Teorijski aspekti matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi

Sabljić, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

UČITELJSKI FAKULTET

ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

JELENA SABLJIĆ

TEORIJSKI ASPEKTI MATEMATIČKOG MODELIRANJA U RAZREDNOJ NASTAVI

DIPLOMSKI RAD

Čakovec, lipanj 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

UČITELJSKI FAKULTET

ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

JELENA SABLJIĆ

TEORIJSKI ASPEKTI MATEMATIČKOG MODELIRANJA U RAZREDNOJ NASTAVI

DIPLOMSKI RAD

MENTOR RADA:

doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Čakovec, lipanj 2020.

Zahvaljujem mentorici doc. dr. sc. Dubravki Glasnović Gracin na korisnim sugestijama, poticajima i razumijevanju.

Posebnu zahvalnost dugujem profesorici Mateji Sabo Junger, mag. prof. mat. na pruženoj velikoj pomoći, savjetima, poticajima i ohrabrenjima tijekom izrade ovog rada te joj najsrdačnije zahvaljujem na suradnji i razumijevanju.

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, bratu Vjeranu i njegovoj obitelji te ujaku Petru. Zahvalna sam im na pruženoj pomoći i ljubavi te bezuvjetnoj podršci i strpljenju koje su mi pružili tijekom studija.

SAŽETAK

Matematičko je modeliranje u nastavi važan proces u kojem učenici usavršavaju procjenu važnih varijabli, međusobnu komunikaciju, razvijaju vlastite modele i stvaraju mnoga nova iskustva. Uvođenje matematičkog modeliranja u razrednu nastavu smatra se korisnim i kvalitetnim u razvoju matematičkih sposobnosti kod učenika. Pomoću zadataka matematičkog modeliranja, učenici percipiraju matematiku kao zanimljiviju i bližu samim učenicima. Prema navedenim razlozima, važno je uvoditi matematičko modeliranje i poticati učenike da razmišljaju izvan tradicionalnih okvira.

U radu ćemo opisati što je matematičko modeliranje i kako se provodi matematičko modeliranje u nastavi općenito. Navedene su prednosti i nedostaci uvođenja matematičkog modeliranja u razrednu nastavu. Također, naveden je utjecaj matematičkog modeliranja na učenike, ali i učitelje. Obrazovanje učitelja je, u aspektu matematičkog modeliranja, vrlo slabo razvijeno. Budući da učitelji nisu dovoljno educirani za provođenje matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi, učitelji se rijetko odlučuju za provedbu istih s učenicima. U zadacima matematičkog modeliranja često se opisuju stvarni problemi koji su prisutni u učenikovom okruženju. U takvim se zadacima od učenika može očekivati poznavanje i drugih znanosti i područja, osim same matematike. Takvi zadaci mogu biti riješeni na različite načine i pomoću različitih modela, zahtijevaju više vremena, ali i više kreativnosti i rada učenika. Zadaci matematičkog modeliranja provode se najčešće u grupnim radovima te ih je teže vrednovati.

Budući da se dobri i kvalitetni zadaci matematičkog modeliranja za razrednu nastavu teško pronalaze i rijetki su, u radu je opisano i objašnjeno nekoliko primjera takvih zadataka. Kao što su zadaci rijetki i teško dostupni, istraživanja o matematičkom modeliranju u nastavi i razrednoj nastavi na području Republike Hrvatske nisu dostupna ili ne postoje te ih je potrebno provoditi. Također, potrebno je dodatno obrazovanje učitelja i pripremanje za rad sa zadacima matematičkog modeliranja.

Ključne riječi: matematika, modeliranje, učitelj, razredna nastava, obrazovanje

SUMMARY

Mathematical modelling is important process in teaching in which students improve evaluation of important variables, mutual communication, they develop personal models and create many new experiences. The introduction of mathematical modeling in elementary teaching is considered useful and of high quality in the students' development of mathematical skills. By using mathematical modelling tasks, students get perception of mathematics as more interesting and closer to them. According to stated points, it is important to introduce mathematical modelling and encourage students to think beyond traditional limits.

In this work, we will explain what mathematical modelling is and how to use it in teaching. The benefits and disadvantages of introducing mathematical modelling in classroom teaching were listed. Also, we explained influence of mathematical modelling on students, but also teachers. Teacher's education is very poorly developed regarding mathematical modelling. Since teachers aren't educated enough for introducing mathematical modelling into their classrooms, they rarely decide to introduce it to students. In mathematical modelling tasks, real problems are often described, which are present in student's environment. In such tasks, students may be expected to have knowledge of other sciences and fields other than mathematics itself. These tasks can be solved in different ways and with help of different models, they require more time, but also more creativity and student work. Mathematical modelling tasks are usually performed in groups, and they are difficult to evaluate.

Since good and high quality mathematical modelling tasks for elementary teaching are hard to find and are rare, we described and explained few of them in this paper. Since these tasks are rare and not available, studies about mathematical modelling in teaching are not available or they don't even exist in Republic of Croatia, so it is required to initiate them. Also, additional teacher education and preparation for working with mathematical modeling tasks is required.

Key words: mathematics, modelling, teacher, elementary education, education

SADRŽAJ

1. UVOD

Svakodnevno se susrećemo s različitim preprekama i zadacima koje, svjesno ili nesvjesno, rješavamo pomoću matematike. Budući da nas matematika okružuje, ne gledamo svi jednako na nju, niti je svi jednako primjećujemo. Ponekad primjećujemo geometrijske oblike koji nas okružuju, iako ih ne imenujemo njihovim nazivima. Ako tražimo geometrijske oblike u prostoru koji nas okružuje, shvaćamo da u svakom predmetu, igrački, pomagalu ili čak i biljci, možemo pronaći odgovarajući oblik ili skupinu istih ili različitih oblika. Kada promatramo okolinu izvan geometrijskih oblika, zapažamo materijale od kojih je ta okolina izrađena, kvalitetu i teksturu materijala. Svako naše zapažanje stvara naš interes i privlači našu pozornost. Budući da smo promatranjem stvorili znatiželju, započinjemo uspoređivanje promatrane okoline, njezine interakcije i odnosa te na taj način vrlo lako dolazimo do matematičkog modeliranja.

Matematičko je modeliranje u nastavi vrlo važan interaktivni proces u kojem se učenici upoznaju s problemima iz stvarnog svijeta i okoline koja okružuje same učenike. Takve probleme učenici rješavaju pomoću pretpostavki, vlastitog iskustva, i višestrukih prikaza. Glavni cilj matematičkog modeliranja nije uvijek i pronalazak jedinstvenog rješenja. Cilj matematičkog modeliranja je u shvaćanju problema i u načinu razmišljanja kod susreta s problemima u stvarnom svijetu. Kod zadataka matematičkog modeliranja važno je proučavati problem u cijelosti, a ne samo njegove dijelove. Također, važno je kritički gledati na tekst problema, kako bi se odredile važne i nevažne varijable za rješavanje samog problema. Matematičko modeliranje možemo podijeliti obzirom na različite pristupe matematičkom modeliranju. U ovome su radu navedeni i opisani empirijski, teorijski, simulacijski i dimenzijski pristup. Također, u radu se spominju i pristupi zadacima modeliranja u nastavi. Navedena je i opisana standardna primjena te direktno i otvoreno modeliranje.

Poglavljem pod nazivom „Matematičko modeliranje u nastavi" dan je općeniti opis matematičkog modeliranja i matematičkog modeliranja u nastavi. Navedeno je nekoliko definicija koje opisuju matematičko modeliranje u obrazovanju te je objašnjen ciklus provedbe matematičkog modeliranja u nastavi. Opisani su i uspoređeni pristupi matematičkom modeliranju te pristupi zadacima modeliranja u nastavi. Osim toga, prikazani su problemi vezani uz matematičko modeliranje u procesu učenja i poučavanja.

U drugom se poglavlju navode i pristupi poučavanju matematičkog modeliranja koji opisuju da je svrha matematičkog modeliranja kompetencija u pronalaženju i rješavanju problema iz stvarnog svijeta. Također, spominje se da je svrha matematičkog modeliranja u konstruiranju novog ili rekonstruiranju postojećeg znanja učenika. Navodi se da digitalne tehnologije olakšavaju učenicima rad s osnovnim računskim operacijama ili jednostavnim problemima te otvaraju i veće mogućnosti za prikazivanje složenijih problema. Također, u ovom su poglavlju spomenute brojne prednosti, ali i nedostaci matematičkog modeliranja u nastavi.

U poglavlju „Matematičko modeliranje u razrednoj nastavi" opisuje se uvođenje matematičkog modeliranja u razrednu nastavu, utjecaj matematičkog modeliranja na rani razvoj učenika i utjecaj na stav učenika prema matematici. Navedene su prednosti, ali i nedostaci ili prepreke kod uvođenja matematičkog modeliranja u razrednu nastavu. U trećem se poglavlju spominje i priprema za uvođenje matematičkog modeliranja s učenicima.

Prema istraživanju (English, 2010) spomenutom u odlomku „Uvođenje matematičkog modeliranja u razrednu nastavu", matematičko se modeliranje u razrednu nastavu može kvalitetno i korisno uvoditi na način da učenici razvrstavaju određene predmete svoje okoline, prema različitim atributima, koje si učenici sami zadaju.

Osposobljavanje i obrazovanje učitelja smatra se važnim u podučavanju matematike, ali i matematičkog modeliranja. U istraživanju kod budućih učitelja razredne nastave (Dogan Temur, 2012) naglašena je važnost matematičkog modeliranja u nastavi. Isto tako, u spomenutom istraživanju kod profesionalnog razvoja učitelja (Watters, English i Mahoney, 2004), zaključeno je da se promijenilo i poboljšalo razmišljanje učenika u matematici.

Budući da se među nedostacima matematičkog modeliranja spominje nedostupnost i teško pronalaženje zadataka, u trećem je poglavlju navedeno, opisano i objašnjeno deset zadataka koji se mogu primjenjivati u razrednoj nastavi.

2. MATEMATIČKO MODELIRANJE U NASTAVI

Procesi kao što su konstruiranje, obrazlaganje, predviđanje, nagađanje, organiziranje podataka, kvantificiranje i sl. postaju sve važniji procesi u životu svakog čovjeka. Oni se odnose na matematičko modeliranje koje se u sve više zemalja uvodi u osnovnoškolsko obrazovanje. U ovom poglavlju govorit ćemo o definiciji pojma matematičkog modeliranja i procesu matematičkog modeliranja. Opisati ćemo pristupe matematičkom modeliranju i objasniti ih. Govorit ćemo o problemima matematičkog modeliranja u nastavi, ali i o prednostima i nedostacima matematičkog modeliranja u nastavi. Također, opisat ćemo razna gledišta na matematičko modeliranje u nastavi i navesti različite pristupe poučavanju matematičkog modeliranja u nastavi.

2.1. Uvod u matematičko modeliranje

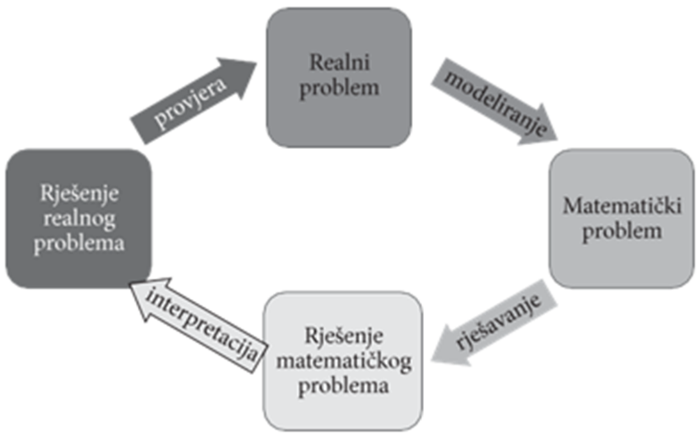
Prije formiranja i izbora definicije matematičkog modeliranja, potrebno je objasniti što je to matematički model. Sama riječ „model" ima različito značenje ovisno o kontekstu u kojem se ta riječ promatra. Kada se govori o matematičkom modelu ona poprima značenje nekakvog uzorka ili obrasca koji se koristi za rješavanje nekog matematičkog problema (Apatić, 2016).

Postoje mnoge definicije matematičkog modeliranja. U nastavku ćemo proučiti neke od danih definicija te objasniti za koju smo se i zašto odlučili. Matematičko modeliranje definira se kao „postupak opisivanja realnog sustava matematičkim jednadžbama s ciljem razvoja i upotrebe matematičkog modela za kasnije analize, projektiranja i optimiziranja sustava za koji je model izrađen" (Magdić, 2011, str 1). Također, spominje se definicija koja opisuje matematičko modeliranje kao „otkrivanje i testiranje matematičkih prikaza ili modela stvarnih predmeta ili procesa" (Apatić, 2016, str. 5). Sljedeća definicija opisuje matematičko modeliranje kao „sustav pomoću varijabli i jednadžbi, koje opisuju odnose među varijablama" (Magdić, 2011, str 1). U više istraživanja nailazimo na definiciju da „matematičko modeliranje podrazumijeva put od realne situacije, koja se oblikuje u matematički zadatak, čije rješenje daje rješenje realne situacije" (Cindrić, 2016, str. 52). Matematičko se modeliranje definira i kao „umjetnost ili proces konstruiranja matematičkog prikaza stvarnosti koji bilježi, simulira ili predstavlja odabrane značajke ili ponašanja tog modela stvarnosti koji se modelira" (Cai i sur., 2014, str. 149).

S obzirom na nedostatak pozornosti koja je posvećena matematičkom modeliranju u nastavi, teško je pronaći „najtočniju" definiciju matematičkog modeliranja. U ovom ćemo radu koristiti definiciju koja matematičko modeliranje definira kao „interaktivni proces koji uključuje otvoreni, stvarni svijet i praktične probleme koje učenici povezuju s matematikom koristeći pretpostavke, aproksimacije i višestruke prikaze" (Stohlmann i Albarracin, 2016, str. 1). Ovu smo definiciju izdvojili jer smatramo da matematički najbolje i razumljivo prikazuje matematičko modeliranje u nastavi.

Tu ćemo definiciju koristiti i kako bismo lakše objasnili zatvoreni krug rješavanja zadatka koji uključuje matematičko modeliranje. Krug matematičkog modeliranja možemo prikazati shematski (slika 1.).

Slika 1. Shematski prikaz matematičkog modeliranja



Izvor: Cindrić, M. (2016, str. 53). Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/169560 (20.3.2019.)

Realni se problem, prema shematskom prikazu, modeliranjem zapisuje u matematičkom obliku. Takav matematički problem rješavamo i njegovom interpretacijom dolazimo do rješenja realnog problema. Usporedbom dobivenog realnog rješenja i realnog problema provjerava se ispravnost logičkog promišljanja. Rješavanje zadatka pomoću ovog shematskog kruga uključuje matematičko modeliranje, ali i primjenu matematičkih alata. Pretpostavka u ovakvim zadacima je da je znanje učenika na određenoj razini. Kod uvođenja matematičkog modeliranja u početnoj nastavi matematike, od učenika se očekuje da imaju razvijene vještine osnovnih matematičkih operacija (Cindrić, 2016).

Dogan Temur (2012) navodi da na početku ciklusa matematičkog modeliranja učenik bira informacije i smišlja proces modeliranja. U prvom se dijelu ciklusa nalazi izgradnja modela prema situaciji koja se nalazi u stvarnom svijetu. Da bi se lakše razumio problem, potrebno je pojednostavljenje situacije te definiranje i imenovanje ključnih varijabli. Također, važno je razlikovanje i traženje povezanih i nepovezanih informacija. U drugom se dijelu, prema Dogan Temur (2012), formira matematički model iz stvarnog modela, tako da se matematički izražava povezanost srodnih kvaliteta i njihovih obilježja. Bitno je pojednostavljivanje te odabir matematičkog prikaza. Za korištenje prikaza mogu se koristiti grafovi, tablice i sl. U trećem se dijelu prikazuju vještine rješavanja matematičkih problema. Ono zahtijeva korištenje određenih strategija otkrivanja, kao što su podjela problema unutar problema, sortiranje sličnih problema te korištenje matematičkog znanja za rješavanje samih problema (Dogan Temur, 2012). U četvrtom dijelu se interpretira matematičko rješenje i rezultati te analizira samo rješenje. U posljednjem dijelu matematičkog modeliranja detaljno se analizira rješenje i vraća u proces modela kako bi se isto detaljno provjerilo (Dogan Temur, 2012). Također, ispituje se odgovara li model zadanom problemu te se izvršava testiranje na stvarnim podatcima. Po potrebi se model poboljšava i na kraju primjenjuje.

Varijable u modelu predstavljaju svojstva sustava. U modelu mogu postojati različite vrste varijabli kao što su:

- ulazne i izlazne varijable,
- zavisne i nezavisne varijable,
- varijable stanja,
- slučajne varijable (Magdić, 2011).

Glavni cilj modeliranja nije uvijek rješenje problema, već može biti i pojašnjenje promatrane situacije i razjašnjenje problema. Cilj modeliranja je olakšavanje rješavanja problema u stvarnom svijetu te pomoć kod pronalaska rješenja. U rješavanju zadanog problema naglašavamo kako je bitno shvatiti da postoje sličnosti između razumijevanja problema, odnosno zadanog teksta i samog problema. Kako bi se točno shvatio problem, prema Doyle (2006) i English (2012), možemo zaključiti da je važno usredotočiti se na tekst u cjelini umjesto na jednu ili više ključnih riječi.

