009) ističe kako je matematički darovit učenik onaj koji je brz, domišljat i točan te prihvaća prečace u računanju, sam ih osmišljava i uvježbava. Rado procjenjuje rezultat računa, a sposobnost procjene poboljšava vježbanjem, uvijek spreman za novo. Odbija li učenik prihvatiti domišljato računanje, nije kandidat za razvoj matematičke darovitosti.

U svome članku autor Greenes (1981) navodi sedam karakteristika po kojima možemo razlikovati matematički darovite učenike, a to su:

1. Lakoća formulacije problema

Kada se darovitom učeniku prezentira situacija, učenik generira pitanja o situaciji, a zatim nastavlja odgovarati na pitanja. Često, rješenje tih samo stvorenih problema obuhvatit će eksperimentiranje, stvaranje i organiziranje podataka.

2. Prilagodljivost u rukovanju podacima

Daroviti učenici imaju tendenciju koristiti razne nestandardne pristupe i strategije za rješavanje problema. Primjenjujući prethodno naučena znanja, nadaren učenik često vidi jednostavniju ili alternativnu strategiju za dolazak do rješenja zadatka.

3. Sposobnost organizacije podataka

Kada se daroviti učenici susretnu s problemima koji sadrže skup podataka, oni nastoje organizirati podatke u popise ili tablice kako bi otkrili strukture, šablone i odnose te kako bi bili sigurni da iscrpili sve mogućnosti.



#### 4. Hitrost uma

Nadareni učenici imaju razvijeno divergentno mišljenje i stvaraju jedinstvene asocijacije. Takvi učenici često odgađaju odgovor na postavljeno pitanje. To nije uzrokovano nesposobnošću rješavanja problema već je učenik možda otkrio nejasnoću u problemu, razmišlja o mogućim drugim rješenjima ili o alternativnim rješenjima.

#### 5. Originalnost u interpretaciji

Nadareni učenik često silazi s *utabanih puteva*. Odstupa od standardnog te vizualizira stvari iz drugih perspektiva.

#### 6. Sposobnost prenošenja ideja

Daroviti učenici s lakoćom prenose i primjenjuju znanje stečeno u jednoj situaciji na novu situaciju.

#### 7. Sposobnost generalizacije

Daroviti učenici temeljito istražuju stvari, promatraju odnose i generaliziraju te odnose.

Elezović (2005) izdvaja autore Holtona i Gaffneya (1994) te Millera (1990) koji navode sljedeće karakteristike rane darovitosti za matematiku:

- neuobičajeno zanimanje za brojeve i matematičke sadržaje;
- sposobnost razumijevanja i brze primjene novih ideja;
- sposobnost uočavanja obrazaca i apstraktnog razmišljanja;
- korištenje različitih nestandardnih postupaka;
- sposobnost prenošenja matematičkih postupaka u neuobičajene situacije;
- korištenje analitičkih, deduktivnih i induktivnih metoda zaključivanja;
- upornost u rješavanju teških i složenih problema.

### **3.2 Razlike matematički darovitih učenika i njihovi vršnjaka**

Matematički nadareni učenici imaju potrebe koje se razlikuju po prirodi od onih drugih učenika. Oni zahtijevaju određenu diferenciranu poduku koja od učitelja iziskuje stalnu uporabu različitih nastavnih pristupa, izmjenjivanje sadržaja, metoda i procesa. Johnson (2000) navodi tri bitne osobine po kojima se matematički nadareni učenici razlikuju od vršnjaka, a to su:

- brzina kojom uče;
- dubina njihovog razumijevanja;
- njihovo zanimanje za predmet.

Matematički sadržaji se prirodno nadovezuju te svojim brzim učenjem nadareni učenici lako savladavaju. Razlika u dubini razumijevanja i nivou apstrakcije moguća je u većini matematičkog gradiva zbog čega je važno postaviti granice i uočiti razlike. Ukoliko ne otkrijemo zanimanje za matematiku na vrijeme, riskiramo da se učenikov talent nikada ne razvije.

### **3.3 Brzina napredovanja matematički daroviti učenika**

Pri prvoj pomisli na darovite učenike većina dobije asocijaciju „brže usvajanje gradiva“. Elezović (2008) navodi kako je iskustvo pokazalo da daroviti učenici često usvajaju matematičke pojmove i tehnike predviđene za stariji uzrast. No teško je utvrditi poželjnu brzinu napredovanja darovitog pojedinca, jer je njegov napredak individualni proces. Učitelji bi trebali više cijiniti ulaženje u dubinu nekog pojma u odnosu na prelaženje na novo gradivo. Od darovitog učenika se očekuje primarno veća dubina razumijevanja i veća sposobnost samostalne interpretacije dobivenih rezultata.

Elezović (2008) prikazuje na američkom modelu brzinu napredovanja matematički darovitih učenika.

Do kraja drugog razreda darovit učenik treba:

- čitati, pisati i razumjeti cijele brojeve i mjesne vrijednosti znamenki do jednog milijuna;
- zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti cijele brojeve do tisuću
- zbrajati i oduzimati razlomke jednakih nazivnika;
- rješavati zadatke s riječima koristeći osnovne računске operacije s cijelim brojevima;
- procijeniti i mjeriti veličine koristeći sustav jedinica;
- koristiti matematički jezik za prijenos zaključaka dobivenih analizom podataka;
- identificirati i klasificirati osobitosti geometrijskih oblika.

Do kraja trećeg razreda daroviti učenik treba:

- čitati, pisati i razumjeti brojeve do jedne milijarde;
- zbrajati, oduzimati i množiti brojeve do jednog milijuna;
- zbrajati, oduzimati i dijeliti razlomke nejednakih nazivnika;
- uspostaviti matematičku vezu između razlomaka i decimalnog zapisa;
- rješavati riječima zadane probleme koji uključuju temeljna operacije s cijelim brojevima i razlomke;
- procijeniti i opravdati rješenje problema koji iziskuje osjećaj za brojeve;
- prikupljati i analizirati podatke koristeći matematički jezik;
- usporediti i opravdati karakteristike geometrijskih oblika;
- primijeniti rješavanje problema u situacije iz stvarnog života;
- interpretirati dijagrame, tablice i grafove;
- primijeniti formule na kvadrat, pravokutnik, trokut i krug.

Do kraja četvrtog razreda daroviti učenik treba:

- vršiti operacije s cijelim brojevima, decimalnim brojevima i razlomcima;

- zapisati, interpretirati i rješavati riječima zadane probleme koji uključuju temeljne operacije s cijelim brojevima, razlomcima i decimalnim brojevima;
- identificirati, poredati, zaokružiti i usporediti cijele brojeve, razlomke i decimalne brojeve;
- prikupljati i analizirati podatke koristeći matematički jezik za priopćavanje zaključaka i opravdanje teorija;
- računati duljinu, površinu i obujam uobičajenih geometrijskih oblika;
- primjenjivati U.S. sustav, metrički sustav i mjerne tehnike u problemima realnog života;
- interpretirati i načiniti dijagrame, tablice i grafove;
- provoditi decimale i razlomke u postotke.

Prema HNOS-u (2006) neke od ovih nastavnih tema se razlikuju od hrvatskog nastavnog plana i programa. No može se vidjeti kako su nadareni učenici jedan razred ispred svojih vršnjaka po dubini usvojenog gradiva. Elezović (2008) navodi kako će učenik doista nadaren za matematiku premašiti svog nastavnika negdje krajem drugog razreda srednje škole u sposobnosti apstrakcije, generalizacije i rješavanja iznimno teških zadataka.

#### 4. IDENTIFIKACIJA DAROVITIH UČENIKA

U većini zemalja svijeta školskim se sustavom nastoji obuhvatiti što šira populacija u proces obrazovanja s tendencijom pružanja prilika za školovanje svakog pojedinca (Pavleković, 2009). Uključujući sve te raznolike pojedince u isti obrazovni sustav nailazimo na učenike od kojih svaki ima razvijene svoje interese, potrebe, želje te dolazi iz različite okoline. Među svim tim učenicima pojavljuju se i daroviti učenici. Zakon o odgoju i obrazovanju u osnovnim i srednjim školama u članku 63. nalaže svim školama u Hrvatskoj obavezu uočavanja, praćenja i poticanja darovitih učenika. Vizek-Vidović i suradnici (1996) upućuju da proces identifikacije valja započeti što ranije kako bi dijete na vrijeme dobilo dovoljan poticaj za razvoj svih potencijala. Stepanek (1999) upozorava da visoki rezultati na testovima inteligencije i dobre ocjene mogu biti indikator darovitosti, ali ne jedini, tu postoji još mnogo faktora koje je potrebno sagledati pri identifikaciji. Poznato je da djecu s obzirom na intelektualne sposobnosti možemo razlikovati već i u predškolskoj dobi. U školama je nužno organizirati proces identifikacije darovitih učenika kako bi se organizirao dodatni rad prema njihovim sklonostima, sposobnostima i interesima te kako bi se svakom učeniku s visokim potencijalom pružila prilika da ga razvije.

Koren (1989) navodi kako pri pojavi nadarenosti možemo razlikovati dva osnovna pristupa promatranja. Prvo spontano opažanje, regeneriranje i opisivanje iskazivanja nadarenosti kad je određeni pojedinci izraze. Drugi pristup je organizirano sistematsko utvrđivanje indikacija nadarenosti u definiranoj skupini pojedinaca, bez obzira jesu li te indikacije na manifestiranoj ili potencijalnoj razini.

