

Problemski pristup rješavanju zadataka u dodatnoj nastavi matematike

Širanović, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:254673>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](#)/[Imenovanje-Nekomercijalno-Dijeli pod istim uvjetima 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-24**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKI STUDIJ**

**KATARINA ŠIRANOVIĆ
DIPLOMSKI RAD**

**PROBLEMSKI PRISTUP RJEŠAVANJU
ZADATAKA U DODATNOJ NASTAVI
MATEMATIKE**

RUJAN, 2020.

**UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE
(Zagreb)**

DIPLOMSKI RAD

Ime i prezime pristupnika: Katarina Širanović

**TEMA DIPLOMSKOG RADA: Problemski pristup rješavanju
zadataka u dodatnoj nastavi matematike**

MENTOR: doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Zagreb, rujan 2020.

SADRŽAJ

SAŽETAK

SUMMARY

1. Uvod	1
2.1. <i>Problem-based learning</i>	5
2.2. <i>Metoda rješavanja zadataka prema Georgeu Poyli</i>	6
2.3. <i>Schoenfeldov model rješavanja problema</i>	8
2.4. <i>Organizacija problemske nastave</i>	10
2.5. <i>Problem solving u kurikularnim dokumentima</i>	11
2.5.1. <i>Kurikul za nastavni predmet Matematika</i>	11
2.5.2. <i>Kurikuli međupredmetnih tema</i>	12
3. Dodatna nastava	14
3.1. <i>Dodatna nastava matematike</i>	15
3.2. <i>Matematička darovitost</i>	16
3.3. <i>Uloga učitelja u dodatnoj nastavi matematike</i>	18
3.4. <i>Rad s darovitim učenicima u STEM području</i>	20
4. Specifične metode rješavanja problemskih zadataka	22
4.1. <i>Metoda uzastopnog približavanja</i>	23
4.2. <i>Metoda inverzije ili računanja unazad</i>	25
4.3. <i>Metode rješavanja logičkih zadataka</i>	27
4.3.1. <i>Metoda pomoćne pretpostavke</i>	27
4.3.2. <i>Metoda grafova</i>	28
4.3.3. <i>Metoda tablice</i>	29
4.3.4. <i>Decartesova metoda</i>	31
5. Analiza zbirki za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole	34
6. ZAKLJUČAK	48
LITERATURA	50

Problemski pristup rješavanja zadataka u dodatnoj nastavi matematike

SAŽETAK

Cilj ovog diplomskog rada je prikazati mogućnosti problemskog pristupa rješavanja zadataka na dodatnoj nastavi matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Prikazani su matematički modeli rješavanja problema. Analizirani su kurikularni dokumenti u Republici Hrvatskoj u odnosu na pojam problemski pristup i rješavanje problema. Definirana je dodatna nastava matematike, uloga učitelja u njoj te karakteristike matematički darovite djece. Prikazane su i neke od specifičnih metoda rješavanja problemskih zadataka koji su popraćeni primjerima s natjecanja iz matematike. Osim objašnjenja pojedine metode dan je i primjer za primjenu iste prema Poylinim stupnjevima rješavanja problemskih zadataka.

Osim teorijskog dijela, rad sadrži i popis zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu te analizu ukupno šest zbirki. Naglasak analize stavljen na mogućnost korištenja posebnih metoda rješavanja problemskih zadataka, koje su opisane u teorijskom dijelu rada. Analiza je pokazala kako u zbirkama uglavnom dominiraju tekstualni zadaci, dok je najmanje numeričkih. Ni u jednoj zbirci nije pronađen zadatak s više točnih odgovora, odnosno zadatak otvorenog tipa, već svi zadaci imaju konačan broj rješenja. Sve analizirane zbirke sadrže zadatke u kojima je moguća primjena teorijski opisanih metoda rješavanja problemskih zadataka.