S ciljem rješavanja realnih problema, Borromeo Ferri (2006) dovršila je ciklus modeliranja koji je započeo kao model. Taj model se koristio u početku s učenicima u osnovnoj školi u rješavanju problema koji zahtijevaju zbrajanja i oduzimanja. Prema ciklusu modeliranja koji je razvila Borromeo Ferri (2006) (slika 2.), prva faza predstavlja mentalnu prezentaciju situacijskog modela koji treba biti afirmiran na stvarnoj situaciji. Od učenika se očekuje da u ovoj fazi razumije problem. Važno je prvo razumijevanje cijelog problema, kao što smo već spomenuli, prije početka rješavanja samog problema, koje uključuje i odabir i primjenu aritmetičkih operacija. U ovoj fazi, Borromeo Ferri (2006) navodi kako pojedinac treba shvatiti problem doslovno i kritički. Pomoću takvog razumijevanja učenik može izvući informacije iz teksta koje su eksplicitno navedene. Nadalje, za shvaćanje teksta Borromeo Ferri (2006) navodi kako je važno uspostaviti vezu između teksta i stvarnog svijeta učenika. Na taj se način olakšava shvaćanje temeljnih informacija o tekstu. Kritičkim čitanjem, učenik čita tekst postavljajući pitanja o nedosljednim mislima u tekstu, događajima, razlozima zbog kojih je tekst napisan i sl. U sljedećoj fazi, bitno je bilježenje i organiziranje misli, uspoređivanje istih, zaključivanje, vrednovanje i rješavanje problema. Tijekom treće faze učenik izrađuje matematički model s obzirom na stvarni problem (Borromeo Ferri, 2006). U tom procesu učenik koristi matematičke operacije i procese. Problem se tako pretvara u tablice, formule, jednadžbe, brojke ili simbole. Slijedi rješavanje matematičkog izraza, a zatim i posljednja faza procesa. Prema slici 2., posljednja faza vraća matematički model u realni model. U ovoj fazi dolazi do interpretacije i validacije (Borromeo Ferri, 2006).

Nastavno na to, Stohlmann i Albarracin (2016) navode kako postoji sedam bitnih elemenata matematičkog modeliranja prema slici 2., a to su:

1. početak od realnog problema,
2. rad na ključnim pitanjima,

3. razumijevanje problema s matematikom koji često uključuje pretpostavke i aproksimacije,

4. osiguravanje da je matematika točna i da ima smisla u realnoj situaciji,

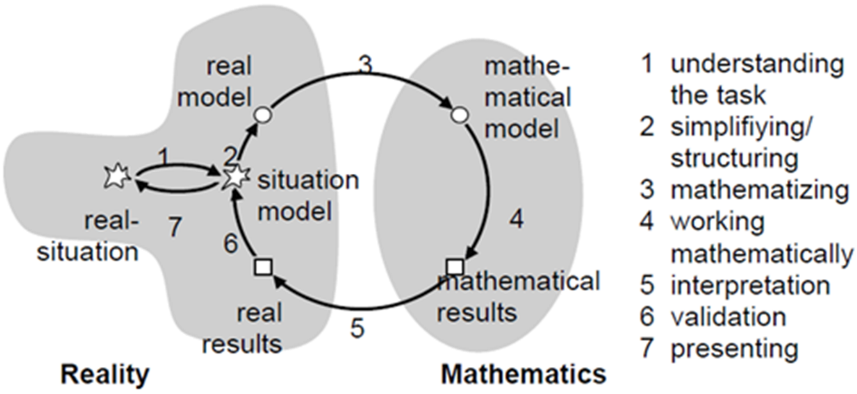
5. jasna usmena i pisana komunikacija koja često uključuje višestruke prikaze,

6. modeliranje kao interaktivni proces koji uključuje otvorene probleme,

7. promišljanje o korištenoj matematici i modeliranju.

Sve te ideje uključene su u jednu aktivnost matematičkog modeliranja.

Slika 2. Proces matematičkog modeliranja



Izvor: Borromeo Ferri (2006, str. 87) Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Preuzeto s https://www.researchgate.net/publication/225708294_Theoretical_and_empirical_differentiations_of_phases_in_the_modeling_process_Zentralblatt_fr_Didaktik_der_Mathematik_382_86-95 (10.4.2019.)

Matematičko modeliranje se rijetko koristi u nastavi srednjih škola, a još manje u osnovnoškolskom obrazovanju, ali pruža bogat izvor mogućnosti za razvijanje ovih važnih procesa kod učenika (English i Watters, 2004). Koristeći matematičko modeliranje, učenici identificiraju osnovnu matematičku strukturu kompleksnih pojava. Matematički se modeli više fokusiraju na strukturalne karakteristike pojava kao što su uzorci, interakcije i odnosi među elementima, a manje na površinska obilježja kao što su biološka, fizička ili umjetnička svojstva. Iz tog je razloga matematičko modeliranje moćan alat u predviđanju i rješavanju kompleksnih sustava (English i Watters, 2004).

Valja napomenuti da matematički modeli imaju posebno mjesto u znanosti, ali i epistemološku vrijednost. Prema tome, matematički modeli imaju posebno mjesto u hijerarhiji modela (Cai i sur., 2014). Epistemološka vrijednost je posljedica ideje da je matematičko modeliranje način spoznaje. Matematički model ima, također, posebno mjesto u znanosti jer ono može zauzeti mjesto izravnih načina spoznaje, odnosno eksperimenta. Dobar matematički model smatramo i instrumentima poput matematičkog njihala, ali i mikroskopa ili teleskopa, koji nam omogućuju da vidimo elemente koji su prethodno nevidljivi ili sakriveni te nam omogućuju da razumijemo ono što ćemo vidjeti. Posebno dobar matematički model možemo smatrati onim s visokom razinom eksperimentalnog uspjeha. Takav model često se prestaje smatrati „samo modelom“. Uslijed toga, taj model postiže drugačiji status u znanosti i njezinoj zajednici (Cai i sur., 2014). Primjeri takvih modela su „Newtonovi zakoni“ za koje se ne koristi naziv kao što je „Newtonov matematički model mehanike“. Također, za „Kvantnu mehaniku“, odnosno „Schrodingerovu jednadžbu“ ne koristimo naziv „Schrodingerov model subatomskog svijeta“. Svaki ovaj primjer je zapravo matematički model. Ti su modeli postigli najvišu razinu epistemološke vrijednosti. Oni su postali način poznavanja, razumijevanja i opisivanja (Cai i sur., 2014).

Izražena je sve veća zabrinutost u vezi nedostatka učeničkog sudjelovanja u matematici i znanosti. Mnogi autori navode kako su istraživanja pokazala da niske razine učeničkog sudjelovanja i uspjeha u matematici nisu nastale zbog nedostatka njihove sposobnosti ili potencijala, nego zbog prakse u obrazovanju kojoj nedostaje smisleno i visoko kvalitetno iskustvo učenja. Također je pokazano da se pojavljuje širi raspon učenika koji su sposobni, neovisno o godinama ili o razini postignuća u školskoj matematici, sudjelovati u matematičkom modeliranju. Kao posljedica se navodi napredak u njihovom samopouzdanju, stavu prema matematici i matematičkom rješavanju problema (Doerr i English, 2003). Za početak, potrebno je znati što je matematičko modeliranje i što ono podrazumijeva.

2.2. Pristupi matematičkom modeliranju

Pregled istraživanja i literature ukazuje na podjelu u kojoj se opisuju pristupi matematičkom modeliranju. Najčešće nailazimo na podjelu od četiri pristupa u koja se ubrajaju empirijski, teorijski, simulacijski i dimenzijski pristup (Apatić, 2016). U daljnjem tekstu ćemo detaljnije opisati i objasniti svaki od njih zasebno.

2.2.1. Empirijski pristup

Empirijski pristup matematičkog modeliranja uključuje istraživanje i ispitivanje zadanih podataka koji su vezani uz problem.

Pomoću raspoloživih podataka, empirijski se pristup temelji na konstruiranju matematičkih ovisnosti između varijabli. U nastavi matematike može se koristiti kod utvrđivanja odnosa među veličinama. Za ovakav pristup potrebni su relevantni empirijski podatci (Apatić, 2016). U ovom se pristupu često prikazuju podatci u koordinatnom sustavu kako bi se utvrdila funkcijska ovisnost između zadanih vrijednosti. Primjer ovakvih zadataka možemo naći u zadacima uspostavljanja eksponencijalne veze među prikupljenim podacima za učenike srednjih škola. Ovakvi se zadaci primjenjuju kod usvajanja nastavnog sadržaja eksponencijalne ili linearne funkcije. Primjer takvog zadatka, prema Apatić (2016) je:

Zadatak:

Pronađimo realnu funkciju *E* koja najbolje modelira podatke iz tablice:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.90	2.51	3.31	4.37	5.76	7.60	10.03

Rješenje:

Kako bi mogli govoriti o prirodi funkcije, potrebno je uvrstiti kvocijent $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ u tablicu. Tako dobivamo tablicu s vrijednostima:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.90	2.51	3.31	4.37	5.76	7.60	10.03
$\frac{f(x+1)}{f(x)}$	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	

Znamo da za svaku eksponencijalnu funkciju $E(x) = y_0 \cdot a^x$ vrijedi da je $\frac{E(x+1)}{E(x)} = a$ za svaki x.

Kvocijenti $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ su uvijek jednaki ili približno jednaki te različiti od nule. Prema tome, naše podatke možemo modelirati prema eksponencijalnoj funkciji. U ovom je primjeru $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.32 = a$, a $y_0 = 1.90$. Dobivamo eksponencijalnu funkciju $E(x) = 1.90 \cdot (1.32)^x$.

Možemo zaključiti da se u empirijskom pristupu nalaze zadaci koji od učenika zahtijevaju veću koncentraciju. Kod ovog je pristupa u rješavanju zadataka poželjno vodstvo učitelja. Obzirom da empirijski pristup zahtjeva, u većini postojećih zadataka, poznavanje grafova i funkcija, takav se pristup s tim sadržajima ne može primjenjivati u razrednoj nastavi.

2.2.2. Teorijski pristup

Teorijski se pristup matematičkom modeliranju koristi kada opisanu situaciju možemo povezati s matematičkim pojmovima na temelju poznatih pretpostavki. Pomoću takvog pristupa možemo lako odgovoriti na pitanja koja nas zanimaju u vezi opisane i zadane situacije. Kao primjer zadataka teorijskog pristupa modeliranju, Apatić (2016) navodi uređivanje kemijskih reakcija. Ovakvi se zadaci često susreću na satovima Kemije u sedmome i osmome razredu osnovne škole, kao i u kemiji tijekom srednjoškolskog obrazovanja. Za rješavanje ovakvih zadataka potrebno je, primjerice znanje o reaktantima i produktima kemijskih reakcija, kao i zakonitosti samih kemijskih reakcija. U većini se slučajeva određuje koeficijent ispred pojedinačnih spojeva u kemijskim jednadžbama. Prema Apatić (2016), primjer takvog zadatka je:

Zadatak:

Pomoću neke matematičke metode uredite sljedeću kemijsku jednadžbu.

$$H_3PO_4 + Mg(OH)_2 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + H_2O$$

Rješenje:

Sustavom linearnih jednadžbi dolazimo do sljedećeg sustava:

$$2x + 2y = 2w$$

$$x = 2z$$

$$4x + 2y = 8z + w$$

$$y = 3z$$

Pretpostavimo da je $z = 1$. U takvom slučaju dolazimo do rješenja da je $x = 2$, $y = 3$ i $w = 6$. Na ovaj smo način dobili traženu jednadžbu koja glasi:

$$2H_3PO_4 + 3Mg(OH)_2 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + 6H_2O$$

U ovom zadatku primjećujemo 4 linearne jednadžbe s 4 nepoznanice. Možemo zaključiti da je kod teorijskog pristupa zadan problem o kojem učenici mogu razmišljati, postavljati pitanja i iznositi vlastite pretpostavke. Također, primjećujemo da učenici mogu uvrstiti neki model za koji smatraju da je koristan u rješavanju zadanog problema. Ukoliko primijenjeni model nije koristan, učenici mijenjaju model.

2.2.3. Simulacijski pristup

Simulacijski pristup matematičkom modeliranju podrazumijeva stvaranje scenarija utemeljenog na skupu pravila.

Takav se pristup koristi kada se može opisati samo dio pojave na temelju danih pretpostavki, a ne pojava u cijelosti (Apatić, 2016). Ponekad je moguće na temelju toga spoznati cijelu situaciju. Ovaj se pristup često može pronaći u nastavi matematike u osnovnoj školi. U primjerima takvih zadataka učenicima je zadan vremenski period i jednaka količina prirasta ili smanjenja određene varijable. Učenici pomoću simulacija, tablica ili grafikona lako dolaze do rješenja problema. Primjer takvog zadatka, prema Apatić (2016) je:

Zadatak:

Farmer Marko bavi se uzgojem ovaca i ima ih ukupno 200. Marko svake godine povećava stado ovaca za 20%. Godišnje proda 50 ovaca. Kako će se mijenjati broj Markovih ovaca u stadu?

Rješenje:

Ovakav zadatak možemo zadati učenicima u osnovnoj školi kod obrade nastavnog sadržaja postotka. Rješavanje ovakvog zadatka možemo prikazati simulacijom. Potrebno nam je izračunati koliko će Marko imati ovaca nakon godinu dana, nakon dvije godine i tako dalje. Ovakav način simulacije prikazan je pomoću tablice:

Godina	Broj ovaca	Povećanje	Prodano	Stvarni porast
0	200	40	50	-10
1	190	38	50	-12
2	178	36	50	-14
3	164	33	50	-17
4	146	29	50	-21
5	126	25	50	-25
6	101	20	50	-30
7	71	14	50	-36
8	35	7	50	-43

Prema navedenom zadatku, zaključujemo da je simulacijski pristup moguće koristiti i u razrednoj nastavi. Budući da zadaci simulacijskog pristupa mogu zahtijevati poznavanje samo osnovnih matematičkih operacija, učitelji mogu iste osmisliti vezane uz individualno okruženje učenika i na taj način učenika dodatno približiti problemu.

2.2.4. Dimenzijski pristup

Kod dimenzijskog pristupa matematičkom modeliranju, s obzirom na mjerne jedinice, uspostavljaju se odnosi među vrijednostima (Apatić, 2016). Ovakav pristup često nalazimo u zadatcima vezanim uz fiziku u sedmom i osmom razredu osnovne škole te u srednjoj školi.

Primjer ovakvog zadatka, prema Apatić (2016) je:

Koja funkcija opisuje brzinu istjecanja neke tekućine kroz malu rupu na stjenci posude, pod pretpostavkom da je brzina $v[{}^{m}/_{s}]$ ovisna o visini otvora do površine tekućine $h[m]$ i ubrzanju $g\left[{}^{m}/_{s^2}\right]$?

Rješenje:

Za rješavanje ovakvih zadataka pretpostavljamo da postoji niz konstanti:

$v = k \cdot g^A \cdot h^B$ i $\frac{m}{s} = (\frac{m}{s^2})^A \cdot m^B$.

Odgovarajući eksponenti nam daju sustav u kojem je $A + B = 1$ i $2A = 1$.

Iz toga dobivamo da je $A = B = \frac{1}{2}$.

Zaključno s tim, mogući model je $v = k \cdot \sqrt{g \cdot h}$. Uzmimo da je $k = \sqrt{2}$.

Tražena funkcija je $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

Ovakva nam je funkcija u fizici poznata pod nazivom Torricellijev zakon.

U dimenzijskom pristupu potrebno je poznavanje mjernih jedinica i odnosa među njima. Budući da se neke mjerne jedinice obrađuju u razrednoj nastavi, smatramo da je moguće osmisliti zadatke koji su povezani uz poznate mjerne jedinice. Na taj bi se način, dimenzijski pristup mogao uvesti i u razrednu nastavu, uz korištenje njima primjerenih zahtjeva.

Možemo zaključiti da se matematičko modeliranje može podijeliti na četiri različita pristupa. Kod empirijskog pristupa zadaci zahtijevaju veću koncentraciju učenika, poznavanje grafikona i funkcija, a poželjno je i vodstvo učitelja. Kod teorijskog je pristupa zadan problem o kojem učenici mogu razmišljati, postavljati pitanja i iznositi vlastite pretpostavke, a u rješavanje zadataka mogu uvrštavati gotove modele i mijenjati ih. Simulacijski je pristup moguće koristiti u razrednoj nastavi, budući da zadaci mogu zahtijevati poznavanje samo osnovnih matematičkih operacija. Kod dimenzijskog je pristupa potrebno poznavanje mjernih jedinica i odnosa među njima.

Budući da se u empirijskom pristupu od učenika očekuje poznavanje grafova i funkcija, smatra se da on nije primjenjiv u razrednoj nastavi. Također, teorijski se pristup oslanja na rješavanje opisane situacije koja u većini slučajeva ima malo matematičkih izraza i konkretnih brojeva. Iz tog razloga smatramo da se ni teorijski pristup ne može primjenjivati u razrednoj nastavi. Budući da se kod simulacijskog pristupa zadatak može prikazati vizualno, pomoću tablice i može zahtijevati poznavanje samo osnovnih operacija koje učenici nauče u razrednoj nastavi, smatramo da je simulacijski pristup primjenjiv u razrednoj nastavi. Također, smatramo da se dimenzijski pristup može uvoditi u razrednu nastavu ukoliko su učenici savladali osnovne mjerne jedinice i njihove odnose.

2.3. Tri pristupa zadacima modeliranja u nastavi

Gusić (2011) navodi kako se u razredu može različito pristupiti zadatcima modeliranja. Navodi da se razlika u pristupu zadatcima pokazuje u ciljevima i u izvedbi. Spominju se standardna primjena, direktno modeliranje i otvoreno modeliranje kao tri najčešća pristupa zadatcima modeliranja u nastavi koja ćemo u nastavku detaljnije objasniti.

2.3.1. Standardna primjena

Učenici u rješavanju zadataka standardne primjene matematičkog modeliranja točno znaju koji naučeni model trebaju primijeniti. Primjenjujući taj model u kontroliranim uvjetima, učenici uče svojstva tog modela te svojstva zadane situacije koju je model dobro riješio (Gusić, 2011). U ovakvim zadatcima učenici imaju zadani model u koji trebaju prevesti zadatak u matematičke izraze i operacije. Bitno je da učenici u ovakvim zadacima ne brzaju i da znaju obrazložiti zašto je rješenje takvo te znaju objasniti postupak kojim su došli do rješenja. Također, pomoću ove primjene možemo razgovarati s učenicima o nemogućim ili nelogičnim situacijama. Ovakva primjena matematičkog modeliranja pokazala je veliki postotak u analizi rješivosti zadataka. Standardna primjena modeliranja vrlo je važna jer pomoću nje učimo učenike različitim modelima. Učenici dolaze do zaključka kako trebaju biti oprezni u primjeni tih modela te otkrivaju kako ih mogu poboljšati. Također, korisno je da učenici sami stvaraju i smišljaju svoje modele te ih obrazlažu. Važno je da znaju zašto su izabrali te modele i za njih daju kritički osvrt (Gusić, 2011).