Postoje različite vrste darovitosti kojima su podloga različite sposobnosti i njihove kombinacije, pa zato nema univerzalne identifikacijske metode. Potrebno je izraditi različite setove postupaka prema tipu nadarenosti. Prema Georgeu (2005) možemo postupke identifikacije kategorizirati u tri glavna područja:

- primjena mjernih skala i listi za provjeru;
- primjena različitih vrsta standardiziranih testova;
- nastavnikova procjena.

Bitno je da svaki program identifikacije mora polaziti od složenosti i međusobne uvjetovanosti faktora koji rezultiraju pojavom nadarenosti. Uzimaju se u obzir nasljedni i okolinski faktori, pa i kognitivne i konativno-motivirane osobine učenika. Također je osim nužnih metoda kvantitativnog određivanja nadarenosti potrebno osigurati i kvalitativni pristup kojim se omogućuje analiza mentalnih procesa ispitanika. Takvo ispitivanje uključuje longitudinalno promatranje ponašanja učenika, mišljenje kvalificiranih procjenjivača, opažanje reakcije ispitanika tijekom individualnih testiranja, analiza različitih proizvoda kandidata, njihovo samoprocjenjivanje i slične postupke.

Pri identifikaciji darovitih učitelji često miješaju darovitu i bistru djecu. Jednako je bitno otkriti i bistro dijete kako bi im pružili priliku da pridonese svojem učenju kroz prilagođeni program i kreativno okruženje, te tako možda i oni upadnu u skupinu daroviti učenika. Cvetković Lay i Sekulić Majurec (2008) donose neke od bitnih razlika između darovitog i bistrog djeteta kako bi lakše razumjeli darovitu djecu.

BISTRO DIJETE	DAROVITO DIJETE
Zna odgovore	Postavlja pitanja
Zainteresirano je	Iznimno je radoznalo
Ima dobre ideje	Ima neobične ideje
Trudi se pa dobro prolazi na testovima	Zaigran je, a ipak dobro prolazi na testovima
Odgovara na pitanja	Raspravlja do detalja, razrađuje, usavršava
Vođa je skupine	Samosvjesno je, često radi samo
Sluša s interesom	Iskazuje snažne osjećaje i stavove o onome što sluša
S lakoćom uči	Već zna
Uživa u društvu vršnjaka	Više voli društvo odraslijih i odraslih
Shvaća značenje	Samostalno izvodi zaključke
Osmišljava zadatke i uspješno ih rješava	Inicira projekte

Mirno prima zadatke i poslušno ih izvršava	Zadatke prima kritički, a ako ga zanimaju njima se bavi intenzivno i strastveno
Točno kopira zadano	Kreira nova rješenja
Dobro koristi naučeno, dobar je tehničar	Traži nove mogućnosti primjene naučenog, ponaša se kao mali izumitelj
Zadovoljno je vlastitim postignućima	Vrlo je samokritično

Tablica 1. Razlike između bistroga i darovitog djeteta (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008, str. 34)

Kako bismo mogli lakše prepoznati matematički darovite i potencijalno darovite Pavleković (2009) dijeli učenike u četiri skupine s obzirom na njihovu darovitost za matematiku:

#### 1. Potencijalno daroviti učenici

Potencijalno darovite učenike definira kao učenike koji brže uče od svojih vršnjaka, razlikuju se od njih u dubini razumijevanja i razini apstrakcije te pokazuju ustrajnost u radu. Uče aktivno, uspostavljaju kontrolu nad vlastitim napredovanjem, kritički analiziraju svoja postignuća i spremniji su od svojih vršnjaka na razne oblike obrazlaganja svojih rezultata. Motiviraniji su i podržavani od vanjskih činitelja prema realizaciji svojih mogućnosti u matematici. Stalo im je do sučeljavanja s vršnjacima i vanjske potvrde o svom napredovanju. Imaju svoje mišljenje zbog kojeg mogu doći u sukob s vršnjacima i učiteljem.

#### 2. Učenik iznadprosječnih matematičkih sposobnosti

To su učenici koje učitelji najčešće nazivaju bistrom djecom. Svojim znanjem, vještinama i primjeni matematike nadmašuju djecu vršnjačke dobi, osobito kada je u pitanju primjena elementarnih matematičkih znanja i vještina na rješavanje problema iz svakodnevice. Motivacijom i marljivošću često zasjenjuju djecu koja su potencijalno darovita iz razloga što potencijalno daroviti, zbog svoje brzine uma, često preskaču važne korake u zaključivanju te tako ostavljaju dojam površnosti. Točno rješavaju zadatke po analogiji, ali osjećaju nesigurnost i postižu slabije rezultate

rješavajući nestandardne zadatke i kada su izloženi zaključcima za koje je potrebno dublje razumijevanje i viši nivo apstrakcije od onoga što se predviđa za učenike vršnjačke dobi.

### 3. Učenik prosječnih matematičkih sposobnosti

Razlikuje se od darovitog i potencijalno darovitog učenika po tome što ne pokazuje poseban interes za matematiku. Postignuća ovoga učenika u okvirima su očekivanja onoga što bi trebao postići i onoga što je postigao. Prikladnim metodama učenja u redovitoj nastavi sustavno ga se potiče na odgovarajući razvoj matematičkih kompetencija. U stanju je najelementarnija zbivanja iz okruženja uspješno povezati sa svojim matematičkim znanjima i vještinama.

### 4. Učenik ispodprosječnih sposobnosti za matematiku

To je učenik čija zatečena znanja, vještine i sposobnosti iz matematike, uvažavajući dodatnu pomoć okoline, ukazuju na disproporciju učenikovih postignuća i postignuća učenika vršnjačke dobi s prosječnim sposobnostima. Za postizanje očekivanih osnovnih matematičkih kompetencija toga djeteta potrebna je dodatna podrška učitelja i okolinskih činitelja, a ponekad i prilagođen program.

Proces identifikacije nadarene djece potaknut je željom da se o njima više sazna kako bi im se pružio odgovarajući program obrazovanja te kako bi im se ponudili dodatni materijali za obogaćivanje i razvijanje darovitosti.

Tragajući za matematički darovitim učenicima mlađe školske dobi, učitelja valja ohrabriti da skrene pogled i na one učenike koji nemaju visoku uspješnost u rješavanju analognih zadataka, ali znaju zablizati originalnim rješenjima, uočenim uzročno-posljedičnim odnosom, izvrsnom procjenom, a također kada uoči brze i točne reakcije u matematičkim igrama koje djeca u pravilu ne doživljavaju kao matematiku (Pavleković, 2009).

Za prepoznavanje matematičke darovitosti učenika od presudnog je značenja proučavanje učenikova djelovanja od strane kompetentnog učitelja. Dobro je nekada izložiti učenike zadacima koje još nisu učili, ali ih mogu riješiti ukoliko su odgovarajuće usvojeno znanje spremni poopćiti na višoj razini. Baš ta sposobnost



savladavanja prepreka i nalaženja zaobilaznih puteva tamno gdje se ne vidi izravan put rješavanja zadataka izdvaja matematički darovitog učenika od ostalih.

#### 4.1 Liste i skale za procjenu

Osnovna je karakteristika svih metoda procjenjivanja da se pomoću njih izravno utvrđuju neke određene osobine i da je pritom instrument tog određivanja čovjek, odnosno u procjeni darovitosti učitelj, roditelj ili psiholog. Prema tome procjene nikada nisu objektivne, već su podložne subjektivnim greškama. Kako bi se te greške ublažile Koren (1989) navodi kako procjenjivane osobine moraju biti jasno definirane, mora biti osigurano optimalno vrijeme opažanja i procjenjivači moraju biti osposobljeni za procjenu.

Procjenjivati možemo razvijenost odgovarajućih osobina ili vrijednost duhovnih i materijalnih proizvoda učenika kojeg promatramo. Procjenjujući osobine možemo prepoznati darovite i potencijalno darovite učenike. Promatrajući neki učenikov produkt, u ovom slučaju način rješavanja zadataka, procjenjujemo njegovu vrijednost u odnosu prema određenim standardima i u odnosu na njegove vršnjake. Ako se proizvod nekog učenika po svojoj složenosti, kvaliteti i kreativnosti manje ili više izdvaja iz iskustvenih normi njega smatramo darovitim.

Postoje mnoge vrste lista za procjenu, neke su kratke i sažete dok su druge opširne i pokrivaju različite pojedinosti. George (2005) u svojoj knjizi prikazuje primjer jedne liste za provjeru matematičkih sposobnosti. Lista se sastoji od niza da/ne pitanja i njihovih pojašnjenja, a potrebno je procijeniti pokazuje li dijete sljedeće karakteristike:

- Upornost u traženju najboljeg i najjednostavnijeg rješenja problema? Djeca koja imaju dara za matematiku ne umaraju se lako kad su zaokupljena rješavanjem nekog zadatka. Jedanaestogodišnji i dvanaestogodišnji učenici, primjerice, mogu raditi bez prekida do tri sata prije nego što počnu pokazivati znakove slabije uspješnosti.
- Pokazuju li djeca samopouzdanje u novoj matematičkoj situaciji, u kojoj su spremna imati inicijativu u rješavanju nečeg novog? Djeca će

izjaviti nešto poput: „Znam, pokušat ću ovo i ovo“ ili „Ne, to ne može biti dobro jer...“ ili „Gledaj, pokazat ću ti“.