Ključne riječi: dodatna nastava matematike, problemski zadaci, školski kurikulum, tekstualni zadaci, zbirke zadataka

Problem solving approach in Math enrichment program

SUMMARY

The aim of this final thesis is to present the possibilities of a problem-based approach to solving problems in Math enrichment program in the fourth grade of primary school. There are presented mathematical problem-solving models. Curricular documents in the Republic of Croatia are analyzed in relation to the concept of problem approach and problem-solving. Math enrichment program is defined, as well as the role of teachers in it and the characteristics of mathematically gifted children. Some of the specific methods of problem-solving tasks are also presented, which are accompanied by examples from mathematics competitions. Besides the explanation of each method, an example is given for its implementation towards Polya's problem-solving stages.

Except the theoretical part, this final paper also contains a list of textbooks with tasks for Math enrichment program in the fourth grade and an analysis of a total of six textbooks. The emphasis of the analysis is placed on the possibility of using special methods of problem-solving tasks, which are described in the theoretical part of the final paper. The analysis showed that the textbooks are mostly dominated by textual tasks, while there are less numerical ones. No multi-correct answers or open-ended tasks were found in any of the textbooks, but all tasks have a finite number of solutions. All analyzed textbooks contain tasks in which it is possible to apply the theoretically described methods of problem-solving tasks.

Key words: Math enrichment program, problem-solving tasks, school curriculum, textual tasks, textbooks

1. Uvod

U bliskoj budućnosti razvijat će se nova zanimanja, a postojeća će se prilagođavati suvremenim zahtjevima i tehnološkom napretku. Ako se uzme u obzir da neka od danas najtraženijih zanimanja prije desetak godina nisu ni postojala, onda se može reći kako valja preispitati sve nesvrhovite i neefikasne načine učenja, već učenje i poučavanje oblikovati kao dinamičan i aktivan proces stjecanja znanja. Tome može doprinijeti oblikovanje nastavnog procesa kroz razvijanje sposobnosti, interesa i proširivanje znanja učenika kroz rješavanje problema. Učenje putem rješavanjem problema u nastavi potiče razvoj stvaralačkog i kritičkog mišljenja kod učenika. Rješavanje problemskih zadataka najviši je oblik učenja, a sastoji se u otkrivanju odnosa i veza između danih podataka i rješenja zadatke (Kadum, 2005).

Nastavni sadržaji za pojedini razred prilagođeni su prosječnim potrebama učenika, odnosno svaki bi učenik trebao usvojiti ono što je za pojedini razred predviđeno. Osim učenika s prosječnim potrebama, tu su i učenici s posebnim odgojno obrazovnim potrebama, a prema Zakonu o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi (2008.), a jedni od njih su i daroviti učenici. U obrazovnom sustavu takvi učenici svoje potrebe za proširivanjem znanja mogu zadovoljiti na satima dodatne nastave. S obzirom na to da ne postoji unaprijed definirani kurikulum kojim bi bili obuhvaćeni sadržaji za dodatnu nastavu, njena je prednost što se sadržaji mogu prilagoditi interesima takvih učenika. U ovom će se radu prikazati posebne metode rješavanja problemskih zadataka namijenjenih za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Poseban će naglasak biti na zastupljenosti istih u zbirkama za dodanu nastavu matematike dostupnima na hrvatskom tržištu.

U drugom poglavlju govori se o rješavanju matematičkih problema te su prikazani modeli rješavanja problemskih zadataka prema Poyli i Schoenfeldu. Predlaže se mogućnost organizacije problemske nastave matematike u etapama. Također, ispituje se prisutnost problem solvinga u aktualnim kurikularnim dokumentima.

U trećem poglavlju definira se dodatna nastava matematike, uloga učitelja u njoj te se opisuje pojam matematičke darovitosti. Također, riječ je i o radu s darovitim učenicima u STEM području.

U četvrtom poglavlju govori se o specifičnim metodama rješavanja problemskih zadataka. Dani su primjeri za svaku od metoda s pripadajućim rješenjem i mogućim pristupom za korištenje Poylinog modela rješavanja problemskih zadataka.

U petom poglavlju govori se o udžbeničkom standardu u Republici Hrvatskoj i o zbirkama zadataka za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole.