Gusić (2011) navodi kako se zadaci standardne primjene modeliranja mogu pronaći u zadacima državne mature, kao i općenito u nastavi. Kao jedan od primjera, Gusić (2011) navodi zadatak s posudicom leda koji se može uvesti u 7. i 8. razredu osnovne škole.

Zadatak:

U posudici u kojoj se smrzava voda nastaje led oblika kvadra dimenzija 3.5 cm × 3 cm × 2 cm. Pri smrzavanju se obujam vode poveća za 5%. Koliko je vode potrebno za jedan takav oblik leda?

Kod ovog je zadatka potrebno razumijevanje pojmova obujma i postotka. Učenik treba znati kako izračunati obujam vode i shvatiti da je rezultat postotka nakon smrzavanja. Prema tome, učenik treba prvo izračunati obujam koji iznosi:

$$V = 3.5cm \times 3cm \times 2cm = 21cm^3$$

Kako bi učenik dobio rezultat postotka, što označava kao rezultat nakon smrzavanja, početni volumen označava kao V. Početni se volumen, V, povećava za 5%. Rezultat postotka iznosi navedenih 21cm^3. Iz toga zaključujemo da je točno rješenje zadatka: $1.05V = 21cm^3$ iz čega je $V = \frac{21cm^3}{1.05} = 20cm^3$.

Budući da se ovaj zadatak oslanja na ključne riječi, u ovome zadatku „poveća za“, on nije zadatak pravog matematičkog modeliranja. Ovaj zadatak više pripada običnim tekstualnim zadacima.

2.3.2. Direktno modeliranje

Kod direktnog modeliranja, učenici sami biraju neki od naučenih modela rješavajući pritom realni problem. Kao predznanje ovom obliku modeliranja, učenici trebaju znati koje su modele naučili, kada se oni primjenjuju i kako izabrati odgovarajući. U ovakvim je zadatcima korisno da učenici osmisle strategiju rješavanja problema. Na početku je bitno da učenik odluči kako će krenuti. U nastavku rješavanja zadatka, bitno je stalno kontrolirati dobivene rezultate te provjeravati dovode li rezultati rješenju zadanog problema. Za rješavanje ovakvih zadataka matematičkog modeliranja vrlo je važna primjena tehnologije. Možemo zaključiti da je u ovakvim zadatcima cilj najučinkovitije doći do rješenja. Kako bi se izbjegle moguće greške i ubrzalo računanje, korisno je upotrijebiti tehnologiju koja je pristupačna učenicima (Gusić, 2011). Također, tu tehnologiju možemo koristiti i za organiziranje primjera modela koji nam otkrivaju pravilnosti. Isto tako, tehnologiju možemo koristiti za provjeravanje točnosti modela u sličnim situacijama i problemima.

Gusić (2011) za direktno modeliranje spominje primjer zadatka za učenike srednjih škola:

Projektil je koso ispaljen iz točke na nadmorskoj visini od 50 m i kreće se po paraboli. Nakon što je horizontalno udaljen 2 km, postiže nadmorsku visinu od 610 m. Nakon sljedeća 2 km nalazi se na nadmorskoj visini od 530 m. U trenutku kada projektil dostiže svoju maksimalnu visinu, 500 m iznad njega leti helikopter. Na kojoj se nadmorskoj visini u tom trenutku nalazi helikopter?

U ovom zadatku, učenici trebaju prepoznati da se traži funkcijska parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ako se pretpostavi da horizontalna udaljenost u kilometrima predstavlja vrijednost x, a y dostignutu visinu u metrima, točke na paraboli su: $(0,50), (2,610), (4,530)$.

Jednadžba parabole u tom slučaju glasi: $y = -80x^2 + 440x + 50$. Maksimalna visina, kao i maksimalna vrijednost funkcije, prema ovoj jednadžbi iznosi 655 m. Prema tome, učenik može izračunati visinu helikoptera kao:

$$y_{maks} + 500 = 655 + 500 = 1155\, m$$

Direktno se modeliranje razlikuje od ostalih oblika modeliranja prema tome što učenik bira između već poznatih modela, koji će model primijeniti u zadanom problemu. Možemo zaključiti da je direktno modeliranje za učenika teže od već spomenute standardne primjene. U zadanom problemu nije zadan model po kojem učenik treba raditi, već ga učenik treba sam izabrati i istražiti te ga pravilno primijeniti.

2.3.3. Otvoreno modeliranje

Ovakav se oblik modeliranja najmanje susreće u nastavi. U tom obliku učenici samostalno rješavaju realne probleme. Za ovakve zadatke i način rješavanja, potrebno je dovoljno vremena kojeg u nastavi obično nema. Ova se vrsta zadataka daje učenicima kao samostalni zadatak ili kao grupni projekt. Najčešće se ovi zadatci rade za domaću zadaću. Projekti ipak sve više ulaze u nastavu, ali je upitna njihova pripadnost ovom obliku modeliranja jer traži od učenika da ispitaju valjanost naučenog modela. Takvi zadatci ipak imaju zajedničko pisanje izvješća i obrazloženja kao i zadatci otvorenog modeliranja. Kod otvorenog modeliranja, u izvješćima i obrazloženjima, učenici trebaju dati obrazloženje modela, reći zašto su taj model izabrali te ga usporediti s drugim modelima (Gusić, 2011).

Otvoreno se modeliranje rijetko koristi u nastavi jer učenici trebaju sami smišljati model po kojem će riješiti problem. Učenici trebaju sami odrediti koja je varijabla za njih najvažnija, što će utjecati na njihov rezultat te kako će doći do rješenja. Budući da ne postoji jedinstveno i točno rješenje, otvoreno je modeliranje najteži od navedena tri pristupa zadacima modeliranju u nastavi. Također, u proučavanoj dostupnoj literaturi nije pronađen niti jedan zadatak otvorenog modeliranja pogodan za razrednu nastavu.

2.4. Problemi matematičkog modeliranja u nastavi

Problemi matematičkog modeliranja često se svrstavaju prema tzv. modelu crne kutije i modelu bijele kutije. Govorimo o modelu crne kutije kada su veze među varijablama nepoznate. Poznato je da će model biti točniji što je više poznatih veza među varijablama, tada govorimo o modelu bijele kutije (Magdić, 2011). Motivacija je nezamjenjivi dio matematičkog modeliranja. Budući da su učenici naučeni da uz tradicionalan način poučavanja ne razmišljaju kritički na probleme i ne susreću se sa stvarnim problemima, dolazimo do problema matematičkog modeliranja u kojem se spomenuta motivacija smanjuje i zanemaruje. Također, učenicima je potrebno određeno predznanje za rješavanje ovakvih zadataka. Možemo zaključiti da su takvi zadaci učenicima teži pa im je prema tome potrebno više vremena za rješavanje. Učenici su, kao i učitelji, ograničeni određenim vremenom u nastavi. Prema kurikulumu (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019), matematičkom je modeliranju u nastavi namijenjeno premalo ili nimalo vremena. S obzirom na nedostatak vremena za matematičko modeliranje, učitelji izbjegavaju matematičko modeliranje u nastavi (Kang i Noh, 2012). Učitelji, također, nisu dovoljno educirani za izradu, provođenje, kao ni asistiranje i pomaganje učenicima u rješavanju zadataka matematičkog modeliranja (Kang i Noh, 2012). Uz nedostatak edukacije i iskustva učitelja u izradi zadataka matematičkog modeliranja, pojavljuje se i problem pronalaženja točnih, valjanih i primjenjivih gotovih zadataka. Učitelji se često susreću s problemskim zadacima koji su lažno i netočno predstavljeni kao zadaci matematičkog modeliranja. Jedan primjer takvih zadataka smo već spomenuli u standardnoj primjeni matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi. Zadatak s posudicom leda spominje se kao primjer zadatka standardne primjene matematičkog modeliranja, a zapravo spada u tekstualne zadatke s ključnim riječima.

2.5. Gledišta na matematičko modeliranje u nastavi i učenju

Unatoč povećanom zanimanju za matematičko modeliranje, velik broj pitanja ostaje bez odgovora. Blum (1994) je istaknuo da postoji „znatan jaz“ između vodećeg područja istraživanja i razvoja u matematičkom obrazovanju s jedne strane i struke nastave matematike s druge strane. Važno je proučiti podučavanja i učenja matematičkog modeliranja iz sljedeća četiri gledišta: matematičkog, kognitivnog, kurikularnog i obrazovnog gledišta.

2.5.1. Matematičko gledište

Svijet matematike i svijet matematičkog obrazovanja međusobno djeluju, ali se ne preklapaju kada međusobno komuniciraju o matematičkom modeliranju (Cai i sur., 2014). Uzimajući usporedni primjer, istraživanje matematičkog dokaza pokazalo je da učenici i nastavnici imaju različite koncepcije u usporedbi s onima koje imaju znanstvenici. Slično tome, pojam matematičkog modeliranja u školskoj matematici razlikuje se od načina na koji ga razumiju istraživači matematičkog modeliranja. Zapravo, Cai i sur. (2014) ističu da je jedan od najvećih izazova u podučavanju i učenju matematičkog modeliranja “konceptualna zamućenost” u tome što se smatra modeliranjem. Čak ni istraživači koji već dugo provode istraživanja o matematičkom modeliranju nisu postigli dogovor o procesima modeliranja i konceptualizaciji matematičkog modeliranja (Cai i sur., 2014). Važno je napomenuti da se matematičko modeliranje prakticira i u prirodnim znanostima, inženjerstvu, poslovanju, ekonomiji, društvenim znanostima te u gotovo svim istraživačkim područjima.

S obzirom na nedostatak pozornosti koja je posvećena matematičkom modeliranju u nastavi, posebno u programima obrazovanja učitelja matematike, nije teško zamisliti da mnogi nastavnici matematike postavljaju pitanje: "Što je matematičko modeliranje?". Kratak opis matematičkog modeliranja i činjenica da se opis pojavljuje samo unutar visokih školskih standarda, vjerojatno pridonosi konfuziji učitelja. Daljnja konfuzija se pojavljuje kako se nastavnici susreću s literaturom koja koristi termin "model" i unutar i izvan konteksta "matematičkog modela" (Cai i sur., 2014).

2.5.2. Spoznajno, kognitivno gledište

Kako bi se poboljšalo učenje učenika, potrebno je razumjeti razvojni status njihovog mišljenja i rasuđivanja. Znanje učitelja o razmišljanju učenika ima značajan utjecaj na njihovo poučavanje u razredu, a time i na učenje učenika (Cai i sur., 2014). Iako se zna mnogo o kognitivnim procesima rješavanja matematičkih problema učenika, nije poznato mnogo o tome kako učenici pristupaju problemima matematičkog modeliranja (Borromeo Ferri, 2006). Neki su istraživači teoretizirali da učenici posjeduju mentalne modele koji povezuju matematiku i stvarni svijet (Borromeo Ferri, 2006). Iako se malo istraživača slaže s temeljnim kognitivnim značajkama matematičkog modeliranja, postoji određeni dogovor koji određuje da proces prelaska iz problema izvan matematike na njegovu matematičku formulaciju u matematičkom modeliranju započinje formuliranjem istraživačkih pitanja (Cai i sur., 2014).

Cai i sur., (2014) navode kako su provedena neka istraživanja koja su se uglavnom usredotočila na određivanje načina na koji učenici grade model i stoga su se usredotočili na takozvanu "fazu formuliranja". Oni su vizualizirali ovaj proces izgradnje modela s dijagramima kroz koje je grafički prikazano nekoliko koraka modeliranja pojedinaca. Središnji rezultat njihovog istraživanja bio je taj da je izgradnja modela vrlo složena aktivnost za pojedince. Budući da su samo istraživali sveučilišne studente, nije bilo empirijskih dokaza o kognitivnim procesima učenika osnovnih i srednjih škola (Cai i sur., 2014).

Također, Cai i sur. (2014) spominju istraživanje kojem je bilo cilj identificirati „blokade“ koje učenici s četrnaest i petnaest godina doživljavaju tijekom modeliranja te istaknuti da je cjelokupni proces modeliranja više cikličan nego linearan. Istraživanja pokazuju važnu ulogu metakognitivnih aktivnosti tijekom modeliranja (Cai i sur., 2014).

Središnji rezultat sljedećih istraživanja, koje spominju Cai i sur. (2014), bio je dokaz rekonstrukcije „individualnih putova modeliranja“ učenika pri izvođenju aktivnosti matematičkog modeliranja u učionici. Rezultati istraživanja pokazali su da matematički stilovi razmišljanja imaju snažan utjecaj na ponašanja učenika kod matematičkog modeliranja i nastavnika s obzirom na njihovu usmjerenost na “stvarnost” i “matematiku” (Borromeo Ferri, 2010).

Cai i sur. (2014) spominju klasifikaciju pet središnjih perspektiva modeliranja, s glavnim fokusom na ciljeve namijenjene modeliranju u nastavi:

- realistično ili primijenjeno modeliranje,
- kontekstualno modeliranje,
- obrazovno modeliranje,
- društveno-kritičko modeliranje i
- epistemološko modeliranje.

Ove teorijske perspektive shvaćaju se kao perspektive istraživanja. Cai i sur. (2014) navode kako je ova klasifikacija uglavnom rezultat opsežnih rasprava međunarodnih istraživača tijekom nekoliko europskih konferencija unutar grupe „Matematičko modeliranje i primjena“. Kognitivno modeliranje opisano je i kao meta-perspektiva, jer se usredotočuje na specifične ciljeve istraživanja, a ne na ciljeve poučavanja modeliranja. Ciljevi istraživanja kognitivnog modeliranja su opisivanje i razumijevanje kognitivnih procesa učenika tijekom aktivnosti modeliranja (Cai i sur., 2014). Rezultati empirijskih istraživanja pružili su više znanja o kognitivnim procesima tijekom modeliranja, posebno u pogledu potencijalnih barijera. Kada se promatraju različiti ciklusi modeliranja, prema Borromeo Ferri (2006), uglavnom se radi o ciklusu modeliranja u sedam koraka kao temelj ili instrument za analizu kognitivnih procesa. Izgradnja situacijskog modela ili mentalne prezentacijske situacije vrlo je individualan proces, jer treba shvatiti problem i vizualizirati situaciju (Borromeo Ferri, 2010).

Unutar kognitivnih gledišta modeliranja daje se dodatna karakterizacija takvih gledišta na temelju nekoliko studija koje je provela Borromeo Ferri. Ako se modeliranje razmatra pod kognitivnim gledištem, fokus je na individualnim procesima razmišljanja koji se izražavaju uglavnom kroz određene verbalne i neverbalne radnje u kombinaciji s pisanim rješenjima tijekom aktivnosti modeliranja pojedinaca (uključujući učitelje) (Borromeo Ferri, 2010).

2.5.3. Kurikularno gledište

Povijesno gledano, u svijetu je promjena kurikuluma promatrana i korištena kao učinkovit način za promjenu prakse u učionici i utjecanje na učenje učenika kako bi se zadovoljile potrebe svijeta koji se stalno mijenja (Cai i sur., 2014). Pritom matematičko modeliranje obično nije zasebna cjelina, niti postoje odvojeni udžbenici za matematičko modeliranje u nastavi (Cai i sur., 2014).

Cai i sur. (2014) navode kako se kurikulum može smatrati formalnom dokumentacijom koja određuje što se treba podučavati i učiti te kao takvo sadrži epistemologiju s povijesnim prioritetom. Međutim, moguće je proširiti razmatranje kurikuluma ne samo fokusiranjem na ono za što je namijenjen, nego i na ono što se provodi i što se postiže. Matematika bi pomoću kurikuluma trebala postati nešto jedinstveno definirano za svakog pojedinca kroz matematičku aktivnost u kojoj sudjeluje (Cai i sur., 2014). Uzimajući sociokulturni pogled, matematika, njezino poučavanje i učenje mogu se razmotriti kao međusobni odnos s razrednom zajednicom u kojoj učitelji i učenici žive i uče (Cai i sur., 2014). U povezivanju ljudske aktivnosti s matematikom kao disciplinom, za modeliranje se kao matematičku praksu nastoji pronaći mjesto (Cai i sur., 2014).

Borba (2009) spominje sinergije između modeliranja i digitalnih tehnologija u kojima raspravlja o tome kako se modeliranje može transformirati tehnologijom, gdje se učenici mogu osloboditi računanja i usredotočiti se na probleme koji se ne mogu rješavati ako digitalne tehnologije nisu dostupne. Ovakav pristup pokazuje jasnu mogućnost načina na koji je inverzija redoslijeda tema koje se predaju u kurikulumu moguća zbog korištenja tehnoloških alata za modeliranje (Cai i sur., 2014). Daljnja gledišta koja bismo mogli istražiti usredotočena su na modeliranje radnika u ustanovama izvan škole. Matematika u općem obrazovanju može se učiti iz aktivnosti na radnim mjestima. Rad se, na radnom mjestu u kojem je važna matematika, često oslanja na relativno jednostavnu matematiku ugrađenu u složene situacije. Složenost situacija s kojima se radnici suočavaju je znatna, ali je, naravno, sastavni dio njihovog svakodnevnog života, pa stoga u svom radu često ne prepoznaju da ono što rade uključuju matematiku uopće (Cai i sur., 2014).

2.5.4. Obrazovno gledište

Iako kurikulumi mogu pružiti učenicima mogućnost učenja matematičkog modeliranja, poučavanje u razredu čini vjerojatno najvažniji utjecaj na ono što učenici zapravo uče o modeliranju. Dakle, kvaliteta nastave je u velikoj mjeri odgovorna za uspjeh i napor učenika u učenju matematičkog modeliranja (Cai i sur., 2014). Uz posvećivanje određenog vremena zadacima matematičkog modeliranja, nastavnici trebaju odlučiti koje aspekte zadatka treba istaknuti, kako organizirati i voditi rad učenika, koja pitanja postaviti i kako podržati učenike bez preuzimanja procesa razmišljanja umjesto njih te na taj način eliminirati izazov. Slijedom toga, potrebno je razmotriti kako se mogu olakšati produktivne rasprave o aktivnostima modeliranja (Cai i sur., 2014).