- Otvorenost uma? Matematički darovita djeca odvagat će dokaze i biti spremna promijeniti gledište u skladu s dokazima.
- Stalno sami sebi zadaju probleme tijekom nastave i kod kuće? Primjerice: „Koliko bi ljudi moglo stati na igralištu stadiona u Wembleyju?“, „Koliko sekundi traje ljudski život?“, „Koliko površinu možeš vidjeti s vrha tornja?“, itd.
- Kratko, čak lakonski izražavanje misli? Ovo se u matematici može vidjeti kao otpor djeteta, u ranim fazama, da napiše cijelo rješenje problema koji mogu riješiti u glavi.
- Općenito se zanima za brojeve? Na primjer brojevi automobila imaju posebne osobine, 219 je djeljiv s tri, itd.
- Općenito se zanima za uzorke u obliku?
- Često je u stanju pronaći kraticu do rješenja problema jer želi izbjeći standardne metode?

Mjerne skale, iako slične, su prema Georgeu (2005) pouzdanije od subjektivnih općenitih kontrolnih listi za procjenu. Mjerne skale sadrže niz činjenica u kojima učitelj najčešće brojčano procjenjuje koliko se one odnose na pojedinog učenika. Čudina - Obradović (1991) prikazuje primjer skale prema Karnes i Shwedel (1983).

<b>Znakovi logičko-matematičke nadarenosti u dječjoj dobi</b>			
Dijete pokazuje:	Rijetko	Ponekad	Često
1. interes za brojanje predmeta 2. interes za mjerenje predmeta 3. Interes za slaganje po veličini 4. lako baratanje operacijama 5. interes i razumijevanje za pojmove vezane za vrijeme (satovi, kalendari) ili novac 6. razumijevanje i pamćenje matematičkih simbola /+, -, x, :/ 7. interes ili naročitu vještinu u klasificiranju (grupiranju) predmeta 8. dugotrajnu pažnju za sve što je vezano za prirodu ili tehniku 9. razumijevanje i interes za uzroke i posljedice (biljke trebaju vodu; voda se smrzava zimi) 10. pažljivo promatra zbivanja 11. s velikom pažnjom istražuje predmete			

Tablica 2. Mjerna skala za procjenu logičko-matematičke darovitosti prema Karnes i Shwedel (Čudina-Obradović, 1991, str. 145)

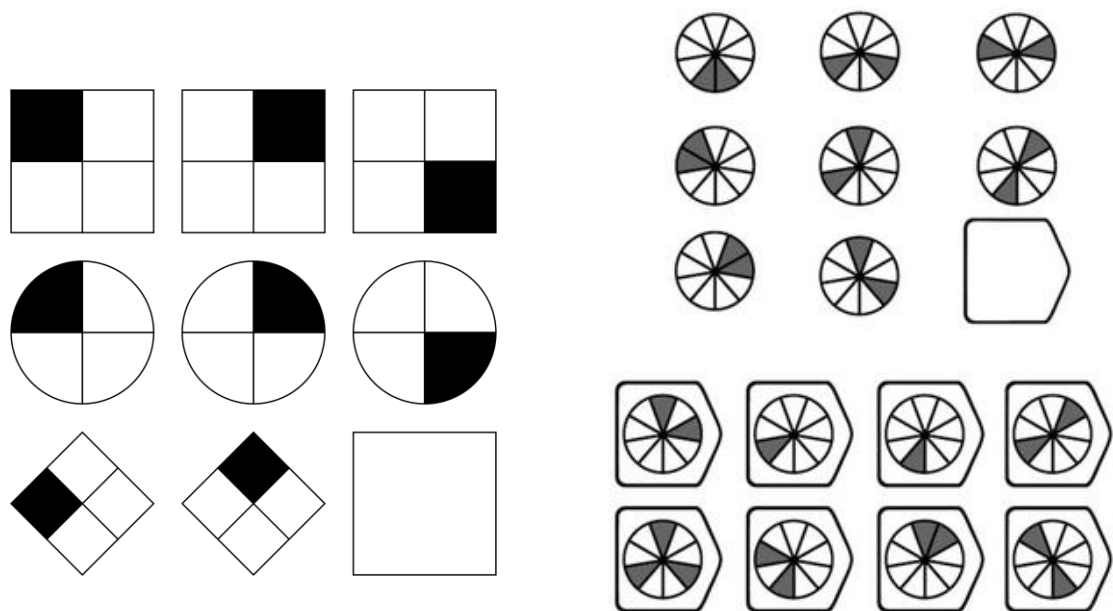
#### **4.2 Testovi za otkrivanje darovitosti**

Pod testiranjem razumijevamo stručnu primjenu standardiziranih mjernih instrumenata za utvrđivanje i mjerenje sposobnosti i ostalih osobina ljudi. Za svaki takav instrument znamo što se njime mjeri, koliko je pouzdan u onome što mjeri, koliko je osjetljiv u diferenciranju različitih ispitanika u predmetu mjerenja i koliko su objektivni podaci koji se njime prikupljaju. Takvi nam instrumenti omogućuju da temelju normi utvrdimo relativni položaj svakog ispitanika u populaciji s obzirom na mjerenu sposobnost ili osobinu (Koren, 1989). Pri klasifikaciji darovitih učenika mjerimo njihova znanja, umijeća i sposobnosti.

Učenici se tokom cijelog školovanja susreću s testovima. Dobri rezultati na testovima akademskog postignuća su možda ono zbog čega se prvo identificiraju daroviti učenici, barem u školskoj sredini, jer takve sposobnosti učitelj brzo i lako uoči. Ti rezultati jasno govore da je učenika moguće identificirati kao iznadprosječno uspješnog u akademskim predmetima, ali postoje mnoge druge karakteristike povezane s time kako daroviti učenik pristupa zadatku, njegove vještine učenja i primjena stečenog znanja. Dobiveni rezultati na testovima su objektivni te nam oni mogu potvrditi naše prve dojmove ili nas potaknuti da ih promijenimo s obzirom na dobivene objektivne dokaze.

#### **4.2.1. Standardne progresivne Ravenove matrice**

Pri procjenjivanju matematičke darovitosti psiholozi u školama najčešće rabe skup Standardnih progresivnih Ravenovih matrica. Pavleković (2009) iskazuje kako je to široko upotrebljavan neverbalni test analitičke inteligencije dizajniran za procjenu intelektualnih sposobnosti, sposobnosti razmišljanja, te sposobnosti zaključivanja iz složenih podataka. Fajgelj i suradnici (2007) navode kako je Raven konstruirao 1947. godine Ravenove progresivne matrice u boji kao alternativu standardnim progresivnim matricama i namijenio ih djeci od 5 do 11 godina. One se koriste za individualno ili grupno ispitivanje inteligencije kod djece tog uzrasta u trajanju oko 60 minuta. Pavleković (2009) upućuje na autore Pind i dr. (2003) koji su ispitali vjerodostojnost Ravenovih matrica u vezi s postignućima u školi. Pokazale su najveću korelaciju u rezultatima dobivenim za matematički predmet, a najnižu u jezičnim predmetima. Ravenove matrice su pogodne za sve razine sposobnosti, imaju razrađena pravila za različite dobne skupine i kulture, lake su za administriranje i ocjenjivanje, pa nisu ovisne o kulturi niti jeziku.

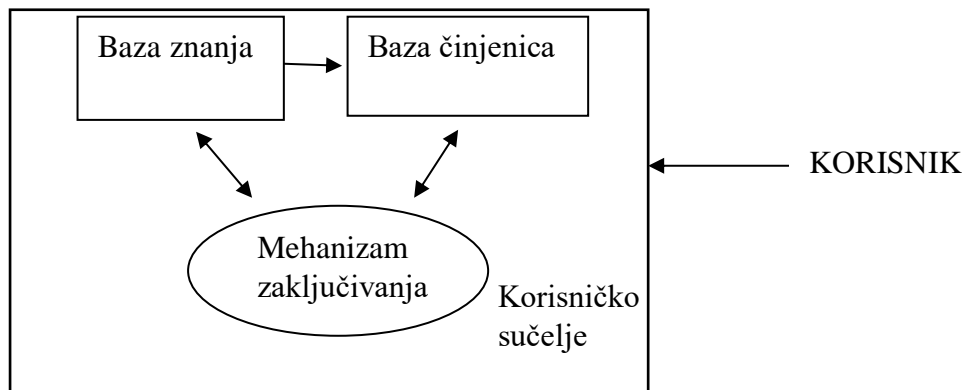


Slika 2. Primjeri zadataka Standardnih progresivnih Ravenovih matrica

Testovi nisu sastavljeni s namjerom da djeca točno riješe svako pitanje, iako će to poći za rukom velikom broju sposobne djece. Ovisno o težini određenog testa, katkad će djeca morati riješiti samo 50 posto kako bi njihova uspješnost bila srednja ili prosječna za njihovu dob (George, 2005). Uvijek nas neki učenici mogu iznenaditi s boljim rezultatima od očekivanih. Daroviti učenici najčešće uživaju u rješavanju ovakvih vrsta testova. Često dolazi do razlika u tome kako učitelj očekuje da će učenici reagirati na testove i njihove stvarne uspješnosti. Iz toga razloga su ti testovi važni jer pobijaju subjektivan dojam o pojedinim učenicima. Također jedna od bitnih stvari pri provođenju testa je da se učenici osjećaju potpuno opušteno i ugodno kako bi bili dovoljno motivirani da daju sve od sebe.