Dok podučavanje matematičkim modeliranjem dijeli mnoge karakteristike kvalitetne nastave i učenja iz matematike, istodobno, ona uključuje niz praksi koje nisu dio tradicionalne učioničke nastave matematike. Pristupi modeliranju nastave mogu uključivati tradicionalne metode ili se mogu temeljiti na inovativnim nastavnim praksama kao što su metode istraživanja, grupno učenje i korištenje digitalnih tehnologija. Priroda nastave u matematičkom modeliranju varira ovisno o mnogim čimbenicima, uključujući: razinu obrazovanja, nacionalni kontekst, namjeru i očekivanje nastavnog programa, vrstu zadataka modeliranja i dostupnost nastavnih resursa. Žakelj (2015, str 110) navodi kako „proces modeliranja znači dublje promišljanje o matematičkom znanju“. Također, spominje kako se kod „modeliranja linearne veze između danih vrijednosti promišlja o linearnoj funkciji, a kod modeliranja eksponencijalne veze dublje promišljamo o eksponencijalnoj funkciji (Žakelj, 2015, str. 110).

Modeliranje zadataka na kojima se temelji pouka može se izvući iz niza situacija u stvarnom životu, uključujući industriju i radno mjesto, društvena i politička pitanja ili svakodnevni život (Cai i sur., 2014).

2.6. Pristupi poučavanju matematičkog modeliranja

Svrha modeliranja s obrazovnog gledišta može se smatrati kao cilj sam po sebi ili kao metoda za postizanje cilja konstrukcije znanja matematike (Cai i sur., 2014). Prva svrha temelji se na pretpostavci da je sposobnost modeliranja i pronalaženja rješenja, za životne situacije, kompetencija koja može služiti pojedincu u svakodnevnom životu i na radnom mjestu. Druga svrha je postignuta kada pojedinac konstruira novo znanje ili rekonstruira znanje koje je već stekao (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003) kada se bavi procesom modeliranja. Kako modeliranje zahtijeva korištenje prethodno stečenih matematičkih znanja na različite načine, ona promiče fleksibilan i prilagodljiv način razmišljanja u odnosu na korištenje matematičkih kompetencija. Izazovni problemi modeliranja, međutim, zahtijevaju prisvajanje novih matematičkih činjenica, vještina i procesa, što zahtijeva izgradnju novog znanja (Cai i sur., 2014).

Cai i sur. (2014) navode različite pristupe poučavanju matematičkog modeliranja:

- Odvajanje u kojem su matematika i modeliranje odvojeni u različitim predmetima;
- Miješanje u kojem se novo-razvijeni matematički koncepti i metode aktiviraju prema aplikacijama i modeliranju, iako se nužna matematika identificira od samog početka;
- Integrirani kurikulum za matematiku gdje se identificiraju problemi iz stvarnog života, a matematika potrebna za njihovo rješavanje razvija i uvodi naknadno;
- Interdisciplinarno integrirano koje djeluje s potpunom integracijom između matematike i izvan matematičkih aktivnosti gdje matematika nije organizirana kao poseban predmet.

Dok su ti pristupi poučavanju u matematičkom modeliranju različiti, oni se ne bi trebali smatrati međusobno isključivima, nego bi ih trebali izabrati učitelji koji pri planiranju nastave odabiru kako žele da poučavanje odražava njihovu namjeru. Ovaj izbor će utjecati na način na koji dizajniraju zadatke modeliranja (Cai i sur., 2014). Osmišljavanje zadataka također je uokvireno mogućnostima i ograničenjima obrazovnih sustava i okolnostima u školi. Zadaci se mogu proširiti složenim problemima modeliranja u kooperativnim, samo usmjerenim obrazovnim okruženjima (Blomhøj i Hoff Kjeldsen, 2006) do više ograničenih inačica zadataka modeliranja ugrađenih u tradicionalni nastavni program (Cai i sur., 2014).

Priroda dizajniranja zadataka modeliranja, međutim, postaje sve složenija kada se digitalne tehnologije uvedu u raspon resursa dostupnih učenicima i nastavnicima. Istraživanje uloge digitalnih tehnologija u podržavanju matematičkog modeliranja pokazuje da složeniji problemi modeliranja postaju dostupni učenicima (Geiger, Faragher i Goos, 2010), ali uspješna provedba tehnoloških „aktivnih“ zadataka modeliranja uvelike ovisi o stručnosti i povjerenju nastavnika, kao i njihova uvjerenja o prirodi učenja matematike (Cai i sur., 2014).

2.7. Prednosti i nedostaci matematičkog modeliranja u nastavi

Da bi matematika učenicima bila smislena, provođenje aktivnosti matematičkog modeliranja u ranim školskim godinama je nužno (English, 2010). Bogatstvo iskustava u matematičkom modeliranju pruža učenicima priliku da se uključe u zadatke koji odgovaraju trenutnom konceptualnom razumijevanju, a istovremeno pružaju mogućnosti za izazove i rast. (Asempapa, 2015). Uz sve prednosti matematičkog modeliranja, poznati su i nedostaci i izazovi u matematičkom modeliranju. U nastavku ćemo spomenuti neke od prednosti i nedostataka matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi.

2.7.1. Prednosti matematičkog modeliranja u nastavi

Zadaci matematičkog modeliranja omogućuju učenicima da shvate važnost i korisnost matematike za pojedince kao i za društvo. Matematičko se modeliranje sve više prepoznaje kao moćno sredstvo ne samo za promicanje razumijevanja učenika o širokom rasponu ključnih matematičkih i znanstvenih koncepata, već i da cijene potencijal matematike kao kritičkog alata za analizu važnih pitanja u njihovim životima, zajednicama i društvu općenito (English, 2010). Istraživanja su pokazala da učenici osnovnih i srednjih škola vrednuju važnost i korisnost matematike razvijajući i konstruirajući vlastite matematičke modele kroz stvaranje smislenih scenarija o problemima u njihovoj stvarnosti (Asempapa, 2015). Kroz matematičko modeliranje učenici prepoznaju ljepotu matematike i vide njezinu vrijednost i korisnost (English, 2010). Stoga, matematičko modeliranje motivira i podupire zanimanje učenika za matematiku. Upotreba matematičkog modeliranja u učionicama uglavnom eliminira pitanja učenika u vezi s tim je li tema dobra. Istraživanja su pokazala da matematičko modeliranje potiče učenike na razumijevanje širokog raspona važnih matematičkih pojmova (Asempapa, 2015). Aktivnosti matematičkog modeliranja učenicima stvaraju mogućnosti da percipiraju matematiku kao korisnu i primijenjenu, a ne apstraktnu i izoliranu (Asempapa, 2015). Matematičko modeliranje uključuje i podržava interes učenika za matematiku i čini matematiku smislenijom i relevantnijom (English i Watters, 2004). Osim toga, modeliranje pruža snažne i učinkovite načine kako pomoći učenicima da postanu bolji u rješavanju problema te da mogu lakše koristiti matematiku u stvarnim životnim situacijama, izvan škole (Lesh i Harel, 2003). Za razliku od tradicionalnih problema s riječima, zadaci matematičkog modeliranja zahtijevaju visoku kognitivnu pažnju. Bonotto (2008) smatra da je učenicima zanimljivije rješavati problem s kojim su se već susreli ili im je poznat, nasuprot zadataka koji imaju malo riječi, puno brojeva i nemaju nikakav smisao. Visoka kognitivna pažnja vodi učenike izvan osnovnog rješavanja problema gdje izvlače značenje iz simbolički opisanih problema riječi, u autentične situacije kojima je potrebno matematičko tumačenje i opis (Lesh i Harel, 2003). Učenici ne samo da trebaju razraditi kako doći do cilja, nego i sami trebaju interpretirati cilj kao i sve dane informacije. Matematičko modeliranje pruža učenicima mogućnost da izraze svoje razumijevanje i smisle situacije na načine koji su njima značajni. Kroz matematičko se modeliranje, zbog visokog kognitivnog zahtjeva zadataka, bolje razvija učenikovo konceptualno razumijevanje i kompetencije u matematici (Asempapa, 2015).

Zadaci matematičkog modeliranja pomažu učenicima da razviju vještine kritičkog mišljenja, razmišljaju izvan okvira, postavljaju pitanja i donose formirane odluke (Asempapa, 2015). Učenici kod rješavanja zadataka matematičkog modeliranja mogu pristupiti zadacima različitim pristupima, kao i pomoću više različitih interpretacija (English, 2007). Matematičko modeliranje omogućuje učenicima razvijanje sposobnosti korištenja modela za interpretaciju i objašnjenje složenih sustava, razvijanje prezentacijske tečnosti, matematičko razumijevanje problema na različite načine i korištenje sofisticiranih tehnoloških alata i resursa (Lesh i Harel, 2003). Asempapa (2015) spominje kako matematičko modeliranje pomaže učenicima da kritički razmisle o problemu prije no što ga riješe. Budući da problemi matematičkog modeliranja nemaju specifičnu strukturu za njihovo rješenje, pomažu učenicima da postanu kritični mislioci u procesu rješavanja. Ako se pravilno provedu, zadaci matematičkog modeliranja stvaraju i poboljšavaju razumijevanje postupaka kod učenika tako da ih angažiraju u problematičnom, višestrukom, kompleksnom problemu (Doerr i English, 2003; Zbiek i Conner, 2006).

Matematičko modeliranje među učenicima potiče metakognitivne vještine, konceptualno razumijevanje, kompetencije, kreativne i inovativne sposobnosti te sociokulturnu ulogu matematike (Blum, 1995). Istraživanja pokazuju da matematičko modeliranje promiče razumijevanje širokog raspona ključnih matematičkih koncepata i treba ih poticati u svakoj dobi i razredu (Asempapa, 2015). Istraživanje je pokazalo značajan napredak u razvoju metakognitivnih vještina i vještina kritičkog mišljenja učenika. Istraživači su otkrili da su problemi s modeliranjem omogućili učenicima angažiranje i pružili im priliku da izraze svoje ideje i razmišljanja u više različitih prikaza (English i Watters, 2004).

Iskustva matematičkog modeliranja idealna su za promicanje komunikacije i timskog rada kroz društvena iskustva. Matematičko modeliranje potiče stilove podučavanja koji promiču aktivan pristup konstruiranju vlastitog učenja kroz dijalog, raspravu i komentiranje drugih radova i rješenja. Učenici postaju aktivni sudionici u aktivnostima matematičkog modeliranja (Asempapa, 2015). Aktivnosti modeliranja potiču suradnički rad i pomažu učenicima da razviju rješenja koja podliježu nadzoru svojih kolega. Komunikacijski procesi u matematičkom modeliranju igraju važnu ulogu u socijalnom, kao i matematičkom razvoju učenika. Kang i Noh (2012) navode da kada učitelji promatraju svoje učenike koji rade na zadacima matematičkog modeliranja i kada ispituju rezultate koje njihovi učenici proizvode, učitelji su u stanju prikupiti korisne informacije o konceptualnim snagama i slabostima svojih učenika i bolje se upoznati s načinom razmišljanja svojih učenika te tako nastava može biti učinkovitija. Iz tog razloga, čini se razumnim potaknuti buduće učitelje da koriste aktivnosti matematičkog modeliranja kako bi dobili pristup razvoju razumijevanja i obrazaca razmišljanja svojih učenika (Kang i Noh, 2012).

2.7.2. Nedostaci matematičkog modeliranja u nastavi

Bez obzira na prednosti koje matematičko modeliranje donosi učenju matematike, postoje neke pojedinosti koje predstavljaju izazove. U nastavku su opisani tipični izazovi s kojima se suočavaju istraživači i učitelji dok istražuju matematičko modeliranje. Da bi matematičko modeliranje učinkovito funkcioniralo u učionici, učitelji trebaju odustati od većine svojih tradicionalnih načina angažiranja svojih učenika (Asempapa, 2015). Dakle, da bismo razumjeli problem matematičkog modeliranja, trebamo razumjeti sami problem izvan matematike. Prema Asempapa (2015), glavni razlog zbog kojeg učitelji imaju poteškoća s modeliranjem jest da je znanje iz stvarnog svijeta nužno i da učenje postaje otvorenije i manje predvidljivo.

Borreomeo Ferri (2010) navodi da je izazov matematičkog modeliranja zahtjev zadataka na kognitivnoj razini i izazovi prakse u učionici. Postoji razlika između obrazovnih ciljeva i svakodnevne prakse u učionici, jer se matematičko modeliranje čini teškim za većinu učitelja. Matematičko je modeliranje za neke učitelje zahtjevno i opterećuje ih jer bi trebali razumjeti određene pojave koje im obično nisu potrebne. Također, postoji strah učitelja da učenici ne mogu riješiti zadatke matematičkog modeliranja zbog potrebne visoke kognitivne pažnje (Asempapa, 2015). Matematičko je modeliranje neraskidivo povezano s drugim matematičkim kompetencijama kao što su čitanje, komunikacija, oblikovanje i primjena strategija rješavanja problema, što naglašava visoke kognitivne vještine. Većina učitelja pretpostavlja da veliki dio učenika smatra modeliranje teškim ili izazovnim, stoga ih rijetko primjenjuju u učionici (Asempapa, 2015).

Neki učitelji smatraju da je rad sa zadacima matematičkog modeliranja kompliciran i dugotrajan. Dakle, učenici ne dobivaju dovoljno vremena ni prilike da obrađuju svoje vještine razmišljanja. Istraživanja pokazuju da je izazov podučavati matematičko modeliranje u većini tradicionalnih učionica, zbog stava učenika (Asempapa, 2015). English (2007) spominje da se aktivnosti kod matematičkog modeliranja ne mogu objektivno ocjenjivati pa to stvara otpor učitelja u provođenju takvih zadataka. Kao što je spomenuto da je prednost matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi to što učenici mogu pristupiti zadacima matematičkog modeliranja na više načina, kao i pomoću više interpretacija, učiteljima takav pristup zadacima predstavlja problem u praćenju i ispravljanju rada učenika (English, 2007). Kurikulumi većine škola vođeni su standardiziranim testiranjem. Također, u većini se udžbenika, napisanih za osnovne i srednje škole, stavlja manji naglasak na aktivnosti matematičkog modeliranja. Učitelji rijetko koriste zadatke modeliranja u svojim učionicama zbog vremenskog ograničenja i njihove percepcije da su zadaci matematičkog modeliranja složeni i zahtjevni (Borromeo Ferri, 2010).

Kang i Noh (2012) spominju zanimljivo zapažanje u kojem spominju probleme i aktivnosti matematičkog modeliranja koje su korištene u provedenim istraživanjima. Problemi matematičkog modeliranja i njihovi zadaci nisu prikazani u udžbenicima matematike. Nedostatak primjera u udžbenicima stvara složenu situaciju u kojoj učitelji u razredu trebaju sami tražiti ili razvijati aktivnosti matematičkog modeliranja ako ih žele koristiti u svom poučavanju. Iako se ne smije zanemariti uloga učitelja kao istraživača, takav nedostatak obeshrabruje ili stvara otpor prema korištenju problema matematičkog modeliranja u učionicama (Kang i Noh, 2012).

Udžbenici za osnovne i srednje škole uglavnom ne rješavaju komunikacijske vještine povezane sa zadacima matematičkog modeliranja. Osim toga, ne postoje razvijene jasne rubrike koje bi pomogle učiteljima u zadacima matematičkog modeliranja. Prema tome, većina učitelja smatra da je procjena zadatka matematičkog modeliranja složena i dugotrajna (Asempapa, 2015). Budući da su standardizirani testovi propisani u većini škola, praksa u učionicama uglavnom ne dopušta učenicima puno vremena za rad na problemima matematičkog modeliranja, gdje mogu raspravljati, kritički analizirati ili proučavati rješenja svojih vršnjaka. Budući da se učenicima onemogućava rješavanje zadataka matematičkog modeliranja, većini se učenika onemogućava i razvijanje komunikacijskih i društvenih vještina koje su im potrebne (Asempapa, 2015).

Možemo zaključiti da je matematičko modeliranje važan proces u nastavi. Učenici pomoću matematičkog modeliranja usavršavaju kognitivne, komunikacijske i matematičke sposobnosti. Zaključujemo da se od učenika, pomoću matematičkog modeliranja, zahtjeva da razmišljaju na drugačije, maštovitije i novije načine. Iako učitelji uglavnom nemaju vremena za provedbu zadataka matematičkog modeliranja, smatramo da je uvođenje takvih zadataka važno u učenju i razvoju učenika, ali i samih učitelja.

U sljedećem ćemo poglavlju opisati ulogu matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi i prikazati i opisati uvođenje matematičkog modeliranja u razrednu nastavu. Također, u trećem ćemo poglavlju opisati i obrazovanje učitelja razredne nastave za provođenje matematičkog modeliranja te spomenuti neka istraživanja. Budući da je spomenuta nedostupnost zadataka matematičkog modeliranja, u trećem ćemo poglavlju spomenuti i opisati nekoliko zadataka koji se mogu primijeniti u razrednoj nastavi.

3. MATEMATIČKO MODELIRANJE U RAZREDNOJ NASTAVI

Donedavno, matematičko modeliranje nije bilo razmatrano u ranom školskom kurikulumu. U većoj mjeri, ako je i postojalo, bilo je u domeni srednjih škola. Literatura navodi da osnove matematičkog modeliranja mogu i trebaju započeti u osnovnoj školi gdje djeca već posjeduju osnovne kompetencije na kojima se modeliranje može razvijati (English i Watters, 2004). Istraživanje koje su proveli English i Watters (2004) pokazalo je da djeca mogu naučiti modelirati, generalizirati, i obrazlagati probleme u ranijim godinama nego što se tradicionalno vjerovalo. Sudjelovanje u vježbama matematičkog modeliranja pruža učenicima pristup znanstvenom i matematičkom načinu zaključivanja. Aktivnosti matematičkog modeliranja se razlikuju od uobičajenih problema s kojima se učenici susreću u razredu. Rješavanje problema u ranim godinama je obično bilo ograničeno na primjere u kojima učenici primjenjuju već poznati postupak ili slijede jasno definirani put. Dani podaci, cilj i koraci za rješenje su obično specificirani nedvosmisleno, to jest, mogu se interpretirati na jedan i samo jedan način. To znači da je postupak interpretacije za učenike minimaliziran ili eliminiran (English i Watters, 2004). Jedini problem za učenike je kako doći od danog stanja do ciljanog stanja. Iako se ne osporava važnost ovih postojećih problemskih iskustava, upitno je bave li se na adekvatan način matematičkim znanjem, procesima i društvenim vještinama koje učenici trebaju.

Za razliku od tipičnih, odnosno stvarnih problema koji se prezentiraju učenicima, problemi matematičkog modeliranja uključuju autentične situacije koje bi trebalo interpretirati i opisati na matematičke načine (Lesh i Harel, 2003). Dane informacije uključujući i rješenja zadataka mogu biti nepotpuna, nejasna ili nedefinirana. Nadalje, informacije sadržane u zadacima matematičkog modeliranja su često prikazane u prezentacijskom obliku kao što su tablice s podacima ili vizualne prezentacije, koje učenik treba interpretirati. Zadnjih je godina također naglašena i važnost argumentacije u razvoju matematičkog mišljenja kod djece. Kao što English i Watters (2004) navode, važno je biti svjestan i njegovati ranu pojavu argumentacije, posebice jer će to formirati osnovu matematičkog dokazivanja u kasnijim godinama. Aktivnosti matematičkog modeliranja pružaju čvrstu osnovu za razvoj argumentacije kod učenika, zato što su to prvenstveno društvena iskustva koja razvijaju efektivnu komunikaciju, rad u timovima i razmišljanje. Aktivnosti modeliranja su posebno dizajnirane za rad u malim grupama. Brojna se pitanja, nagađanja, konflikti i rješenja pojavljuju dok se učenici pripremaju u radu, razvijaju metodu rada i procjenjuju problem (English i Watters, 2004). Matematičko se modeliranje prepoznaje kao moćno sredstvo pri procjeni potencijala matematike kao kritičkog alata za analizu važnih pitanja u učenikovom životu, zajednici i društvu u cjelini (English, 2007). Istraživanja su pokazala da su učenici u osnovnoj školi sposobni razviti vlastite modele i sustave za rješavanje složenih problemskih situacija (English, 2006; English i Watters, 2004). Matematičko modeliranje u osnovnoj školi na taj način daje djeci pristup u učenju orijentiran na budućnost. Matematika koju doživljavaju razlikuje se od onoga što se tradicionalno uči u nastavnom planu i programu, jer su za matematiku realnih situacija potrebne različite vrste aktivnosti i vještina. U realnim situacijama potrebne su akumulacije, vjerojatnosti, frekvencije i vektori, dok su operacije potrebne za sortiranje, organiziranje, odabir, kvantificiranje, vrednovanje i transformiranje velikih skupova podataka (English, 2006; English, 2007). Prema English (2007), problemi modeliranja nude bogatija iskustva učenja od standardnih problema u razrednoj nastavi. Matematičko modeliranje pruža mogućnost učenicima da koriste vlastito matematičko razmišljanje prilikom rješavanja problema. To znači da problemi zahtijevaju od učenika da shvate situaciju kako bi je mogli sami riješiti na načine koji su njima značajni (English, 2007).

3.1. Uvođenje matematičkog modeliranja u razrednu nastavu

Osnovna škola je obrazovno okruženje gdje bi sva djeca trebala započeti razvoj matematičkog modeliranja. Naime, čak i velika razdoblja reformi i prosvjetiteljstva u osnovnoškolskoj matematici nisu dali većini djece pristup dubokim idejama i ključnim procesima koji dovode do uspjeha izvan škole (English i Watters, 2004). Kod uvođenja rješavanja problema i matematičkog modeliranja u početnu nastavu matematike, često se očekuje da učenici imaju razvijene vještine računanja. Prema tome, učitelji primjenjuju ovakve oblike rada kao završni oblik rada nakon poučavanja pojedinih operacija, ali ih rijetko koriste kao metodu uvođenja u novi sadržaj (Cindrić, 2016). Ukratko, smatra se da se modeli i prakse matematičkog modeliranja mogu uvrstiti u škole te se kvalitetno i smisleno ostvariti (English, 2007). Pregled literature i istraživanja pokazuje da su problemi matematičkog modeliranja i njezinih aktivnosti u tim istraživanjima bili zadatci koji se ne prikazuju u udžbenicima. Prema tome, učitelji trebaju sami tražiti i smišljati takve aktivnosti u razredu. Jedino na takav način mogu koristiti ove oblike u svom poučavanju. Takav nedostatak obeshrabruje učitelje ili stvara njihov otpor prema korištenju problema matematičkog modeliranja (Kong i Noh, 2012).

U nastavi matematike, kao i u nastavi općenito, možemo očekivati kognitivne poteškoće kod učenika, tj. učenici mogu imati probleme u recepciji veće količine informacija u isto vrijeme, probleme u prepoznavanju implicitno zadanih podataka, probleme s predočavanjem, odnosno vizualizacijom problema, dvosmislenih tumačenja informacija i svojih ideja te mnoge druge (Asempapa, 2015). Učitelji trebaju biti svjesni problema koji se pojavljuju kod učenika u zadacima modeliranja. Također, trebaju biti spremni pomoći učenicima kako bi lakše prevladali određene prepreke i napredovali u rješavanju problema. Osim toga, na samo izvođenje nastave odnose se i prepreke koje postoje u matematičkom modeliranju. Matematičko modeliranje zahtjeva dosta vremena, kao što je već spomenuto pa se ne uklapa u jedan školski sat. Budući da učitelji ponekad nemaju vremena čak ni za realizaciju planiranih nastavnih sadržaja, ne ulaze ni u izdvajanje vremena za matematičko modeliranje (Asempapa, 2015). Također, teško je procijeniti kako će učenici reagirati na zadatke koji uključuju matematičko modeliranje te koliko će im vremena trebati za njihovo rješavanje. U svemu tome, važna je dobra učiteljeva priprema, dobri i prilagođeni primjeri i problemi matematičkog modeliranja prilagođeni uzrastu i mogućnostima učenika, dok se od učenika traži dodatna angažiranost i interes (Apatić, 2016). Dodajmo da bi učitelji trebali biti svjesni da će aktivnosti matematičkog modeliranja otkriti i pokrenuti različite strategije i razmišljanja kod učenika (Mousoulides, Christou i Sriraman, 2008). Te aktivnosti potiču učenike da istražuju značajne pojave, odlučuju što je vrijedno pažnje u problemu, a zatim organiziraju, strukturiraju, vizualiziraju i prikazuju podatke (English, 2010). Asempapa (2015) navodi kako aktivnosti matematičkog modeliranja stvaraju mogućnosti za učenike da percipiraju matematiku kao korisnu i primijenjenu, a ne apstraktnu i izoliranu. Matematičko modeliranje omogućuje učenicima povezivanje učioničke matematike sa stvarnim svijetom, pokazujući primjenjivost matematičkih ideja (Zbiek i Conner, 2006). S obzirom na stvarni problem, učenici trebaju razumjeti situaciju iz stvarnog svijeta i napraviti pretpostavke kako bi osmislili matematičku metodu za rješavanje problema (Bahmaei, 2011). Dakle, matematičko modeliranje produbljuje razumijevanje učenika i obogaćuje učenje matematike. Učenici u grupama, radeći na problemima matematičkog modeliranja, razvijaju važne vještine kao što su vještine suradničkog učenja i metakognitivne vještine (Tanner i Jones, 2002).

U prvom su razredu učenici već razvili širok repertoar pisanja. Kod djece, razvijanje sposobnosti inspiracije daje osnovu za njihovu matematičku aktivnost. Za matematičko je modeliranje bitno razvijanje repertoara riječi, uvažavanje njihovih kvaliteta, upotreba istih, manipuliranje izmišljenim riječima i njihovo korištenje za objašnjavanje i uvjeravanje drugih. Također, važna je i sposobnost učenika da osmisle nove situacije, uvode varijable i razumiju problem u kojem se nalaze (English, 2012). Sve ovdje navedeno utječe na razvoj sposobnosti kod matematičkog modeliranja. Problemi matematičkog modeliranja zahtijevaju da djeca sama, na njima bitne načine, shvate zadanu situaciju i matematiziraju je. Ipak, učenici se i dalje podučavaju na tradicionalni način, držeći se kurikuluma koji ne dozvoljava djeci da razumiju kada i zašto se nešto koristi (English, 2012). Dogan Temur (2012) navodi kako u radu s tradicionalnim aktivnostima i procjenama problema učitelji često pokušavaju shvatiti što određeno rješenje govori učenicima. U većini slučajeva učitelji ne mogu reći ništa više o rješenju zadanog problema od onog što učenici već znaju ili su naučili rješavajući zadatak. Kada se radi kroz aktivnosti matematičkog modeliranja, od učenika se traži da daju opise, objašnjenja, postupke i konstrukcije. U problemima iz udžbenika Dogan Temur (2012) spominje kako se traži uporaba određenog postupka (npr. sličnih trokuta), a informacije koje su potrebne za provođenje postupka već su osigurane. Dakle, kod takvih je zadataka fokus na podsjećanju na prethodno naučeni postupak i na njegovo kopiranje kako bi se dobio očekivani odgovor, a ne proces razmišljanja. Osim toga, ovaj problem ne zahtijeva od učenika da procijene kvalitetu modela koji se koristi. English (2010) naglašava kako mala djeca imaju moćne i kvalitetne matematičke ideje koje mogu koristiti za rješavanje mnogih stvarnih problema i matematičkih problema s kojima se susreću. Također, spominje kako su mala djeca sposobna za mnogo više nego što im često pripisuju njihove obitelji i nastavnici. Najveći izazov je pronaći načine na koje bi se mogle koristiti i razvijati matematičke ideje u ranom djetinjstvu kako bi se postigla veća matematička moć (English, 2010). U rješavanju zadataka kod mlađe djece, English (2010) navodi niz preporuka za postavljanje temelja u rješavanju zadataka matematičkog modeliranja. Prema English (2010), bitna preporuka za postavljanje temelja u rješavanju zadataka matematičkog modeliranja je omogućavanje učenicima vrijeme da sortiraju crteže po jednoj varijabli. Nakon sortiranja, crteži se miješaju. Od učenika se zahtjeva da ponovno sortiraju crteže prema drugoj varijabli. Ovakav postupak služi učenicima za skretanje pozornosti na različite varijable (English, 2010). English (2010) upozorava kako učitelji vrlo često u rješavanju početnih zadataka matematičkog modeliranja, riješe sva pitanja koja su učenicima zanimljiva. Učitelji učenicima prezentiraju riješene probleme i na taj način onemogućavaju učenicima priliku da se uhvate u koštac s takvim pitanjima. English (2010) navodi primjer takvih pitanja kao što je: „Koje varijable treba uključiti?“. Budući da učitelj prezentira odgovor, učenicima ostaje samo sortiranje, a učitelj je riješio intrigantno i motivirajuće razmišljanje unaprijed. Prema English (2010), izazov učitelja je također i izbjegavanje prekomjernog pripremanja zadataka, kao i izbjegavanje nepotrebnog kompliciranja zadataka.

U provedenom istraživanju, English (2010) zaključuje kako učenici trebaju odlučiti koji aspekti su vrijedni pažnje, kako će se ti aspekti rješavati (organiziranje, strukturiranje, vizualizacija) te kako će se dobiveni podaci prikazati. English (2010) navodi kako su u provedenom istraživanju sudjelovali učenici prvog razreda i njihovi učitelji u školi u Brisbaneu u Australiji. Škola je u vrijeme istraživanja bila smještena u središnjem društveno-ekonomskom području i imala približno 500 upisanih učenika. Svako odjeljenje u prvom razredu činilo je 25 ili 26 učenika, s prosječnom dobi od 6 godina i 8 mjeseci. Prema English (2010), prijašnja iskustva djece u radu s podacima ograničena su na sortiranje stavki (npr. obojenih medvjeda) i popunjavanje grafičkih prikaza slika (npr. omiljenih kućnih ljubimaca, boja kose, očiju i sl.). Temeljna komponenta aktivnosti matematičkog modeliranja je odabir atributa i razvrstavanje stavki prema tim atributima. U prvoj aktivnosti, English (2010) spominje kako su učenici u početku dobili opsežan skup podataka koji se sastoji od 10 kompleta duplikata izrezaka stavki koje je lik priče, Baxter Brown, čuvao u svojoj spavaćoj sobi. Učenici su trebali odlučiti koje predmete je moguće reciklirati, koje je trebalo odbaciti te koji se mogu ponovno upotrijebiti. Učenicima je bio zadatak organizirati, strukturirati i prikazati svoje klasifikacije na način koji oni sami izaberu. U sljedećoj aktivnosti, English (2010) navodi da su učenici dobili novi set od samo

12 predmeta, bez duplikata, kojima su učenici trebali dodijeliti vlastite atribute za klasificiranje podataka i predstaviti načine svojih klasifikacija. Učenici su to učinili na više načina. Za obje aktivnosti stavke nisu pokazivale lako prepoznatljive atribute, kao što je određena boja ili oblik. Prema English (2010), odlučivanje o grupnoj definiciji atributa bio je temeljni proces u sudjelovanju učenika. Stavke je moguće klasificirati u obje aktivnosti prema više od jednog atributa. U definiranju atributa generirana je značajna rasprava. Kako bi učenici identificirali različite atribute, trebali su usmjeriti svoju pažnju na kvalitete predmeta, a ne na same predmete. Talenti učenika u prepoznavanju širokog raspona atributa bili su jasno vidljivi u aktivnosti. Učenici su pokazali sposobnost identificiranja prilično nejasnih atributa, kao što je mogućnost pisanja po njemu ili uočavanje da je napravljeno od dijelova stabala, fosilnih izvora i mekih ili tvrdih materijala. U ovom slučaju učenici su se „udaljavali“ od stvarnih predmeta u potrazi za obilježjima koja nisu bila odmah vidljiva (English, 2010). Utvrđujući različite atribute, učenici su trebali odlučiti što je vrijedno pažnje, a što je potrebno staviti u pozadinu. Vještine u preusmjeravanju pozornosti s jedne stavke na drugu, u klasifikaciji predmeta, posebno je bio vidljiv u aktivnosti gdje su učenici trebali organizirati vlastite atribute na najmanje dva različita načina. Primjerice, jedna skupina učenika klasificirala je kutiju s jajima kao karton i zatim ju je klasificirala kao jelo, prebacujući svoj fokus s ambalaže na sadržaj (English, 2010). English (2010) navodi kako su učenici u aktivnostima potaknuti da razmotre smanjenje skupova podataka i umjesto toga koriste reprezentativne stavke. Uklanjanje značajki koje nisu nužno potrebne, English (2010) smatra kao važan cilj u matematičkom modeliranju. Ta se sposobnost promatrala u skupinama gdje je jedna grupa prikazala samo jednu stavku svake vrste, dok je druga grupa tvrdila da sve stavke ne moraju biti prikazane, ali mogu. Treća grupa odlučila je koristiti samo četiri stavke svake vrste. Ostali su učenici prevladali problem prikazivanja svih podataka promjenom orijentacije njihovog lista papira i učinkovitim korištenjem bilježenja naziva stavki umjesto lijepljenja stavki (English, 2010).

English (2010) navodi kako nisu bile uključene sve komponente matematičkog modeliranja u opisanim aktivnostima. Učenici nisu prikupljali svoje podatke. Također, English (2010) spominje kako se smatralo važnim pružiti mogućnost učenicima da rade sa složenim atributima u organiziranju, strukturiranju i predstavljanju danih podataka. Ta su iskustva postavila temelje za naknadno prikupljanje podataka kod djece u istraživanju okoline svoje učionice.