#### 4.3 Ekspertni sustav za prepoznavanje učeničke darovitosti iz matematike

Pavleković (2009) prema Miljošević i Maršić (1991) navodi kako su ekspertni sustavi računalni programi koji mogu zamijeniti ljudskog eksperta u donošenju neke odluke. Osim što nude savjet u donošenju odluke, takvi sustavi mogu koristiti i objasniti postupak kojim su došli do rješenja prikazom svojeg znanja kojim su se koristili.



Slika 3. Prikaz strukture ekspertnog sustava (Pavleković, 2009, str. 45)

Baza znanja izvor je znanja o nekom području prikupljen od eksperta za to područje. Baza činjenica predstavlja skup činjenica o stanju nekoga problema koji se rješava, npr. ocjene učenika. Mehanizam zaključivanja upravlja traženjem puta do rješenja problema, pri čemu se traženje zbiva tako da se ispituju činjenice u bazi činjenica i znanja u bazi znanja. Korisničko sučelje omogućuje komunikaciju između korisnika i ekspertnog sustava, sadrži mehanizam objašnjavanja načina na koji je sustav došao do rješenja. Važno je da sučelje bude takvo da korisniku komunikaciju sa sustavom učini što lakšom i pristupačnijom (Pavleković, 2009).

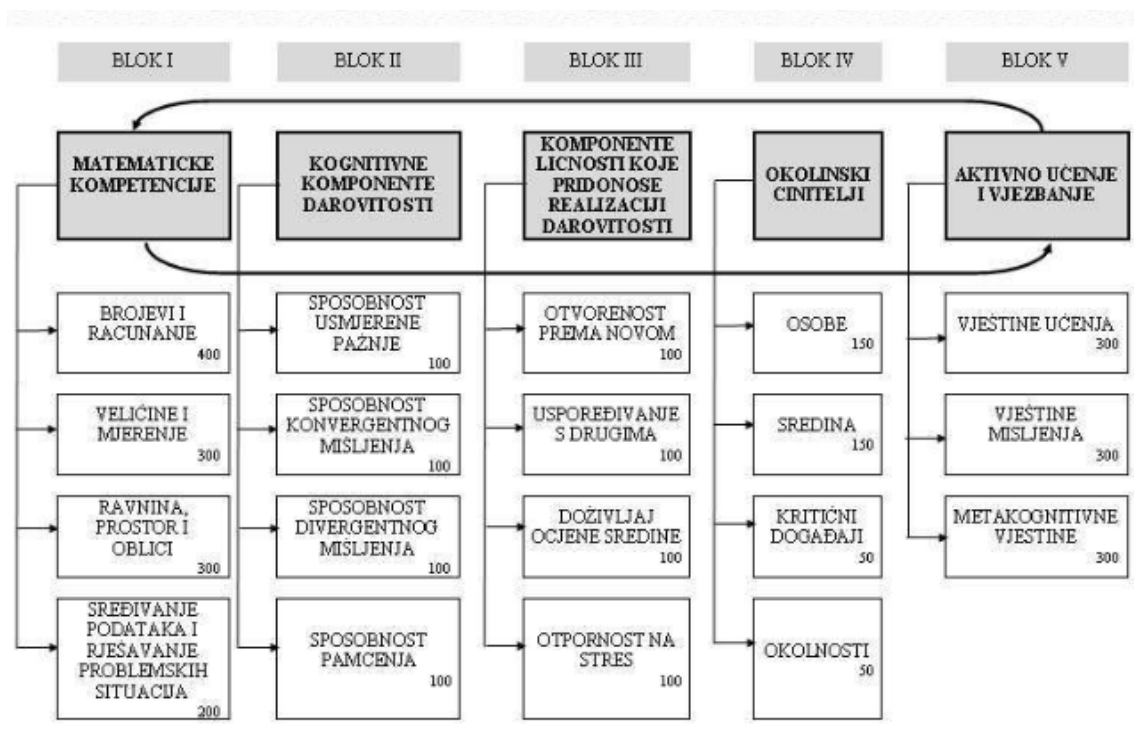
Na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Osijeku kreiran je ekspertni sustav pod nazivom Mat-dar. Kreiran je tijekom četverogodišnjeg, neposrednog rada i istraživanja tima sveučilišnih nastavnika, studenata i učitelja. Prilikom kreiranja poduzeti su sljedeći koraci:

1. definiranje problema koji se rješavaju ekspertnim sustavom s brojem mogućih opcija;
2. dizajniranje baze znanja – definiranje varijabli;
3. definiranje produkcijskih pravila i bodovanje opcija;
4. dizajniranje korisničkog sučelja;
5. testiranje i uporaba ekspertnog sustava;
6. statistička usporedba procjena ekspertnog sustava s procjenom učitelja.

Mat-dar ekspertni sustav donosi odluku o kategoriji matematičke darovitosti učenika. Moguće opcije krajnje odluke su ranije spomenute četiri kategorije koje je

definirala autorica Pavleković (2009), a to su: potencijalno darovit učenik, učenik iznadprosječnih matematičkih sposobnosti, učenik prosječnih matematičkih sposobnosti i učenik s nedovoljno razvijenim sposobnostima za matematiku.

Pavleković (2009) objašnjava kako su pri kreiranju baze znanja uključili prosudbu o matematičkim kompetencijama učenika, kognitivnim komponentama darovitosti, komponentama ličnosti koje pridonose razvoju darovitosti, okolinskim činiteljima kao i učinkovitim metodama učenja i vježbanja kojima se potiče razvoj matematičkih kompetencija te moguća realizacija darovitosti. Svaka od tih pet skupina različitih kompetencija u modelu je predstavljena blokovima, koji su raščlanjeni na podblokove, odnosno podskupove kompetencija, te konačno na same varijable koje čine produkcijska pravila. Ovisno o značenju pojedinog bloka na odluku o izboru opcija, definirani su i bodovi za svaki blok.



Slika 4. Komponente darovitosti za matematiku uključene u bazu znanja ekspertnog sustava s bodovima koji određuju značaj pojedine komponente (Pavleković, 2009, str. 47)

Blokom I se u procjenu darovitosti uključuju učenikova znanja i vještine računanja i mjerenja, sposobnosti korištenja matematičkog jezika i komunikacije, sposobnosti rješavanja problema i modeliranja, kao i sposobnost matematičke argumentacije. Blokom II se preispituje povećava li se promjenom strategija učenja kod učenika sposobnost usmjerene pažnje, sposobnost iznalaženja puta rješavanja te sposobnost brzog pretraživanja podataka iz dugoročnog pamćenja. Blokom III se preispituju komponente ličnosti koje pridonose realizaciji darovitosti koje se mogu, a i ne moraju zamjećivati. Blok IV vrednuje okolinske činitelje odnosno koliko pojedine osobe, događaji i sredina utječu na učenika. Također je važno promišljati o tome poboljšavaju li se aktivnim učenjem i vježbanjem kod učenika vještine učenja, vještine mišljenja te metakognitivne vještine. Takva zapažanja se procjenjuju u bloku V.

Na temelju tih varijabli definirani su logički blokovi u obliku if-then produkcijskih pravila, gdje pri odabiru istine ili laži povlače odgovarajuće vrijednosti opcija u odluci ekspertnog sustava. Ukupna baza se sastoji od 250 produkcijskih pravila. Nakon što se odgovori na pitanja ekspertnog sustava on prikaže na korisničkom sučelju ostvareni broj bodova za učenika te kategorije i raspon bodova po kategorijama kako bi znali kojoj kategoriji učenik pripada.

S obzirom da je ekspertni sustav Mat-dar temelji na pet različitih komponenti darovitosti, a ne samo na matematičkim kompetencijama, takav metodološki alat može učiteljima proširiti opseg informacija koje će uzeti u obzir kada odlučuju o darovitosti djeteta (Pavleković, 2009). Također jedni od novijih inteligentnih sustava koje učitelji danas mogu koristiti su sustavi zasnovani na neuronskim mrežama, koje također za ulaz koriste varijable koje opisuju istih pet osnovnih komponenata matematičke darovitosti (Pavleković, Zekić-Sušac, Đurđević, 2011).



## 5. RAD S MATEMATIČKI DAROVITIM UČENICIMA

Priroda darovitosti kao i načini na kojima se može zadovoljiti priroda matematički daroviti su relativno neistražena područja. Ipak, dosadašnja istraživanja koja navodi Pavleković (2009) pokazuju da matematički daroviti učenici trebaju imati pristup aktualnim matematičkim sadržajima te da je poželjno da budu izloženi autentičnim matematičkim problemima. Kurikul za matematički darovite mlađe učenike treba osmisлити tako da ih potakne na suradnički rad. On osim obrazovnih pruža i velika emocionalna iskustva, potiče učenike da uče jedini od drugih te si međusobno pomažu i ohrabruju. Učenici najbolje uče u okolini koja im je naklonjena, emocionalno sigurna, potiče njihovu znatiželju i neovisnost, uključuje korištenje raznolikih materijala te povezuje školsko iskustvo s onim iskustvom izvan škole.

### 5.1 Obogaćivanje kurikula

Obogaćivanje kurikula treba biti dobro promišljeno i pažljivo provedeno te, kako George (2005) navodi, da bi bio uspješan on mora postaviti ciljeve, učenje učiniti uzbudljivim i dovesti do boljeg razmišljanja. No prilikom obogaćivanja moramo voditi računa o ovim ciljevima:

- sadržaj širi od nacionalnog kurikuluma;
- izloženost nizu različitih tema;
- sadržaj po odabiru učenika;
- visok stupanj složenosti sadržaja;
- maksimalno postignuće u temeljnim vještinama;
- kreativno mišljenje i rješavanje problema;
- motiviranost.