3.2. Obrazovanje učitelja razredne nastave

Dogan Temur (2012) navodi kako je učinkovito podučavanje matematike tijekom prvog razreda osnovne škole ključno za formiranje matematičkog mišljenja učenika. Osposobljavanje učitelja smatra se važnim u postizanju visoke kvalitete podučavanja matematike. Istraživanje koje Dogan Temur (2012) spominje provedeno je kako bi se otkrila iskustva i problemi budućih učitelja tijekom njihovog osposobljavanja i primjene modeliranja matematičkih problema u nastavi matematike. U provedenom je istraživanju sudjelovalo 39 budućih učitelja razredne nastave (10 muškaraca i 29 žena). U vrijeme istraživanja sudionici su bili upisani u tečaj "Iskustvo u nastavi", nastavni program državnog sveučilišta u Turskoj. Tijekom osposobljavanja, Dogan Temur (2012) navodi da su se u provedenom istraživanju budući nastavnici obučavali u rutinskim i ne-rutinskim problemskim situacijama. Budući su učitelji izjavili da preferiraju rutinske problemske situacije jer je teško oblikovati problemske situacije. Dok prezentiraju matematičke koncepte, učitelji prenose svoje razumijevanje i učenje jezika svojim učenicima. Stoga, matematička komunikacija i matematički jezik imaju veliku važnost u učenju matematike (Dogan Temur, 2012). Mišljenja budućih učitelja otkrivaju da su učenici imali poteškoća u procesu rješavanja problema, u nekim slučajevima učenici nisu mogli razumjeti što budući učitelji pokušavaju objasniti, a problemske situacije ponekad nisu bile prikladne za razrednu razinu. Dogan Temur (2012) navodi kako bi učitelj trebao procijeniti stupanj težine problema te da je od ključne važnosti da se u učenju matematike koristi pravi matematički jezik. Budući su učitelji, u istraživanju, izjavili da je matematičko modeliranje pridonijelo učenju od vršnjaka te da su učenici postali motiviraniji. Također, budući su učitelji dodali da je proces modeliranja učinio proces rješavanja problema konkretnijim i ugodnijim. Tijekom procesa modeliranja učenici često govore glasno, dijele i prezentiraju svoja rješenja. Dogan Temur (2012) navodi kako je modeliranje proces koji ubrzava proces komunikacije učenika, povećava njihovu pažnju, usredotočenost na put do rezultata i omogućuje učenikovo fokusiranje. Rasprave u nastavi matematike neophodne su za postizanje individualnog razumijevanja, dijeljenje rješenja i interpretaciju (Dogan Temur, 2012). Ispitani učitelji su izjavili da su neki od njihovih učenika prvi put doživjeli iskustvo modeliranja. Učenici su naveli da su koristeći alate i modeliranje bolje razumjeli proces rješavanja problema i samog modeliranja. Dogan Temur (2012) navodi da će učenici razviti vlastite strategije učenja i proces rješavanja ako njihovi učitelji izaberu probleme visoke kvalitete i pruže im bogato okruženje za učenje. Učenici se moraju osjećati slobodnima i ugodnima u otkrivanju svih svojih ideja. Trebali bi biti u stanju preuzeti rizike, isprobati nove strategije i pronalaziti različita objašnjenja. Čak i ako njihova objašnjenja nisu točna, treba ih raspraviti u učionici, ponovno ih objasniti i koristiti kao alat za učenje. Na taj način će moći procijeniti svoje korake i rezultate (Dogan Temur, 2012). Analizirajući uzorke modeliranja budućih učitelja u praksi, vidi se da su učenici koristili različite figure, sheme, pa čak i stvarne objekte. Iskustvo budućih učitelja, u izvođenju nastave matematike, ključno je u tome što su uvidjeli odnos između teorije i prakse i stekli znanje za buduće susrete sa sličnim situacijama. S obzirom na dobnu skupinu nastave matematike u smislu nastave u osnovnoj školi, potrebna su bogata iskustva učenja i poučavanja i ne bi ih se trebalo podcjenjivati. Proces modeliranja ne može biti uspješan bez učinkovitog planiranja i učinkovite komunikacije među sudionicima (Dogan Temur, 2012). Poticanje učenika da sudjeluju u aktivnostima modeliranja omogućava im da dijele svoje matematičke ideje unutar grupe te je učinkovitije od klasične frontalne nastave. Pažljivo planiranje i redovita savjetovanja s učiteljem, doprinijet će uspješnom procesu modeliranja (Dogan Temur, 2012). U spomenutom istraživanju vidljivo je da bi budući učitelji, kao rezultat prakse, mogli steći značajno iskustvo u rješavanju problema i korištenju modeliranja u rješavanju problema. Iskustva budućih učitelja, nakon provedenog istraživanja, otkrivaju da su ih pozitivne reakcije, koje su stekli od svojih učenika, potaknule na korištenje modeliranja. U ovom istraživanju, budući učitelji su imali priliku primijeniti ono što su naučili u teoriji (Dogan Temur, 2012). Da bi se postigla stručnost u nastavi matematike budućih učitelja, treba im dati točne povratne informacije u svakoj fazi procesa obuke tako da njihovi učenici mogu dobiti pozitivne rezultate u pogledu matematike. Dogan Temur (2012) navodi kako je ovo istraživanje provedeno kako bi se otkrilo iskustvo, problemi i uspjeh budućih učitelja kroz procese obuke i prakse u rješavanju i modeliranju matematičkih problema.

Watters, English i Mahoney (2004) opisuju istraživanje u kojem su proučavali razvoj matematičkog modeliranja u razredu i profesionalni razvoj učitelja tih razreda. U provedenom su istraživanju sudjelovala četiri odjeljenja trećeg razreda (8-godišnjaci) iz prigradske škole i njihovi učitelji. Jedan su razred podučavala dva učitelja u različito vrijeme tijekom godine, tako da je pet učitelja bilo uključeno u istraživanje (Watters i sur., 2004). Učitelji su bili različitih iskustava, od relativno nedavnih diplomanata do onih koji su imali više od dvadeset godina iskustva. Istraživanje se provodilo tijekom šestomjesečnog razdoblja. Na kraju provedenog istraživanja, Watters i sur. (2004) navode kako su učitelji potvrdili da su učenici uživali u aktivnostima, iako su ih smatrali izazovnim. Učitelji su zaključili da je za neke učenike potrebna veća struktura, dok su drugi učenici zahtijevali manje intervencije (Watters i sur., 2004). Watters i sur. (2004) navode kako su pitanja povezana s razinom pismenosti učenika i njihovom sposobnošću zajedničkog rada u grupama. Ispitanici su bili neodlučni uključiti se u određene strategije poučavanja zbog straha da neće ispuniti ono što istraživači žele te su bili zabrinuti zbog toga što nisu znali koliko su slobodni u provedbi zadataka (Watters i sur., 2004). Konačno, učitelji su potvrdili da su se učeničke matematičke ideje poboljšale. Poboljšan je i matematički jezik, ali je također poboljšano i korištenje tablica i podataka. Profesionalno, učitelji su razmišljali o nedostatku mogućnosti za zajedničko planiranje i promišljanje tijekom godine. Učitelji su bili razočarani što nisu iskoristili prilike da se aktivnije uključe u razumijevanje razmišljanja učenika. U kontekstu normalnih učionica, stvorena je ozbiljna prepreka vezana uz učinkovitost razvoja matematičkog modeliranja (Watters i sur., 2004). Učitelji su priznali da već niz godina nisu sudjelovali ni u jednom profesionalnom razvoju matematike i da nakon provedenog istraživanja očekuju da će u sljedeće dvije godine provesti novi nastavni plan matematike. Watters i sur. (2004) ovim istraživanjem naglašavaju važnost predanosti i podrške učiteljima da se uključe u profesionalni razvoj kroz modele koji zahtijevaju stalno angažiranje.

3.3. Primjeri zadataka

Osnovna škola je obrazovni okoliš gdje bi svi učenici trebali započeti smislen razvoj matematičkog modeliranja. Kao što je već navedeno, teško se pronalaze zadaci primjereni učenicima razredne nastave, iako se preporuča njihovo korištenje i uvođenje u nastavu. Ovdje ćemo spomenuti neke primjere zadataka, dob učenika za koju su ti zadaci primjenjivi te opisati način provedbe tih zadataka u nastavi.

3.3.1. Zadatak 1. „Grah, slavni grah“

Zadatak „Grah, slavni grah“, kojeg spominju English i Watters (2004), izabran je kao početna aktivnost matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi, koja je primjenjiva u trećem razredu osnovne škole. Zadatak započinje pričom o biljkama graha koje je farmer sadio, zajedno s podacima o raznim uvjetima za njihov rast.

Zadatak:

Uzgajivač farme treba odlučiti o najboljim svjetlosnim uvjetima za uzgoj graha. Kao pomoć u donošenju odluke, posjetio je udruženje farmera koji testiraju uzgoj penjućih biljaka graha koristeći dva različita svjetlosna uvjeta: uzgoj graha na suncu, bez sjene i uzgoj graha ispod platnene krpe, odnosno u sjeni. Udruženje farmera izmjerilo je i zabilježilo duljinu stabljike proizvedenog graha nakon deset tjedana. Uzgajali su 4 reda biljke graha u svakom svjetlosnom uvjetu.

Pomoću podataka iz tablice (Tablica 1.) odredite koji je od svjetlosnih uvjeta najpogodniji za uzgoj graha. U pismu opišite svoju preporuku farmeru o uvjetima za koje ste se odlučili i objasnite kako ste došli do te odluke. Predvidite duljinu stabljike graha proizvedenog u 12. tjednu za svaku vrstu svjetlosti i farmeru, u pismu, objasnite postupak i dobivenu vrijednost.

Nakon odgovaranja na pitanja o tekstu, učenicima je prezentiran zadatak koji se sastoji od dva dijela. Učenici su trebali pregledati dvije tablice (Tablica 1.) s podacima koje su prikazivale duljinu stabljike graha nakon 6, 8 i 10 tjedana rasta pod dva različita uvjeta (English i Watters, 2004).

Tablica 1. Zadatak „Grah, slavni grah“

uzgoj na suncu				uzgoj u sjeni			
biljka graha	tjedan 6.	tjedan 8.	tjedan 10.	biljka graha	tjedan 6.	tjedan 8.	tjedan 10.
red 1	9 cm	12 cm	13 cm	red 1	5 cm	9 cm	15 cm
red 2	8 cm	11 cm	14 cm	red 2	5 cm	8 cm	14 cm
red 3	9 cm	14 cm	18 cm	red 3	6 cm	9 cm	12 cm
red 4	10 cm	11 cm	17 cm	red 4	6 cm	10 cm	13 cm

Izvor: English, L. D. i Watters, J. (2004,str. 338). Mathematical Modelling in the Early School Years. Preuzeto s http://emis.impa.br/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR142_English.pdf (15.4.2019.)

Koristeći podatke iz Tablice 1. učenici su trebali odrediti pri kojim će uvjetima biti bolji uzgoj graha. U drugom djelu zadatka učenici su trebali napisati farmeru pismo u kojem su skicirali preporuke i objasnili na koji način su došli do odluke o najpovoljnijim uvjetima za rast graha i zatim predvidjeti duljinu stabljike graha proizvedenu na 12. tjedan, za svaki tip uvjeta (English i Watters, 2004). Učenici su također trebali objasniti kako su došli do predviđanja, tako da farmer može koristiti njihove metode za slične situacije. Nakon završetka aktivnosti, svaka je grupa trebala pred razredom iznijela svoje zaključke (English i Watters, 2004).

Zadatak „Grah, slavni grah“ predstavlja jednostavniji zadatak matematičkog modeliranja u kojem učenici ispituju svoje znanje o uvjetima koji su potrebni za rast biljaka, a same matematičke račune koriste minimalno. Ovaj se zadatak, kako navode English i Watters (2004), pokazao kao zanimljiv te je potaknuo učenike na zajedničku diskusiju.

3.3.2. Zadatak 2. „Godišnje natjecanje papirnatim avionima“

English i Watters (2004) spominju zadatak koji je primjenjiv u trećem razredu osnovne škole. Učenicima se predstavlja novinski članak koji opisuje godišnje natjecanje zrakoplova koje obuhvaća let papirnatih zrakoplova. Učenicima su dane informacije o konstrukciji zrakoplova i o pravilima natjecanja. Nakon završetka pitanja o razumijevanju teksta, učenicima su dane informacije o problemu i zadatak.

Upute:

Pokušat ćete dizajnirati avion koji će udovoljiti današnjim standardima zrakoplova. Međutim, za svoje avione nećete koristiti aluminijske, razne metalne dijelove ili mlazne motore. Sve što će vam trebati jesu komadići papira ili bilo koji drugi slični materijali te puno mašte.

Imate priliku dizajnirati avione koji će moći letjeti na velike udaljenosti. Na ovom ćete natjecanju trebate dizajnirati avion koji će putovati ravnom stazom. Međutim, za svako natjecanje postoji niz pravila kojih se trebate pridržavati da biste pokušali osvojiti glavnu nagradu. Neka od pravila su: 1. ne smiju se raditi rezovi u krilima aviona, 2. Mogu se izrezivati dijelovi unutrašnjosti aviona i 3. trebate izgraditi vlastite zrakoplove.

Radit ćete u grupama na dizajniranju i testiranju vaših aviona prije natjecateljskog dana. Svaka grupa dobiva tri pokušaja. U ovom se natjecanju mogu pojaviti eliminacije. Eliminacija znači da zrakoplov nije putovao ravnim putem.

Na ovom natjecanju bit će dodijeljene tri nagrade. Jedna će biti dodijeljena grupi čiji avion najduže ostane u zraku, druga nagrada grupi čiji avion bude putovao ravnom stazom najdalje, a konačna nagrada je sveukupna nagrada grupi koja pobijedi u natjecanju.

Pitanja za razmišljanje:

1. O čemu se radi u godišnjem natječaju za papir u zrakoplovu?

2. Što treba učiniti kako bi se dizajnirao avion koji će biti uspješan za natjecanje?

3. Što znači ako je vaš avion eliminiran u jednom od vaših pokušaja?

4. Koje se jedinice mjerenja koriste u natjecanjima u kojoj se mjeri udaljenost i vrijeme?

Zadatak:

Prema tablici (Tablica 2.) s podacima o provedenom natjecanju u drugoj školi, napišite pismo sucima s objašnjenjem o tome tko bi, prema vašoj procjeni, trebao odnijeti glavnu nagradu.

Izradite vlastite zrakoplove i provedite vlastito natjecanje prema zadanim pravilima.

Tablica 2. Zadatak: „Godišnje natjecanje papirnatim avionima“

Timovi	Pokušaj	Vrijeme u zraku (sekunde)	Udaljenost ravnom stazom (metri)
Tim A	1	2	11
	2	2	12
	3	Eliminacija	Eliminacija
Tim B	1	3	12
	2	1	7
	3	1	8
Tim C	1	1	9
	2	3	11
	3	2	11
Tim D	1	3	12
	2	Eliminacija	Eliminacija
	3	1	8
Tim E	1	2	9
	2	1	10
	3	2	13
Tim F	1	1	9
	2	2	11
	3	Eliminacija	Eliminacija

Izvor: English, L. D. i Watters, J. (2004). Mathematical Modelling in the Early School Years. Preuzeto s http://emis.impa.br/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR142_English.pdf (15.4.2019.)

Učenici su, uz pomoć podataka iz Tablice 2., trebali odrediti koja je grupa pobjednik ovog natjecanja. Učenici su mogli uzeti u obzir vrijeme aviona provedeno u zraku, duljinu ravnog puta koji je prošao i eliminacije (English i Watters, 2004). Također, učenici su trebali objasniti zašto su izabrali određenu grupu kao pobjednike te objasniti kako su došli do rezultata. Nakon završetka aktivnosti, učenici su izlagali svoja pisma i rezultate (English i Watters, 2004).

Budući da su učenici nižih razreda zaigrani i često i sami izrađuju avione od papira, možemo zaključiti da bi im ovakav zadatak mogao biti zanimljiv, potaknuti njihov interes i maštu. Nakon provedbe zadatka moguće je izvesti slično natjecanje s učenicima i njihovim vlastitim rezultatima te na taj način postići veću i zanimljiviju prisutnost matematičkog modeliranja u nastavi.

3.3.3. Zadatak 3. „Prva flota“

English (2007) spominje zadatak „Prva flota“ koji je namijenjen učenicima četvrtog razreda osnovne škole. Prije samog zadatka, učenicima su predstavljene osnovne informacije o problemskom kontekstu. Kako English (2007) spominje, britanska vlada je u svibnju 1787. naručila 11 brodova kako bi isplovila do Australije. Učenicima su postavljena brojna pitanja u kojima se ispitivalo razumijevanje teksta kako bi se osiguralo da su učenici razumjeli pozadinsku priču (English, 2007). Nakon odgovora na ova pitanja, učenicima se predstavlja problem, zajedno s tablicom podataka s popisom 13 ključnih elemenata okoliša koje treba uzeti u obzir pri određivanju prikladnosti svakog od pet navedenih područja. (Tablica 3. i Tablica 4.)

Problemski tekst je objasnio da je, nakon povratka iz Australije u Veliku Britaniju 1770. godine, kapetan James Cook izvijestio da je u zaljevu Botany bilo bujnih pašnjaka i dobro zalijevane i plodne zemlje pogodne za usjeve i za ispašu stoke. Ali kad je kapetan Phillip stigao u Botany Bay u siječnju 1788., mislio je da nije prikladno za novo naselje. Kapetan Phillip krenuo je na sjever u potrazi za boljim mjestom za naseljavanje (English, 2007).

Zadatak:

Kapetanu Phillipu je bilo teško donijeti odluku gdje će se smjestiti prvo naselje jer je trebalo uzeti u obzir mnogo čimbenika. Ako biste se mogli pomoću vremenskog stroja vratiti u 1788. godinu, kako biste savjetovali kapetana Phillipa? Je li Botany Bay bio loš izbor ili ne? Rana naselja dogodila su se u uvali Sydney Port Jackson, na Rose Hillu uz rijeku Parramatta, na otoku Norfolk, u luci Hacking i u Botany Bayu. Koje bi od tih pet mjesta bilo najbolji izbor kapetana Phillipa? Vaš zadatak je stvoriti sustav ili model koji bi se mogao koristiti za odlučivanje gdje je najbolje sidriti njihove brodove i naseljavati se. Koristite podatke navedene u tablici (Tablica 3. i Tablica 4.) kako biste utvrdili koja je lokacija najbolja za naseljavanje.

Dok je kapetan Phillip bio prvi zapovjednik koji se naselio u Australiji, još je mnogo brodova planiralo putovanje i naseljavanje na obalama Australije. Vaš sustav ili model trebao bi pomoći budućim doseljenicima da donesu informirane odluke o tome gdje smjestiti svoje gradove.

Tablica 3. Zadatak: „Prva flota“, 1. dio

	Pristup moru	Prisutnost morskih pasa	Zemljište dostupno za budući rast	Mogućnost prijevoza sakupljanih ili proizvedenih predmeta	Kvaliteta tla	Zemljište pogodno za stoku	Drveće i biljke
Botany Bay, NSW	Morska obala duga preko 47 km, otvorena i nezaštićena	Da	Da	Da, brodom i kopnom	Vlažna, močvarna zemlja, može dovesti do bolesti	Suho	Vrlo velika stabla tvrdog drva, ne mogu se posjeći osnovnim alatima
Sydney Cove, Port Jackson, NSW	Duboka voda blizu obale, zaklonjena	Da	Da	Da, brodom i kopnom	Neplodna, vruća, suha, čak i pjeskovita u dijelovima	Pogibeljno ovcama i svinjama, dobro za stoku i konje	Vrlo velika stabla tvrdog drva, ne mogu se posjeći osnovnim alatima
Rosehill, Parramatta, NSW	Da, 25 km prema rijeci	Ne	Da	Kopnom	Bogata, plodna, daje bujnu travu	Pogodno za sve	Manja debla, borovi, meka stabla

Port Hacking, NSW	35km južno od Sydneya, zaštićena luka	Da	Da	Da, brodom i kopnom	Sposobna podržati razne prirodne Vegetacije	Pogodno za sve	Obilna stabla eukaliptusa i fikusa
Norfolk Island	2km obale nedostupne morskim putem osim jedne male uvale, izuzetno stjenovita obala i litice	Da	Ukupno 3455 hektara	Zbog male uvale, samo usjevi	Daleko nadmoćnija od drugih, pogodna za žito i sjeme	Pogodno za koze, ovce, stoku i perad	Biljke borova i lana

Izvor: English, L. D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modelling. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/ae4c/fc08d6bb8b1d32eb6b7072af09027608b6ac.pdf (7.7.2019.)