Većina učitelja provodi obogaćivanje tako da pišu odgovarajuće nastavne listiće, modificiraju zadatke i potiču djecu da rješavaju više zadataka. No proces obogaćivanja je više nego puko osiguravanje zahtjevnih nastavnih materijala. Obogaćivanje je aktivnost koja je u funkciji nastavnikove fleksibilnosti, osjetljivosti na individualne potrebe, osjećaja za vrijeme i njegova poznavanja predmetnog područja. (George, 2005).

## 5.2 Učenje matematike otkrivanjem i vođenim otkrivanjem

Jedna od mnogih metoda aktivnog učenja i poučavanja je i *učenje otkrivanjem* odnosno *istraživanjem*. Ovu metodu Pavleković (2009) smatra izrazito pogodnom za rad s matematički darovitim i potencijalno darovitim učenicima. Neki bi rekli da je naziv *učenje otkrivanjem* preambiciozan iz razloga što učenici ne mogu doći do nekih revolucionarnih matematičkih otkrića. No naglasak ovakve vrste nastave nije na rezultatu otkrića nego na procesu učenja koji vodi prema otkriću.

To je prema Pavleković (2009) nastavna strategija kojoj se nakon zadavanja zadataka, problema, izricanja traženog pojma, veze ili zakonitosti s učenicom ponove predznanja i postupci koji su neophodni za rješavanja ili otkrivanje nepoznatoga. Pripreme se materijali i pomoćna literatura, a zatim se prepusti učenicima da pokušajima i pogreškama, međusobnim raspravama testiraju svoje ideje sve dok samostalno ne otkriju tražena rješenja. Učenici mlađe školske dobi često ne znaju započeti zadatak ako ih taj zadatak svojim sadržajem ne podsjeća na standardni. U toj dobi se često javlja da učenik vlada definicijama traženih i za zadatak nužnih pojmova i veza, ali mu nedostaje analitička vještina za kombiniranje i povezivanje svih tih činitelja prema rješavanju. Iz tog razloga se u nastavi matematike s učenicima mlađe školske dobi koristi strategija, koja je u knjizi autorice Pavleković (2009) prema Resnik i Foord (1981), definirana kao *vođeno učenje otkrivanjem*.

*Vođeno učenje otkrivanjem* je takva strategija učenja u okviru koje učitelj vodi učenike kroz sve korake prema rješenju, a onda im prepušta da samostalno opaze to rješenje, samostalno ga uobliče te time prožive ugodu otkrića. Pavleković (2009) upozorava da je važno da se učitelj ne razočara ukoliko uoči da je samo nekolicina njegovih učenika iz skupine zaista svojim razmišljanjem proživjela otkriće. Većina učenika će tek uz dodatno objašnjenje naknadno razumjeti ono do čega se došlo. Važno je hrabriti i podupirati pokušaje, a ne samo uspjehe učenika.

U nizu tema zakonski propisanih nastavnim programom treba otkriti teme koje su pogodne za pažljivo planiranje učenikovih otkrića. Pavleković (2009) predlaže rad na *matematičkim otkrićima* s učenicima nižih razreda u okviru sljedećih tema:

- domišljato računanje i induktivno zaključivanje;

- veličine i mjerenja;
- ravnina, prostor i oblici;
- usvajanje matematičkih koncepata mjerenjem;
- sređivanje i obrada podataka.

### 5.2.1 Domišljato računanje i induktivno zaključivanje

Bez znanja računanja učenik ne bi bio u mogućnosti doći do matematičkog zaključivanja, no računanje nije najvažniji element. Domišljatost i brzina računanja su najčešće indikatori matematičke darovitosti u nižim razredima osnovne škole. Domišljatost računanja, odnosno pronalaženje različitih načina rješavanja zadataka, se provjerava različitim načinima rješavanja zadataka, uporabom različitih zakonitosti do kojih učenici sami dođu, ali i sa zadacima računanja u kojima su djelomično izbrisane znamenke kod članova računskih operacija i/ili rezultata.

Pavleković (2009) prikazuje primjer zadatka sa školskog natjecanja četvrtih razreda u kojem se provjerava domišljatost računanja te objašnjava kako bi učenih prosječnih sposobnosti riješio, a kako potencijalno darovit. Zadatak glasi:

Primjer 1. *Prikaži broj 12 kao umnožak prirodnih brojeva tako da i zbroj tih faktora bude 12. Ispiši sve mogućnosti.* (Pavleković, 2009, str. 69)

Učenik prosječnih sposobnosti uglavnom će se držati prve ideje:  $3 \times 4 = 12$  i ostati zbunjen, jer  $3 + 4 = 7$ , a ne 12, također je i  $2 \times 6 = 12$ , ali  $2 + 6 = 8$ . Potencijalno darovit učenik riješit će zadatak u cijelosti:

$$12 = 2 \times 6 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

$$2 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$$

$$12 = 3 \times 4 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

$$3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$$

$$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$$

Proučavanjem i pokušajima rješavanja operacija u skupu prirodnih brojeva daje se učeniku prilika za sagledavanje pravilnosti i izvođenje općenitijih zaključaka. Tako ga se usmjerava prema domišljatom računanju, a priprema ga se i za razumijevanje metode matematičke indukcije.

Kako bi učenicima bilo lakše savladati indukciju u višim razredima valja kod učenika razviti sposobnosti uočavanja, uspoređivanja, uopćavanja i postavljanja hipoteza induktivnim zaključivanjem te treba dovoljno rano ukazati da hipoteze postavljene induktivnim zaključivanjem mogu biti netočne. U tu svrhu s nadarenim učenicima se rade zadatci s induktivnim zaključivanjem.

Primjer 2. *Promotrimo zbroj triju uzastopnih cijelih brojeva.* (Pavleković, 2009, str. 70)

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

Učenik mlađe školske dobi je u stanju otkriti pravilnosti. Uočavaju da je svaki od zbrojeva tri uzastopna broja višekratnik broja 3. Od učenika viših razreda se očekuje da uočenu pravilnost znaju općenitije zapisati:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

### 5.2.2 Mjerenje, procjenjivanje i određivanje veličina

Aktivnost mjerenja motivira učenike na proučavanje veza iz naše okoline, što mlađim i vrlo znatiželjnim učenicima može biti vrlo zanimljivo. S mjerenjem i procjenom se učenici mogu susresti i u svakodnevnim aktivnostima te ih mogu povezati s matematikom, ali i geometrijom i obradom podataka.

„Mjereći učenici imaju priliku procjenjivati, a podatke dobivene mjerenjem prikazati na različite načine – tablicama ili grafički, te ih interpretirati. Mjerenje daje priliku učitelju da svoje učenike navede na različita *otkrića* (Pavleković, 2009, str. 81).“

S učenicima se mogu koristiti zadatci mjerenja i određivanja obujma različitih geometrijskih tijela, određivanjem obujma nepravilnih tijela, mjerenje proizvoljnih likova, pronalaženjem polovišta stranica različitih likova, itd.

Mjerenjem i primjenom znanja o približnim vrijednostima pruža se učenicima prilika za usvajanje matematičkih koncepata u nastavi geometrije. Takvim zadacima

učenici mogu otkriti veze između duljina dijagonala npr. kvadrata i njegovi stranica, vezu između opsega ili površine kruga i njegova polumjera, vezu između oplošja kugle i površine glavnog presjeka, itd. Takvi zadatci se koriste u četvrtom razredu i višim razredima. U njima se učenicima daju konkretni predmeti koje oni onda mogu mjeriti i upisivati rezultate u tablice nakon čega uslijedi rasprava i dolazak do zaključaka.

Jedan od primjera koje Pavleković (2009) navodi je otkrivanje obrasca za izračunavanje površine pravokutnika pomoću jednakih pločica. Pravokutnik sastavljen od pet pločica u nizu ima površinu od pet pločica. Složi li se pravokutnik od tri retka takvih pločica, imat će površinu od  $3 \times 5 = 15$  pločica. Učenici kroz ovu aktivnost, induktivnim zaključivanjem, naslućuju da površina pravokutnika brojno jednaka umnošku duljina stranica tog pravokutnika te tako dolazi do *otkrića*. Učitelj treba biti taj koji će ustrajati na argumentiranju i donošenju zaključaka.

### **5.2.3 Ravnina, prostor i oblici**

Iako se učenici susreću s geometrijom od prvog razreda mnogo njih, pa čak i darovitih, su vrlo nesigurni pri zadacima geometrijskog sadržaja. No geometrija u nastavi nam otvara prostor za mnoge igre i provođenje eksperimenata s učenicima.

Skokovi u znanju učenika se postižu eksperimentiranjem. Njima također potičemo učenike na nestandardan način rješavanja zadataka te je on spremniji primijeniti svoja znanja u svakodnevnici. Jedan od jednostavnijih eksperimenata je nadopunjavanje raznostraničnog trokuta da od njega dobijemo pravokutnik gdje učenici dolaze do zaključka da se isti raznostranični trokut može nadopuniti do pravokutnika na tri različita načina. Ti pravokutnici nisu sukladni, ali je svaki od njih sastavljen od dva polazna trokuta pa su stoga jednakih površina.

### **5.2.4 Obrada podataka**

Učenici nižih razreda upoznaju statistiku na iskustvenoj razini razvijajući pritom svoj kritički odnos prema numeričkim informacijama iz svoga okruženja. Prema istraživanjima od Pavleković (2009) učenici četvrtih razreda, posebno oni daroviti, uspješno povezuju statistiku s drugim matematičkim sadržajima kao što su aritmetika, geometrija i drugi, ali i s nematematičkim sadržajima kao što su

prirodoslovlje i zbivanja iz razreda. Također ističe kako su vrlo uspješni u grafičkom prikazivanju.

Darovite učenike treba sadržajima prikazivanja podataka, kombinacijama situacija i vjerojatnosti potaknuti na drugačija promišljanja te stvaralački i sustavan pristup u pronalaženju rješenja. Razumijevanje grafičkih prikaza nije samo bitno za nastavu matematike već je bitno kako bi učenici mogli kritički i svjesno primati informacije s različitih reklama, izvješća, obavijesti i drugih medija koje koriste taj prikaz.

Kombinatorne sposobnosti se kod učenika mogu razvijati kroz sustavna prebrojavanja, igru slaganja lego kockica, popunjavanjem sudokua i kakuro križaljki. Sustav prebrojavanja se koristi i savladava već u prvom razredu gdje se učenicima zadaju razni zadatci prebrojavanja, brojanja mogućih rješenja i slično.

Primjer 1. *Napiši sve troznamenkaste brojeve služeći se samo znamenkama 0,1 i 2 (Pavleković, 2009, str 109).*

Učenici četvrtih razreda su već u mogućnosti shvatiti koncept predočavanja podataka različitim dijagramima, te shvaćaju prednosti i nedostatke prikazivanja podataka stupčastim i kružnim dijagramom.

Primjer 2. *U 4.a razredu učiteljica nije bila zadovoljna rezultatima svojih učenika u školskoj zadaći iz matematike. Prema postignućima, uratke svojih učenika ocijenila je ocjenama odličan, vrlo dobar, dobar i dovoljan. Dva učenika dobila su ocjenu odličan, šest ih je dobilo ocjenu vrlo dobar, troje dobar i jedan učenik dovoljan. Predoči stupčastim i kružnim dijagramom učenička postignuća (Pavleković, 2009, str. 115).*

### **5.3 Matematičke igre**

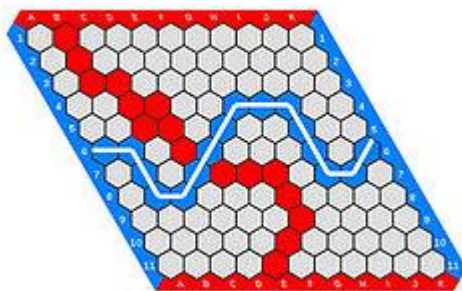
Igra je djeci imanentna aktivnost te ona omogućava učenicima brzo i kvalitetno usvajanje gradiva, a da učenik nije ni svjestan da uči već se zabavlja. U nastavi matematike često se koriste igre kojima je svrha uvježbavanje, odnosno automatizacija nekih dijelova gradiva, poput zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, očitavanja koordinata, razlomaka i slično.

Borković (2017) ukazuje na specifičnosti matematičkih igara, a to su:

- uključivanje misaonih vještina;
- ne uključuju sreću;
- mogu se igrati iz razonode, ne moraju zahtijevati specifična matematička znanja;
- jedna igra traje razumno kratko;
- najčešće su to igre za dva igrača;
- ne zahtijevaju posebnu opremu;
- nisu dobro ograničena;
- nije im uvjet dobro poznavanje školske matematike.

Tokom školske godine Borković (2017) sa svojim učenicima igra sljedeće igre koje dijeli u tri skupine:

1. strateške: Chomp, Hex, Dots and boxes, Go
2. kombinatorne: Set, Sudoku, Hanojski tornjevi
3. popločavanja i prostor: HIQU puzzle, Soma kocka; Pentomino, IQ puzzle, Tangram, Origami...



Slika 5. Primjer Hex igre u kojoj je plavi igrač pobijedio.

„Matematičke su igre bitne jer igrači za vrijeme igre postavljaju pitanja koja imaju matematičku podlogu: „Kako se ovo igra?“, „Koji je najbolji način igre?“, „Koja je pobjednička strategija?“, „Što ako...“, „Kolika je šansa da...?“. Matematička pozadina takvih pitanja je interpretacija, optimizacija, analiza, varijacije i vjerojatnost (Borković, 2017, str. 61).“

Učenici suočeni s takvim novim situacijama tokom igre formiraju mišljenja koja se mogu povezati s matematičkim idejama, dolaze do zaključaka na koje načine mogu pobijediti, generaliziraju zakonitosti koje vrijede u više igara te dokazuju tokom

igranja vrijedi li neka uočena zakonitost. Prednost matematičkih igri je što ne zahtijevaju neku posebnu pripremu učenika, već odmah nakon objašnjavanja učenici se mogu okušati u igranju. Nakon što učenici odigraju igru nekoliko puta može se s njima analizirati strategije koje su primjenjivali, tražiti i raspravljati pobjedničke strategije i slično.

Jedna od učenicima jako bliskih i poznatih igrački su Lego kockice s kojima također možemo igrati igre popločavanja. Mogućnosti slaganja Lego kockica su mnogobrojne, te se tako može zadati učenicima niz zadataka. Na primjer, odredi se broj kockica koji se smije koristiti i cilj zadatka. Učenici će kroz eksperimentiranje dolaziti do novih zaključaka i spoznaja te također prebrojavati sva moguća rješenja.

Pavleković (2009) navodi još neke matematičke igre: Igre s prozirnou kockom i komadom žice, igre na šahovskoj ploči, sastavljanje i rastavljanje likova, rješavanje križaljki...

#### **5.4 Suradničko učenje**

Suradničko poučavanje je vrlo učinkovit način poučavanja. Učenici lakše uče od drugih učenika nego od profesora iz razloga što je komunikacija neposrednija i opuštenija. Daroviti učenici vole boraviti u društvu starijih, a k tome još i ako su to osobe koje imaju isto područje interesa. Stariji daroviti učenici kako Borković (2017) navodi se pritom osjećaju važni, a osim toga imaju priliku prenijeti svoje znanje, vježbati svoje predavačke sposobnosti, učiti argumentirati, razmišljati o različitim načinima prikazivanja matematičkih odnosa, revidirati i usustavljivati svoje znanje. Da bi stariji učenici mogli prenositi svoje znanje na mlađe, moraju dobro poznavati, razumjeti, znati primijeniti, analizirati i prosuđivati područje o kojem govore i poučavaju. Također se može koristiti i mentorstvo starijih učenika pri radu mlađih gdje ih oni usmjeravaju pri dolasku do zaključaka. Pri ovoj vrsti rada osim na razvoj matematičkih sposobnosti, utječemo i na vanjske činitelje razvoja nadarenosti tako što učenicima može postati uzor njihov stariji mentor, što ih dodatno motivira.



## 5.5 Projekti

Projektna nastava je svrhovit i organiziran proces aktivnog učenja u kojem učenici, prema planiranom projektu, istražujući dolaze do novih spoznaja. Značajke projektne nastave su :

- polazište su interesi učenika;
- samostalna organizacija i osobna odgovornost;
- etapno ciljano planiranje;
- socijalno učenje;
- interdisciplinarnosti;
- uloga učitelja i učenika se mijenja;
- predstavljanje rezultata;
- refleksija.

Projektna nastava ima mnoge prednosti pred klasičnom nastavom. Benšić <sup>1</sup> ukazuje kako se na taj način mnogo dublje povezuje znanje i razmišljanje, pomaže se učenicima u stjecanju vještina rješavanja problema, potiče se razvoj navike razmišljanja, istraživanja i planiranja u svim segmentima života, uključuju se i oni učenici koji se dosađuju, povezuju se različiti sadržaji, uči se učenike kako prezentirati rezultate, razvija se kritičnost prema svom i tuđem radu, ali i sposobnost objektivnog vrednovanja svog i tuđeg rada.

U nastavi matematike bilo koji matematički problem, postavljen od strane učitelja ili učenika, može postati tema istraživačkog projekta što nam otvara širok spektar tema za male projekte koji obogaćuju nastavu i povećavaju kvalitetu usvojenog znanja. Također osim jednostavnih i malih projekata, kao što su: „Istraži koji se sve brojevi mogu pojaviti kao ostatak pri dijeljenju s brojem 7 i pokušaj objasniti zašto vrijedi tvoja tvrdnja“, možemo s darovitim učenicima izraditi i realizirati puno veće, složenije i dugotrajnije projekte.

Sa svojim darovitim učenicima, Borković (2017) je provela dva projekta koja su trajala nekoliko mjeseci. Učenici su sami došli na ideju izrade matematičke igre, no igre nisu samo matematički poučne već su u njih integrirani i drugi predmeti. Tokom

---

<sup>1</sup> [http://www.mathos.unios.hr/~mirta/tekst\\_O.pdf](http://www.mathos.unios.hr/~mirta/tekst_O.pdf)

izrade su prošli faze od ideje, postavljanja ciljeva, istraživanja, kreiranja i provjeravanja zadataka, integriranja u cjelinu, te izrade završne verzije igre.