Tablica 4. Zadatak: „Prva flota", 2. dio

	Životinje prirodnog staništa	Dostupnost svježe vode	Ribarstvo	Prosječna temperatura	Prosječna količina padalina u mjesec dana	Evidencija poplava
Botany Bay, NSW	Noj, klokan, oposum, ptice	Mali potočić prema sjeveru, ali nisko močvarno zemljište u blizini	Da, ali nekvalificirani muškarci mogu loviti ribu samo s čamca	18°	98mm	3

Sydney Cove, Port Jackson, NSW	Noj, klokan, oposum, ptice, divlje patke	Zalihe tekuće vode s nekoliko izvora	Da, ali nekvalificirani muškarci mogu loviti ribu samo s čamca	18°	98mm	7
Rosehill, Parramatta, NSW	Raznoliko uključujući jegulje	Na rijeci Parramatta	Da, ali nekvalificirani muškarci mogu loviti ribu samo s čamca	18°	98mm	40
Port Hacking, NSW	Raznoliko	Na rijeci Port Hacking	Da, ali nekvalificirani muškarci mogu loviti ribu samo s čamca	18°	133mm	8
Norfolk Island	Zelene kornjače, ptice, zamorci, leteća vjeverica, divlje patke, pelikani i galebi	Izuzetno dobro opskrbljeno	Da, ali nekvalificirani muškarci mogu loviti ribu samo s čamca	19°	110mm	0

Izvor: English, L. D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modelling. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/ae4c/fc08d6bb8b1d32eb6b7072af09027608b6ac.pdf (7.7.2019.)

Učenici su pomoću tablica (Tablica 3. i Tablica 4.) određivali koja informacija im je bitna, odnosno koju informaciju smatraju važnom u naseljavanju ljudi i njihovom životu. Nakon određivanja važnosti informacija, učenici su izrađivali svoje modele kojima su dolazili do rješenja zadatka. Na kraju rada, učenici su izlagali svoje modele, opisivali ih i objašnjavali te zajedno diskutirali o samim modelima.

Zadatak „Prva flota“ predstavlja jedan od načina uvođenja interdisciplinarnih problema kao i samog modeliranja u kurikulum matematike razredne nastave (English, 2007). Takvi problemi omogućuju različite pristupe rješenjima i omogućuju djeci svih razina postignuća da sudjeluju u tim iskustvima i imaju koristi od njih.

3.3.4. Zadatak 4. „Površina Antartike“

U primjerima zadataka za PISA testiranje (Primjeri PISA zadataka, n.d.) koje se provodi u Hrvatskoj, spominje se zadatak koji je primjeren 4. razredu osnovne škole. U tom se zadatku učenicima predstavlja slijepa karta Antartike s pripadajućim mjerilom. Učenici, prema toj karti, trebaju izračunati površinu Antartike i objasniti postupak rješavanja problema.

Zadatak:

Procijeni površinu Antartike uz pomoć mjerila na karti.

Prikaži postupak izračunavanja i objasni kako si došao/la do procjene (možeš crtati po karti ako će ti to pomoći u procjenjivanju):

Slika 1. Antartika

Izvor: Primjeri PISA zadataka. (n.d.) Matematička pismenost. Preuzeto s https://pisa.ncvvo.hr/primjeri-pisa-zadataka/ (4.1.2020.)

Uz pomoć Slike 3., učenicima je zadatak odrediti površinu Antartike. Učenici su mogli crtati po karti. Učenici su točno riješili zadatak ako su prekrivanjem površine Antartike pravokutnikom ili kvadratom i računanjem njegove površine, dobivanjem odgovora pomoću crtanja kruga, zbrajanjem površina nekoliko geometrijskih likova ili dobivanja točnog odgovora nekim drugim postupkom rješavanja, došli do rješenja od 12 000 000 km^2 do 18 000 000 km^2 (Primjeri PISA zadataka, n.d.). Učenici su, također, trebali prikazati postupak rješavanja zadatka i objasniti sam postupak.

Možemo zaključiti da je, od prethodno navedenih zadataka, ovo teži zadatak, budući da su u pitanju veliki brojevi i površine. Iako je upitna primjerenost u 4. razredu osnovne škole, smatramo da je zanimljiv kao aktivnost za dodatnu nastavu matematike razredne nastave ili kao primjer zadatka iz područja „Želim znati više".

3.3.5. Zadatak 5. „Divlji požari"

High School Mathematical Contest in Modeling, HiMCM, odnosno natjecanje iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.), navodi zadatak u kojem učenici trebaju raspodijeliti četiri vatrogasne jedinice po zadanom parku kako bi ga zaštitili od požara. U ovom smo radu zadatak prilagodili te smatramo kako bi se zadatak mogao provesti u grupnom radu s učenicima 4. razreda osnovne škole.

Zadatak:

Šumska je služba zatražila vaš tim za pomoć u raspodjeli resursa za borbu protiv divljih požara.

Šumska se služba posebno brine za divlje požare u parku, koji se sastoji od malih stabala i grmova, u obliku kvadrata dimenzija 8 km sa svake strane. Prije nekoliko godina šumska je služba izgradila vatrogasnu mrežu sjever-jug i istok-zapad koje tvore pravokutnu mrežu po unutrašnjosti parka. Protupožarna je mreža izgrađena u intervalima od 1 km.

Divlji će se požari najvjerojatnije pojaviti za vrijeme sušne sezone, koja se u ovom području prostire od srpnja do rujna. Za vrijeme sušne sezone tijekom dana prevladava zapadni vjetar. Česte su pojave gromova koji izazivaju požare.

Šumska služba želi rasporediti četiri vatrogasne jedinice za kontrolu požara tijekom sljedeće sušne sezone. Svaka jedinica sastoji se od 10 vatrogasaca, jednog kamiona za prijevoz, jednog kamiona za smeće, jednog kamiona za vodu (50 000 litara) i jednog buldožera (kamion i prikolica). Jedinica ima motorne pile, ručni alat i drugu protupožarnu opremu. Ljudi se mogu brzo prebaciti helikopterom u područje parka, ali se sva oprema mora voziti postojećim vatrogasnim vozilima. Za vrijeme sušnih razdoblja, jedan je helikopter stalno u pripravnosti.

Vaš je zadatak odrediti najbolju raspodjelu protupožarnih jedinica unutar parka. Služba za šume može postaviti baze za te jedinice na mjestima bilo gdje unutar područja. Osim toga, od vas se traži da pripremite prognozu procjene štete. Ova će se prognoza koristiti za procjenu divljine koja će vjerojatno izgorjeti od požara. Također, prognoza će djelovati kao mehanizam za pomoć službi u određivanju situacija u kojima će biti potrebne dodatne vatrogasne jedinice.

Učenicima je prvi zadatak da zamisle kako bi zadani park izgledao s obzirom na zadane upute. Nakon zamišljanja, učenici trebaju odrediti najbolje lokacije u parku za postavljanje vatrogasnih jedinica. U sljedećem zadatku, učenici trebaju pripremiti prognozu štete u kojoj će odrediti, prema lokaciji vatrogasnih jedinica, koja je njihova procjena štete te u kojim situacijama smatraju da su potrebne dodatne vatrogasne jedinice. Nakon rješavanja zadataka, poželjno je organizirati zajedničku diskusiju.

3.3.6. Zadatak 6. „Suzbijanje nasilja u gradu“

Zadatak „Suzbijanje nasilja u gradu“, koji se spominje u HiMCM, natjecanju iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.), u ovome je radu prilagođen, kako bi se mogao primijeniti u četvrtom razredu osnovne škole kao grupni rad.

Zadatak:

Regionalni je grad imao mnogo problema s bandama i nasiljem tijekom godina. Gradonačelnik, šef policije i gradsko vijeće trebaju vašu pomoć. Dostupni su podaci za: Incidenti nasilja, ubojstva, napadi, regionalno stanovništvo (podaci popisa stanovništva), nezaposlenost, upis u srednju školu, napuštanje srednje škole, zatvorska populacija, pušteno na uvjetnu slobodu, kršenja uvjetne slobode i maloljetnički zatvorenici.

Analizirajte i modelirajte ove podatke kako biste gradu dali plan za smanjenje nasilja. Nakon što dovršite analizu i model, pripremite priopćenje za gradonačelnika u kojem ćete iznijeti svoje prijedloge koji preporučuju strategiju kampanje za suzbijanje nasilja.

Tablica 5. Podaci 1. dio

Godina	Nasilja	Ubojstva	Napadi	Popis stanovništva	Nezaposlenost
2004.	695	17	678	420 802	17 689
2005.	652	7	645	421 374	15 716
2006.	690	7	683	421 417	14 738
2007.	725	14	711	423 762	15 368
2008.	736	25	711	428 549	17 806

Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

Tablica 6. Podaci 2. dio

Godina	Upisi u srednju školu	Napuštanje srednje škole	Zatvorska populacija	Pušteno na uvjetnu slobodu	Kršenja uvjetne slobode	Maloljetnički zatvorenici
2004.	9 308	124	157 895	118 018	76 725	3 436
2005.	9 492	85	158 837	122 737	80 962	2 881
2006.	9 496	124	166 547	131 315	89 883	2 517
2007.	9 482	180	166 277	137 590	92 628	2 115
2008.	9 561	147	166 277	137 590	92 628	1 568

Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

U ovome se zadatku od učenika očekuje da analiziraju podatke iz zadanih tablica (Tablica 5. i Tablica 6.). Učenici trebaju sami odrediti koji su podaci bitni u rješavanju ovog zadatka. Nakon analize, učenici trebaju promisliti i obraditi modeliranje podataka kako bi predložili na koji način smanjiti nasilje u gradu.

U drugom dijelu zadatka učenici trebaju napisati priopćenje za gradonačelnika u kojem će iznijeti, objasniti i opisati strategije i prijedloge za koje oni smatraju da će smanjiti nasilje u gradu. Pomoću ovih priopćenja, predlaže se da učenici zajedno prodiskutiraju i predstave jedni drugima svoje prijedloge.

3.3.7. Zadatak 7. „Hitna medicinska reakcija"

HiMCM, natjecanje iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.), opisuje zadatak matematičkog modeliranja koje se temelji na ambulantama za hitne slučajeve i njihovim raspodjelama. Smatramo kako bi se ovakav zadatak, koji je u ovom radu pojednostavljen, mogao provoditi u grupnom radu s učenicima 4. razreda osnovne škole.

Zadatak:

Koordinator službe za hitne slučajeve (ESC) za neku županiju zainteresiran je za pronalaženje tri ambulante kako bi se maksimalno povećao broj stanovnika do kojih se može doći u roku od 8 minuta od hitnog poziva. Županija je podijeljena na 6 zona, a prosječno vrijeme potrebno za putovanje od jedne do druge zone pod polu savršenim uvjetima sažeto je u Tablica 7.

Ciljevi vašeg modela:

1. Odredite lokacije za tri ambulante s vozilima hitne pomoći koja bi maksimalizirala broj ljudi do kojih je moguće doći u roku od 8 minuta od poziva 911. Možemo li pokriti sve? Ako ne, koliko ljudi ostaje bez pokrića?

2. Jedna je ambulanta postavljena za hitni poziv i ostaju nam samo dvije ambulante, kamo bismo ih smjestili da povećaju broj ljudi do kojih se može doći u roku od 8 minuta? Možemo li pokriti sve? Ako ne, koliko ljudi ostaje bez pokrića?

3. U slučaju da dvije ambulante više nisu dostupne, gdje bi trebala biti postavljena preostala ambulanta? Možemo li pokriti sve? Ako ne, koliko ljudi ostaje bez pokrića?

4. Pripremite kratku bilješku u kojoj ćete iznijeti svoje preporuke iz vašeg modela i analize za ESC.

Tablica 7. Prosječno vrijeme potrebno za putovanje od jedne do druge zone pod polu savršenim uvjetima

	Prosječno potrebno vrijeme					
Zone	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	8	12	14	10	16
2	8	1	6	18	16	16
3	12	18	1.5	12	6	4
4	16	14	4	1	16	12
5	18	16	10	4	2	2
6	16	18	4	12	2	2

Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

Tablica 8. Broj stanovnika po zonama

Zone	Broj stanovnika
1	50 000
2	80 000
3	30 000
4	55 000
5	35 000
6	20 000
Ukupno	270 000

Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

U navedenom zadatku učenici trebaju uz pomoć potpitanja stvarati svoje modele za različite situacije. U prvom pitanju učenici trebaju osmisliti svoj model kako bi najbolje i najdjelotvornije rasporedili tri ambulante u 6 zona. U drugom pitanju učenici rade isto, ali s dvije ambulante. Treće pitanje zahtijeva od učenika da razmisle i postave jednu ambulantu za svih šest zona, tako da djelotvornost bude što veća. Na kraju, u četvrtom pitanju, učenici trebaju sva svoja razmišljanja, zaključke i prijedloge zapisati kao bilješke. Preporučamo zajedničku diskusiju, na kraju rada, kao važan dio zadatka.

3.3.8. Zadatak 8. „Koliko vrijedi?"

U HiMCM, natjecanju iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.) navodi se zadatak koji smo u ovom radu prilagodili učenicima 6. razreda osnovne škole. Zadatak započinje pričom o podijeli imovine između majke i četiri sina.

Zadatak:

Godine 1995. Noah Sentz umro je u prometnoj nesreći, a njegovo imanje predano je sudu. Državni je zakon odredio da 1/3 sve imovine pripada njegovoj ženi, a 2/3 sve imovine pripadne djeci. Noah je imao četvero djece. Tijekom sljedeće četiri godine, troje od četvero djece prodalo je svoj udio imovine majci za svotu od po 8400 američkih dolara svakome. Izvorna ukupna imovina bila je površine 75,43 hektara zemlje. Budući da četvrto dijete nije sudjelovalo u prodaji, ovaj je tjedan tužilo imanje zbog zakonitog nasljedstva iz prvobitne presude. Sudac je presudio u korist četvrtog sina i utvrdio da mu s pravom pripada novčana naknada. Sudac je odabrao vašu grupu kao porotu kako bi odredio iznos naknade.

Koristite načela matematičkog modeliranja kako biste izgradili model koji vam omogućuje određivanje iznosa naknade za četvrto dijete. Pored toga, pripremite kratki sažetak sudu koji objašnjava vaše rezultate.

U ovom su zadatku učenici trebali izraditi model kojim bi odredili iznos naknade koji bi se trebao isplatiti četvrtom djetetu. U drugom dijelu zadatka, učenici su trebali napisati objašnjenje svoje odluke kojim će sudu dati opis kako su došli do svoje odluke, koji su faktori utjecali na njihovu odluku te zašto je sud donio ispravnu odluku.

Iako zadatak „Koliko vrijedi?“ nije primjeren za učenike razredne nastave, smatramo da je dobar primjer zadatka matematičkog modeliranja. Također, ovakav se zadatak može primijeniti kao dobar primjer učiteljima u osmišljanju i stvaranju novih zadataka.

3.3.9. Zadatak 9. „Najam automobila“

Zadatak „Najam automobila“, koji se spominje u HiMCM, natjecanju iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.), namijenjen je učenicima 8. razreda osnovne škole. Zadatak započinje kratkim uvodom u problem nakon kojega učenici sami trebaju odrediti varijable koje su za njih važne, kako bi došli do rješenja.

Zadatak:

Neki ljudi unajmljuju automobil kada kreću na dugo putovanje. Uvjereni su da na taj način štede novac. Čak i ako ne štede novac, smatraju da se najam čini vrijednim uz saznanje da ako se automobil pokvari na putovanju, problem i popravak pokriva tvrtka koja iznajmljuje automobil.

Analizirajte ovu situaciju i utvrdite pod kojim je uvjetima najam automobila prikladnija opcija. Odredite ograničenja kilometraže za vlastiti automobil i vrijednost raspodjele troškova vozača i putnika.

U navedenom zadatku, učenici trebaju zaključiti koje su prednosti i nedostaci unajmljenog i vlastitog automobila. Uz ovaj je zadatak moguće korištenje udžbenika, Interneta i drugih izvora podataka kako bi se došlo do informacija o cijenama najma automobila, cijenama goriva, cijenama popravaka ili bilo koje druge informacije koju učenik smatra važnom u rješavanju zadatka. Ovakav je zadatak kompleksniji te zahtjeva više vremena u njegovom rješavanju, ali i diskutiranju.

3.3.10. Zadatak 10. „Galerija“

U ovome ćemo radu spomenuti i zadatak koji se nalazi u HiMCM, natjecanju iz matematičkog modeliranja za srednje škole (COMP, n.d.). „Galerija“ je primjer težeg zadatka koji smo u ovome radu prilagodili učenicima 8. razreda osnovne škole. Zadatak započinje opisom galerijskog prostora u kojem se otkriva problem sigurnosti umjetničkih djela.

Zadatak:

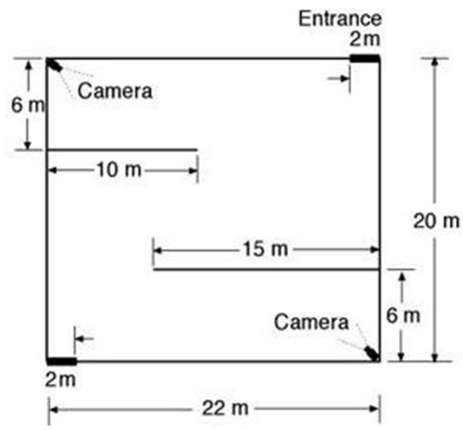
U umjetničkoj se galeriji održava posebna izložba malih akvarela. Izložba će se održati u pravokutnoj prostoriji dugoj 22 metra i širokoj 20 metara s ulaznim i izlaznim vratima širine 2 metra, kao što prikazuje Slika 4. Dvije sigurnosne kamere učvršćene su u kutovima sobe, a video zapis prati osoblje iz sobe za daljinsko upravljanje. Sigurnosne kamere u svakom trenutku prikazuju vidno polje od 30°. Kamere se okreću preko cijelog vidnog polja, odnosno pokrivaju cijelu prostoriju, a potrebno vrijeme za jedan ciklus je 20 sekundi.

Za izložbu treba pokazati 50 akvarela. Svaka slika zauzima otprilike 1 metar zidnog prostora i mora biti odvojena od susjednih slika 1 metar praznog prostora. Također, slika mora biti obješena 2 metra od spoja zidova. Iz sigurnosnih razloga slike moraju biti najmanje 2 metra udaljene od ulaza. Galeriji je potrebno dodati i dodatni unutarnji zidni prostor u obliku prenosivih zidova. Prijenosni zidovi dostupni su u sekcijama od 5 metara. Akvareli trebaju biti postavljeni na obje strane prijenosnih zidova. Da bi se osiguralo dovoljno prostora, paralelni zidovi moraju biti udaljeni najmanje 5 metara unutar cijele galerije. Da bi se olakšao pregled, susjedni zidovi ne smiju se presijecati u oštrom kutu.

Slika 4. i Slika 5. prikazuju konfiguraciju galerijske sobe za posljednje dvije izložbe. Prisutni izlagač izrazio je određenu zabrinutost zbog sigurnosti svoje izložbe i zatražio je od uprave da analizira sigurnosni sustav i preuredi prijenosne zidove kako bi optimizirao sigurnost izložbe.

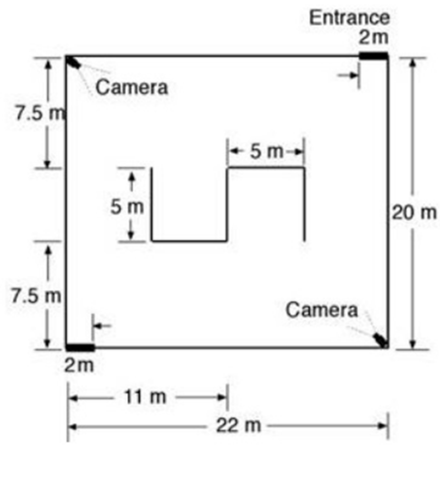
Odredite način za mjerenje sigurnosti eksponata za različite zidne konfiguracije. Pomoću ove mjere utvrdite koja je od dvije prethodne izložbe bila sigurnija. Na kraju, odredite optimalnu konfiguraciju prijenosnog zida za eksponat akvarela na temelju vaše mjere sigurnosti.

Slika 2. Prvi primjer konfiguracije galerijske sobe



Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

Slika 3. Drugi primjer konfiguracije galerijske sobe



Izvor: COMAP. (n.d.) HiMCM: Problems and Results. Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

Zadatak „Galerija" zahtjeva veliku koncentraciju i promišljanje učenika. Budući da je zadatak opsežan, za njegovo je rješavanje potrebno izdvojiti više vremena te ga primijeniti u grupnom radu.

Možemo zaključiti da se korištenjem i primjenom ovakvih zadataka može djelotvorno približiti matematičko modeliranje učenicima u razrednoj nastavi, ali i primjena matematike u okruženju učenika izvan škole. Zadaci matematičkog modeliranja se, u većini slučajeva, rade u grupnom radu. Ovakve je zadatke moguće raditi i kao domaće uratke, ali ipak ne preporučamo takvu primjenu zadataka u razrednoj nastavi. Budući da su učenici još mladi i tek uče metode matematičkog modeliranja, preporuča se rješavanje ovih zadataka u grupnom radu, u razredu, uz asistenciju educiranog učitelja. Nakon rješavanja zadataka, smatramo da je potrebna zajednička diskusija u kojoj će učenici razmijeniti stečena iskustva, komunicirati i dobiti odgovore na eventualna pitanja i nedoumice. U zadacima matematičkog modeliranja učitelj ima ulogu asistenta, odnosno stoji na raspolaganju učenicima, odgovara na pitanja na koja sami učenici ne znaju odgovor, navodi učenike na smisao problema, postavlja pitanja učenicima, vodi disciplinu razreda i grupa te potiče učenike na kreativnost, razmišljanje i rad. Iako su zadaci korisni u svojoj primjeni, zaključujemo da je potrebno puno vremena za rješavanje i diskusiju učenika u razredu.

Budući da je satnica matematike u razrednoj nastavi popunjena obaveznim sadržajima, učiteljima najčešće ne ostaje dovoljno vremena za provedbu ovakvih zadataka. Uz to, njihova edukacija o provedbi istih nije odgovarajuća. Stoga učitelji nisu u mogućnosti kvalitetno i kompetentno pripremiti sadržaje ni zadatke za provedbu s učenicima. Zadaci matematičkog modeliranja, u većini slučajeva, nemaju jedinstveno točno rješenje. Ovakvi se zadaci mogu točno riješiti na više različitih načina. Rješenje ovisi o načinu razmišljanja, maštanja i presuđivanja učenika. Budući da su zadaci kompleksni, dugi i opširni, teško ih je izmišljati i stvarati. Prilikom pisanja ovog rada bilo je mnogo problema sa samim nalaženjem zadataka koji se mogu primjenjivati u razrednoj nastavi. Možemo zaključiti da je uz sve nabrojene prednosti, provedba matematičkog modeliranja korisna za razvoj učenika razredne nastave. Također, zaključujemo da uz sve prisutne probleme i nedostatke, učitelji gube hrabrost, volju i samopouzdanje za provedbu zadataka matematičkog modeliranja.

4. ZAKLJUČAK

Matematičko modeliranje može utjecati na učenikovu motivaciju i zanimanje prema matematici. Zadaci matematičkog modeliranja potiču učenike na kritičko promišljanje o tekstu zadatka, kako bi odredili koje su varijable u zadatku važne, a koje su zanemarive. Također, zadaci potiču učenike da izražavaju svoju kreativnost, osobno razmišljanje, svoja stajališta i iskustva. Pomoću zadataka matematičkog modeliranja, matematika učenicima postaje smislenija, zanimljivija i korisnija. Osim toga, zaključujemo da matematičko modeliranje zahtijeva visoku kognitivnu pažnju učenika, potiče komunikaciju i timski rad.

Pregled literature pokazuje da se matematičkom modeliranju u nastavi pridaje premalo pozornosti i vremena. Ustanovljeno je da ne postoji jedinstvena i najtočnija definicija matematičkog modeliranja. Možemo zaključiti da je jedan od važnih i kvalitetnih učinaka matematičkog modeliranja u nastavi razvoj kompetencija rješavanja problema realnog svijeta. Također, naglašava se cilj matematičkog modeliranja u stvaranju novih znanja ili poboljšanju postojećih znanja učenika. Isto se tako naglašava važnost primjene digitalnih tehnologija kod matematičkog modeliranja u nastavi.

Zaključujemo da postoje brojne prednosti matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi. Pregled literature pokazuje da matematičko modeliranje pomaže učenicima da kritički pristupe problemu prije nego što ga riješe. Također, matematičko modeliranje utječe na učenikovu komunikaciju, prezentaciju, objašnjavanje složenih sustava, ali i korištenje raznih tehnoloških alata. Ustanovljeno je i da zadaci matematičkog modeliranja često nemaju jedinstveno rješenje te se većinom rješavaju u obliku timskog rada ili rada u grupama. Smatramo da uz pomoć zadataka matematičkog modeliranja učitelji dobivaju bolji uvid u način razmišljanja i funkcioniranja svojih učenika.

Zaključujemo da postoje i neki nedostaci, odnosno prepreke kod matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi. Ustanovljeno je da je jedna od prepreka ta da učitelji za zadatak matematičkog modeliranja trebaju poznavati širi spektar znanja iz stvarnog svijeta. Razlog tome je da je, pomoću matematičkog modeliranja, učenje puno otvorenije i ne-predvidljivije. Također, zaključujemo da zadaci matematičkog modeliranja zahtijevaju puno više vremena koje je potrebno za analizu zadatka, rješavanje te diskusiju i prezentiranje rješenja. Pregledom literature ustanovljeno je da se javlja problem kurikuluma u kojem nije izdvojeno vrijeme za matematičko modeliranje. Nadalje, zaključujemo da udžbenici za razrednu nastavu ne sadržavaju zadatke matematičkog modeliranja te nigdje nije opisano kako se takvi zadaci provode, ni rješavaju.

Možemo zaključiti da je osposobljavanje učitelja važno u postizanju visoke kvalitete podučavanja matematike. Pregledom literature utvrđujemo pozitivne reakcije učitelja na primjenu zadataka matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi. Također, smatramo da postoji veliki nedostatak stručnog osposobljavanja učitelja na području matematike, a posebice na području matematičkog modeliranja. Naglašavamo i nedostatak podrške učiteljima u profesionalnom razvoju u području matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi.

Uz spomenute nedostatke, kao i manjak i nedostatak zadataka matematičkog modeliranja, pokazano je nekoliko primjera zadataka koji su primjenjivi u razrednoj nastavi. Zadaci su opisani, navedeno je za koju dob su isti primjenjivi te je predloženo na koji se način mogu rješavati i provoditi u nastavi. Na kraju su ustanovljene opće upute i prijedlozi kako uvoditi zadatke matematičkog modeliranja u razrednu nastavu. Također, zaključujemo da postoji veliki manjak zadataka, ali i brojni nedostaci postojećih zadataka za učitelje razredne nastave.

Sveukupno gledano na literaturu iz područja matematičkog modeliranja i primjene u razrednoj nastavi te njihove prednosti i nedostatke, zaključujemo da matematičko modeliranje pozitivno utječe na razvoj pojedinca, kao i cijelog razreda već od najranije dobi. Kao što učenici, pomoću zadataka matematičkog modeliranja, razvijaju znanja i vještine u matematici, tako i u drugim područjima, poput astronomije, fizike i geografije, ali razvijaju i socijalne vještine.

Smatramo da je potrebno posvetiti veću važnost obrazovanju učitelja za provedbu matematičkog modeliranja u nastavi te ih poticati u uvođenju, radu i izvođenju zadataka matematičkog modeliranja u učionici. Predlažemo povećanje i razvoj dostupnih zadataka za učitelje razredne nastave. Također, naglašavamo potrebu provođenja istraživanja na temu matematičkog modeliranja u razrednoj nastavi, ali i nastavi općenito, budući da takva istraživanja na području Republike Hrvatske trenutno nisu dostupna.

LITERATURA

1. Apatić, D. (2016). *Modeliranje* (Diplomski rad). Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, Osijek. Preuzeto s https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A70/datastream/PDF/view (10.7.2019.)

2. Asempapa, R. S. (2015). Mathematical Modeling: Essential for Elementary and Middle School Students. *Journal of Mathematics Education, 8*(1), 16-29. Preuzeto s http://educationforatoz.com/images/Asempapa_2015-Spring_.pdf (27.6.2019.)

3. Bahmaei, F. (2011). Mathematical Modeling in Primary school, advantages and challenges. *Journal of Matematical and Application*, *1*, 3-13. Preuzeto s http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.850.3848&rep=rep1&type=pdf (6.5.2019.)

4. Blomhøj, M., i Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modeling through project work – Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 163-177. Preuzeto s https://www.researchgate.net/profile/Morten_Blomhoej/publication/225725261_Teaching_mathematical_modelling_through_project_work/links/0c96053be3ddf20989000000/Teaching-mathematical-modelling-through-project-work.pdf (2.8.2019.)

5. Blum, W. (1994). Mathematical modeling in mathematics education and instruction. U T. Breiteig, I. Huntley, i G. Kaiser-Messmer (ur.), *Teaching and learning mathematics in context* (str. 3-14). Chichester, England: Ellis Horwood Limited. Preuzeto s http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.580.7314&rep=rep1&type=pdf (14.4.2019.)

6. Bonotto, C. (2008). Realistic mathematical modeling and problem posing. U W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, H. W. Henn (ur.), *Modelling and applications in mathematics education* (str. 185-192). New York: Spinger.

7. Borba, M. C. (2009). Potential scenarios for internet use in the mathematics classroom. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*(4), 453-465. Preuzeto s https://www.researchgate.net/profile/Marcelo_Borba2/publication/225666198_Potential_scenarios_for_Internet_use_in_the_mathematics_classroom/links/0c9605337137e27d04000000/Potential-scenarios-for-Internet-use-in-the-mathematics-classroom.pdf (10.7.2019.)

8. Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

9. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behaviour. *Journal für Mathematikdidaktik*, *31*(1), 99-118.

10. Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo Rerri, R., Borba, M., Geiger, V., Stillman, G., English, L. D., Wake, G., Kaiser, G. i Kwon, O. N. (2014). Mathematical modeling in school education: mathematical, cognitive, curicular, instructional and teacher education perspectives. U P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle i D. Allan (ur.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (str. 145-172). Vancouver, Canada: PME-NA. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/832e/a30950f8403f94752410f550019c368417a2.pdf?_ga=2.117873421.527650701.1579826852-480260501.1579826852 (24.6.2019.)

11. Cindrić, M. (2016). Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole. *Poučak, 17*(65), 52-57. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/169560 (20.3.2019.)

12. COMAP. (n.d.) *HiMCM: Problems and Results.* Preuzeto s https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/previous%20problems.html (8.1.2020.)

13. Doerr, H. M. i English, L. D. (2003). A modeling perspective on students'mathematical reasoning about data. *Journal for Research in MathematicsEducation*, *34*(2), 110-136. Preuzeto s https://www.jstor.org/stable/30034902?item_view=read_online&refreqid=excelsior%3Ae12182366abccb08aeed132f44b13ac6 (27.5.2019.)

14. Dogan Temur, O. (2012). Analysis of Prospective Classroom Teachers' Teaching of Matematical Modeling and Problem Solving. *Eurasia Jurnal of Mathematics, Science & Technology Education, 8*(2), 83-93. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/f457/10ccd7558d957d584ae6fdd5ef982ecc6575.pdf (20.6.2019.)

15. Doyle, K. M. (2006). Creating mathematical models with structure. U J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, N. Stehlikova (ur.), *Proceedings 30th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (str. 457-464). Prague, Czech Republic: PME30, 2. Preuzeto s https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496931.pdf (5.8.2019.)

16. English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective. *Educational Studies in Mathematics, 54*(2,3), 225-248.

17. English, L. D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modeling. U B. Sriraman (ur.), *Festschrift in Honor of Gunter Torner*, (str. 139-156) The Montana Mathematics Enthusiast. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/ae4c/fc08d6bb8b1d32eb6b7072af09027608b6ac.pdf (7.7.2019.)

18. English, L. D. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 24-47.

19. English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 15-30.

20. English, L. D. i Watters, J. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(3), 59-80. Preuzeto s http://emis.impa.br/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR142_English.pdf (15.4.2019.)

21. Geiger, V., Faragher, R., i Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modeling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 48-68. Preuzeto s http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ907756.pdf (2.8.2019.)

22. Gusić, J. (2011). Matematičko modeliranje u srednjoj školi. *Poučak, 12*(45), 48-61. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/103846 (26.2.2019.)

23. Kang, O. i Noh, J. (2012). Teaching mathematical modelling in school mathematics. *12th International Congress on Mathematical Education.* Seoul, Korea. Preuzeto s https://pdfs.semanticscholar.org/b44e/117eda7fd741134fb58c4cdfaf96d528bb7e.pdf (5.3.2019.)

24. Lesh, R. i Harel, G. (2003). Problem solving, modelling and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*, 157-190.

25. Magdić, D. (2011). *Uvod u matematičko modeliranje* (Skripta). Osijek: Prehrambeno-tehnološki fakultet.

26. Mousoulides, N. G., Christou, C. i Sriraman, B. (2008). A Modeling Perspective on the Teaching and Learning of Matematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 293-304.

27. Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj.* Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (5.9.2019.)

28. Primjeri PISA zadataka. (n.d.) *Matematička pismenost.* Preuzeto s https://pisa.ncvvo.hr/primjeri-pisa-zadataka/ (4.1.2020.)

29. Stohlmann, M. i Albarracin, L. (2016). What Is Known about Elementary Grades Mathematical Modelling. *Education Research International*, 2016, 1-9. Preuzeto s http://downloads.hindawi.com/journals/edri/2016/5240683.pdf (24.6.2019.)

30. Tanner, H. i Jones, S. (2002). Assessing children's mathematical thinking in practical modelling situations. *Teaching Mathematics and its application*, *21*(4), 145-159.

31. Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9-35. Preuzeto s https://page-one.springer.com/pdf/preview/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc (23.9.2019.)

32. Watters, J. J., English, L. D., & Mahoney, S. (2004). Mathematical modeling in the elementary school. *American Educational Research Association Annual Meeting*. San Diego. Preuzeto s https://eprints.qut.edu.au/1667/1/AERA_Modelling_Z.pdf (23.3.2019.)

33. Zbiek, R. M. i Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understanding of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 89-112. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-9002-4 (20.7.2019.)

34. Žakelj, A. (2015). Modeliranje u nastavi matematike. *MIŠ, 16* (78), 105-110.

KRATKA BIOGRAFSKA BILJEŠKA

Jelena Sabljić rođena je 21. srpnja 1995. godine u Koprivnici. Osnovnu je školu završila 2010. godine u Đurđevcu. Iste godine upisuje srednju školu u Koprivnici, smjer farmaceutski tehničar. Nakon završetka srednje škole, 18. srpnja 2014. godine na Sveučilištu u Zagrebu upisuje Učiteljski fakultet – odsjek u Čakovcu, smjer Učiteljski studij, modul Informatika. Posjeduje znanja i vještine rada na računalu te od stranih jezika, razumije, govori i piše engleski jezik.

IZJAVA O IZVORNOSTI DIPLOMSKOG RADA

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

____
(vlastoručni potpis studenta)