„„Tko sam ja?“ društvena je igra za 1 – 25 igrača koja povezuje 25 matematičkih zadataka i povijesne podatke vezane za grad Karlovac. Igrač izvlači karticu na kojoj se nalazi zadatak. Zadatak se rješava klasično, na papiru. Kada igrač pronade rješenje, potraži ga na ploči na kojoj se nalaze sva rješenja. Rješenja su godine, poznati Karlovčani, statistički podatci ili neke zanimljivosti vezane za povijest grada Karlovca. Igrač će ispod kartice s rješenjem naći kratko tumačenje broja koji je dobio. Zatim karticom sa zadatkom prekriva svoje rješenje i započinje popločavati igraču ploču. Rješenja složena prema danom pravilu otkrivaju rješenje – a to je slika karlovačke zvijezde (Borković, 2017, str. 63).“

## 5.6 Model Hopkins

Jedan od najstarijih programa za razvijanje matematičke nadarenosti prema Čudina - Obradović (1991) jest Hopkins model. Iako u Hrvatskom školstvu nije raširen, u Americi i Velikoj Britaniji se nalazi mnoštvo programa prema tom modelu, čak i ljetni kampova. Hopkins model je 1971. godine Julian Stanley uveo kao program akceleracije nadarenih matematičara. U taj se program uključuju djeca u 7. razredu koja na testu matematičkih sposobnosti postižu vrlo visoke rezultate.

Model Hopkins prema Čudina - Obradović (1991) sadrži dva tipa programa: program osnovan na ubrzanom poučavanju i program osnovan na samostalnom radu. Ubrzano učenje se odvija u razredima matematički nadarenih učenika koji se sastaju jednom tjedno. Imaju glavnog predavača koji vodi razred velikom brzinom kroz program. Glavna metoda poučavanja jesu intenzivna predavanja i obilne domaće zadaće. Zadaćom još samostalno prorađuju i produbljuju ono o čemu su slušali na predavanju. Ovakvim radom je moguće u jednoj godini savladati dvije godine fakultetskog programa iz određenog kolegija. Drugi tip programa osnovan na samostalnom radu je organiziran po mentorskom sistemu u intenzivnim ljetnim tečajevima. Osnova ovog programa je dijagnostičko testiranje nakon kojeg učenik dobiva propisan individualni program napredovanja. Učenik prezali propisani program velikom brzinom uz pomoć mentora i uz sudjelovanje u grupnim aktivnostima i diskusijama s ostalim nadarenim učenicima programa. Sam mentor je nadareni matematičar, malo stariji od svog štićenika, koji je također završio Hopkins matematički program. Za neke učenike je ovo pokazalo nagli skok u znanju i razumijevanju matematike.

Praćenje učenika koji su završili ovaj program pokazuje da mnogi od njih upišu fakultet prije nego što bi to mogli redovnim školovanjem, a oni koji se na fakultet upišu u redovnom roku pokazuju veliki uspjeh i brzo napredovanje. Program je vrlo uspješan iz razloga što uzima u obzir sve karakteristike darovitih učenika, identificira jače i slabije strane znanja svakog pojedinačno, uključuje učenike istih interesa i sličnih sposobnosti u istu skupinu te ih dodatno motivira i usmjerava na intenzivniji rad, a ujedno im osigurava prijateljsku, slobodnu i kreativnu atmosferu u kojoj se najveća vrijednost stavlja na znanje i nove ideje.

Jedan od ovome sličnih projekata unutar Hrvatske provodi *Udruga mladih Matematičara „Marin Getaldić“* koja je nastala spajanjem nadarenih učenika iz Zagrebačke XV. i V. gimnazije. Udrugu vode bivši vrhunski matematički natjecatelji iz tih škola, a cilj im je primijeniti novi pogled na rad s mladim nadarenim matematičarima koji se temelji na inovativnim idejama, mladim ljudima i prijateljstvu. Između ostalih projekata održavaju ljetne kampove, zimske škole, turnire gradova, predavanja subotom i mnoge druge. <sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> [www.mnm.hr](http://www.mnm.hr)

## 6. ULOGA UČITELJA

Jedna od prvih uloga učitelja je identificirati potencijalno darovite učenike te naći prikladne načine kako zadržati te učenike u području matematike. Učitelj se pri identifikaciji mora oduprijeti raznim mitovima, koje Wiener (2005) navodi, kao što je mit da učenici s poteškoćama u učenju ne mogu biti daroviti. Također i pri samom radu se trebaju oduprijeti mitovima kao što su darovito dijete sve može samo i ne treba poseban tretman.

Singer i suradnici (2016) napominju kako učitelji matematički darovite djece trebaju biti fleksibilni mislioci koji znaju cijeniti kreativne pristupe, znatiželju, upornost i samopouzdanje pri rješavanju teških matematičkih problema. Također, učitelj treba razumjeti širok raspon matematičkih pojmova i vještina, imati *alatnu kutiju* za rješavanje svih vrsta matematičkih problema, voljeti matematiku i biti *naoružan* s izazovnim i poticajnim matematičkim problemima.

Učitelj bi trebao omogućiti diferencirani pristup i program darovitom učeniku, unutar razreda, koji omogućava razvoj njihovih stvarnih sposobnosti bez obzira na nastavni program. S obzirom da nastavni plan i program nije prilagođen darovitim učenicima, oni će na taj način zasigurno nastaviti kontinuirano razvijati svoje vještine i sposobnosti (Cvetković – Lay, 2010).

Učitelj treba surađivati s djetetom u procesu učenja, a ne samo analizirati rezultat njegova uratka, kako bi pratio i poticao spoznajni razvoj, razvoj kreativnosti i socioemocionalni razvoj. Darovitim učenicima je izuzetno važna podrška i usmjeravanje ka napredovanju. Pavleković (2009) ukazuje kako je bitno da učitelj potencijalno darovitog učenika i njegove roditelje usmjeri prema dugoročnoj i koordiniranoj izvannastavnoj ili izvanškolskoj matematičkoj izobrazbi, po mogućnosti kontinuirano, jer samo tako postoje realne šanse da potencijalno daroviti pojedinci zaista i realiziraju svoju darovitost. No u našem školskom sustavu nedostaje izvannastavni i izvanškolski matematički aktivnosti na koje bi učitelji mogli usmjeriti učenike te tako učitelj ne može na najbolji način podržati darovitog učenika.

Prema istraživanju od Cvetković – Lay (2010) daroviti učenici najviše cijene kod svojih učitelja poticanje na izradu projekata, zanimljive načine predavanja,

posjedovanje velike količine znanja, ohrabrivanje na istraživanje te u manjoj mjeri da dozvoljava rad na njihov način. A najviše zamjeraju učiteljima kada predaju ono što oni već znaju ili kada se kruto drže plana i programa. Taj odgovor je bio i za očekivati od darovite djece iz razloga što su daroviti učenici često ispred svojih vršnjaka po količini i dubini znanja te im je iz tog razloga često slušaju ono što već znaju.

### **6.1 Istraživanje o stavovima učitelja i metodama rada s matematički nadarenim učenicima**

Kako bi uočili stavove učitelja prema matematički darovitim učenicima te metode rada koje koriste provedeno je kvalitativno istraživanje. Istraživanje je provedeno kroz intervju s dvije učiteljice 3. i 4. razreda osnovne škole, promatranjem sata dodatne matematike te analizom zadataka, koji su rješavani tokom školske godine, iz učeničkih bilježnica.

Jedan od problema u radu s darovitim učenicima je manjak programa za darovite u osnovnoškolskom obrazovanju. Nastavnim planom i programom je tjedno propisan jedan sat dodatne nastave za koju učitelji sami odlučuju hoće li držati dodatnu iz matematike ili iz nekog drugog predmeta. Tu se iz dosadašnjeg boravka u školi i prema razgovoru s učiteljicama može zaključiti da mnogi učitelji ne drže ili izbjegavaju dodatnu nastavu matematike iz nekih osobnih razloga, a učenici zainteresirani za matematiku ostaju zakinuti i možda nikada ne razviju svoju darovitost. Učiteljica trećeg razreda s kojom je proveden intervju, osim za svoj razred, održava dodatnu matematiku i za treći razred od druge učiteljice.

Učiteljice kao matematički darovitu djecu procjenjuju, kao što je bilo očekivano, one učenike koji imaju bolje ocjene, brže rješavaju zadatke, ne traže pomoć pri rješavanju i brže zaključuju. Učenici koji imaju interes za matematiku i znatiželjno postavljaju mnogo pitanja su u ovom slučaju isključeni iako obje učiteljice potvrđuju da postoje matematički daroviti učenici koji nemaju odlične ocjene. No njih opisuju kao učenike koji su lijeni, zadatke rješavaju što brže samo da su gotovi, te tako često pogriješe pri računanju.

Pri održavanju nastave dodatne matematike, učiteljice potiču na dolaženje učenike koji imaju bolje ocjene, ali učenici mogu i sami odabrati tko želi ići na

matematiku iz razloga što kako se doznaje kroz intervju učiteljice se previše ne zamaraju identifikacijom darovitih učenika, već svakom učeniku žele pružiti podršku i priliku za razvojem darovitosti. Na nastavi dodatne matematike koriste mnoštvo igara koje pronalaze na internetu ili u raznim udžbenicima te njima privlače više učenika i povećavaju njihov interes.

Promatrajući nastavu mogu se primijetiti zadatci u kojima učenik mora sam doći do spoznaje, tu su korištene metode prikazivanja gotovog riješenog zadatka, uočavanja zakonitosti kojima je on riješen te primjenjivanja tih spoznaja na rješavanju drugih zadataka. Također se može uočiti mnoštvo zadataka u trećem razredu gdje se vježba domišljato mišljenje dodavanjem znakova operacijskih radnji ili dodavanjem znamenki koje nedostaju u nizu. Jedan primjer takvog zadatka s dodatne nastave matematike u trećem razredu je:

Primjer 1.

$$3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 = 4$$

Učenici su pri rješavanju takvi zadataka vrlo natjecateljski motivirani te se trude što brže i točnije riješiti zadatke. Takva atmosfera motivira sve učenike da pronađu način kako što brže riješiti zadatak i otkriju zakonitosti koje će im pomoć u idućem sličnom zadatku. Nažalost na promatranim satima učiteljice nisu koristile igre, no kroz razgovor se doznaje kako koriste s učenicima i u nastavi tangrame, origami, sudoku, itd. Ne koriste u nastavi veće projekte, mali projekti im se sastoje u tome da učenici iznesu kako su riješili neki problem i zašto misle da je to tako.

Proučavajući bilježnice učenika iz 3. i 4. razreda primjećuje se manjak zadataka s geometrijskim sadržajima, pojavljuju se isključivo aritmetički zadatci računanja, uspoređivanja, pronalaženja nepoznanica i sl. No to nije čudno iz razloga što po nastavnom planu i programu geometrijskih sadržaja ima bitno manje od aritmetičkih. Učiteljice također ističu kako učenici više vole aritmetičke zadatke od geometrijskih pa ih iz tog razloga više i koriste. Često koriste zadatke koje učenici još nisu učili, odnosno koji su po planu i programu namijenjeni višim razredima. Tako da su već u trećem razredu učenici susreću s pojmom razlomaka, a jedan od zadataka koji se ističe između ostalih je:

Primjer 2. *Koliki je zbroj triju petina, jedne polovine i četiri deseti broja 40?*

Iako učiteljeve procjene darovitih učenika možda nisu uvijek točne, učitelji koji održavaju nastavu dodatne matematike se trude uključiti sve zainteresirane učenike, te ih potaknuti na ljubav prema matematici kroz igru i razna dolaženja do spoznaja.

## 7. ZAKLJUČAK

Iako je darovitost pojam koji se ne može u potpunosti definirati, iz razloga što je svako dijete drugačije, potrebno je uočavati potrebe svakog učenika te uzeti u obzir osim istaknutih posebnih sposobnosti i osobine ličnosti te kreativnost. Potrebno je stvoriti okruženje u kojem se učenici sigurno i opušteno osjećaju te ih treba poticati u njihovim interesima. Svi učenici, a posebno oni daroviti bi trebali primiti obrazovanje sukladno njihovim potrebama.

Učitelji i nastavnici su neizbježan faktor u identifikaciji matematički darovitih učenika, oni su ti koji imaju priliku upoznati se s učenikom, njegovim osobinama, interesima, sustavno prate njegov rad i u kontaktu su s roditeljima. No zbog velikih razreda u koje su uključeni učenici različitih potreba, može se dogoditi da učitelj previdi ili nedovoljno procijeni neke učenike, posebno onu koja ne pokazuju odlične rezultate na ispitima iz matematike. Postoje mnogi testovi, liste i skale za procjenu koje učitelju mogu olakšati procjenu, te bi se njihovo mišljenje još trebalo upotpuniti mišljenjem stručnog osoblja škole.

Postoje razni oblici rada s matematički darovitim učenicima kao što su suradničko poučavanje, vođeno učenje otkrivanjem, matematičke igre i razni projekti. Matematički darovitim učenicima je posebno pogodno vođeno učenje otkrivanjem gdje ih učitelj potiče i upućuje k dolasku do samostalnih zaključaka. Učitelj bi trebao omogućiti diferencirani pristup i program darovitom učeniku kako bi on i tokom nastave razvijao svoju darovitost, vještine i sposobnosti. U osnovnoj školi bi svakako trebalo uvesti više programa za matematički darovite učenike tako da, čak i ako njihovi učitelji ne drže dodatnu nastavu matematike, mogu razvijati svoju ljubav prema matematici.



## LITERATURA

1. Borković, T. (2017). Izazov rada s darovitim učenicima u dodatnoj nastavi matematike. *Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike*, 18(70), 58-65.
2. Cvetković – Lay, J. (2010). *Darovito je, što ću sa sobom? Priručnik za obitelj, vrtić i školu*. Zagreb: Alinea.
3. Cvetković – Lay, S., Sekulić Majurec, A. (2008). *Darovito je, što ću s njim? Priručnik za odgoj i obrazovanje darovite djece predškolske dobi*. Zagreb: Alinea.
4. Čudina – Obradović, M. (1991). *Nadarenost – razumijevanje, prepoznavanje, razvijanje*. Zagreb: Školska knjiga.
5. Elezović, N. (2005). *Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima*. Zagreb: Element.
6. Fajgelj, S., Bala, G., Tubić, T. (2007). Ravenove progresivne matrice u boji – osnovna merna svojstva i norme. *Psihologija*, 40, 293-308.
7. George, D. (2005). *Obrazovanje darovitih – Kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike*. Zagreb: Educa.
8. Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28, 14-18.
9. Huzjak, M. (2006). Giftedness, talent and creativity in the educational process. *Odgojne znanosti*, 8(1(11)), 289-300.
10. Koren, I. (1989). *Kako prepoznati i identificirati nadarenog učenika*. Zagreb: Školske novine.
11. Koren, I. (2013). Povijesni osvrt na konceptualizaciju pojave nadarenosti. *Napredak : časopis za pedagošku teoriju i praksu*, 154.(3), 339-361.
12. Pavleković, M. (2009). *Matematika i nadareni učenici – Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Zagreb: Element.

13. Pavleković, M., Zekić-Sušac, M. i Đurđević, I. (2011). Model neuronskih mreža za predviđanje matematičke darovitosti u djece. *Croatian Journal of Education*, 13 (1), 10-41.
14. Singer, F. M., Jensen Sheffield, L., Freiman, V., Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. Hamburg: Springer Open.
15. Vizek-Vidović, V., Vlahović-Štetić, V., Arambašić, L., Slaviček, M. (1997). Konativne i emocionalne karakteristike matematički nadarene i prosječno sposobne djece. *Društvena istraživanja : časopis za opća društvena pitanja*, 6(4-5 (30-31)), 619-634.
16. Vlahović – Štetić, V. (2008). *Daroviti učenici: teorijski pristup i primjena u školi*. Zagreb: Institut za društvena istraživanja u Zagrebu.
17. Winner, E. (2005). *Darovita djeca – mitovi i stvarnost*. Lekenik: Ostvarenje d.o.o.

#### WEB IZVORI

18. Benšić, M. Projekt u nastavi matematike osnovne škole. Na adresi: [http://www.mathos.unios.hr/~mirta/tekst\\_O.pdf](http://www.mathos.unios.hr/~mirta/tekst_O.pdf) (26.05.2018.)
19. *Nastavni plan i program za osnovnu školu (2006)*. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Republika Hrvatska. Na adresi: [http://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni\\_plan\\_i\\_program\\_za\\_osnovnu\\_skolu\\_-\\_MZOS\\_2006\\_.pdf](http://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf) (20. 05. 2018.)
20. Johnson, D. T. (2000). Teaching Mathematics to Gifted Students in a Mixed-Ability Classroom. Na adresi: <http://www.vtaide.com/png/ERIC/gifted-Math.htm> (28.05.2018.)
21. Jursić, Ana. (2011). Prepoznavanje matematički darovitih učenika. Na adresi: <http://www.math.uniri.hr/~ajurasic/pred3.pdf> (30.05.2018.)
22. Stepanek, J. (1999) *The inclusive classroom: Meeting the needs of gifted students: Differentiating mathematics and science instruction*. Mathematics and science education center na adresi: <http://educationnorthwest.org/sites/default/files/12.99.pdf> (28.05.2018.)

23. Udruga mladih matematičara „Marin Getaldić“ na adresi [www.mnm.hr](http://www.mnm.hr)  
(22.6.2018.)

#### SLIKE:

Slika 1. Prikaz Rezullieve troprstenaste definicije darovitosti (Čudina-Obradović, 1991, str. 20)

Slika 2. Primjeri zadataka Standardnih progresivnih Ravenovih matrica na adresama  
<https://iqpro.org/images/q/raven-progressive-matrices-iq-test-example3.png>  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ec/Raven\\_Matrix.svg/2000px-Raven\\_Matrix.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ec/Raven_Matrix.svg/2000px-Raven_Matrix.svg.png) (05.06.2018.)

Slika 3. Prikaz strukture ekspertnog sustava (Pavleković, 2009, str. 45)

Slika 4. Komponente darovitosti za matematiku uključene u bazu znanja ekspertnog sustava s bodovima koji određuju značaj pojedine komponente (Pavleković, 2009, str. 47)

Slika 5. Primjer Hex igre u kojoj je plavi igrač pobijedio na adresi  
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/38/Hex-board-11x11-%282%29.jpg/250px-Hex-board-11x11-%282%29.jpg> (11.6.2018)

#### TABLICE:

Tablica 1. Razlike između bistroga i darovitog djeteta (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008, str. 34)

Tablica 2. Mjerna skala za procjenu logičko-matematičke darovitosti prema Karnes i Shwedel (Čudina-Obradović, 1991, str. 145)

## **IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI DIPLOMSKOG RADA**

### **I Z J A V A**

Ja, dolje potpisana, Valentina Ileković, kandidatkinja za magistricu primarnog obrazovanja ovime izjavljujem da je ovaj diplomski rad rezultat isključivo mojeg vlastitog rada te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Diplomskog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojeg necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava.

Studentica: \_\_\_\_\_