Posljednjim, šestim poglavljem obuhvaćena je analiza zadataka iz zbirke za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu. Dobiveni podaci prikazani su tablično, a na kraju je donesen zaključak cijele analize.

2. Rješavanje matematičkih problema

U suvremenom se pristupu nastavi težište pomiče od kognitivnih ciljeva učenja, u smislu usvajanja brojnih činjenica i generalizacija, prema razvoju učeničkih sposobnosti kroz iskustveno učenje u kojem je učenik aktivni sudionik nastavnoga procesa. "Sve više se ističe značaj razvijanja općih strategija učenja, razvoj sposobnosti učenika za samostalno upravljanje procesom učenja, za samoevaluaciju i svijest o vlastitim aktivnostima učenja" (Tot, 2010., str. 66). Nedostatke tradicionalne nastave moguće je otkloniti tzv. problem solving pristupom u kojem se putem rješavanja predstavljenog problema učenik aktivira, koristi i primjenjuje svoje postojeće znanje te ga iskustvenim putem proširuje.

Ovčar (1990.) problem definira kao matematički zadatak u čijem se rješavanju učenik susreće s nekom teškoćom i mora uložiti određeni umni napor da bi došao do rješenja. Na sličan način problemske zadatke tumači i Kurnik (2008.), koji ističe važnost bogate teorijske osnove i dodatnih činjenica, potrebnih za njihovo rješavanje. Pod pojmom problemski zadatak, prema Kos i Glasnović Gracin (2012.), smatra se svaki matematički zadatak koji u sebi od učenika traži neki novi angažman, odnosno novi misaoni napor koji je postavljen tim problemom. Nadalje, Kos i Glasnović Gracin (2012.) objašnjavaju kako matematički zadatak ne bi smio i ne može biti sam sebi svrha, već bi, nadovezujući se na eventualne prethodne zadatke, trebao nuditi nešto novo što će označiti barem mali pomak u mišljenju.

Prema Kuzle (2016.) rješavanje problema odnosi na kognitivni proces u kojem onaj koji rješava problem odlučuje kako riješiti situaciju u kojoj se nalazi, a rješenje nije odmah vidljivo. Odnosno, za njihovo je rješavanje potrebno produktivno razmišljanje. "Takvi problemi zahtijevaju kriterije za testiranje točnosti rješenja, a ne rješavaju se jednostavnom primjenom već poznatog algoritma" (Lampert, 1990., str. 39). Na sličan način rješavanje problema opisuje i Schunk prema Kuzle (2016.) koji govori o usmjerenom kognitivnom procesu u kojem onaj koji rješava problem odlučuje kako riješiti situaciju u kojoj se nalazi, a rješenje nije vidljivo odmah. "Rješavanje problema izuzetno je složeno ljudsko djelovanje koje uključuje mnogo više od jednostavnog prisjećanja činjenica i koncepata, odnosno primjene prethodno usvojenih postupaka, koji su često nevidljivi početnicima u rješavanju problema, iako je jedan od ciljeva nastave matematike

bio da nastavnici kod učenika razviju vještine potrebne za uspjeh u rješavanju problema” (Kuzle, 2016., str. 4).

Problemski pristup, prema Kuzle (2016.), karakterizira učenikova mogućnost analiziranja povezanosti različitih dijelova problema, predstavljanje problemske situacije, odlučivanje o putu rješenja, praćenje njegovog napretka, provjeravanje rješenja i procjenjivanje opravdanosti istog. Višestruka korisnost problemskih zadataka očituje se u njihovom doprinosu razvoja logičkog mišljenja, jačanju koncentracije te ustrajnosti. Kod takvih zadataka rješenje nije odmah vidljivo te se od učenika očekuje razvoj produktivnijeg načina razmišljanja o danoj situaciji. Poyla (1957.) ističe važnost problemskog pristupa rješavanju matematičkih zadataka u suvremenoj metodici matematike jer on traži odgovore na učeniku nove probleme, a ne korištenje već ranije mu poznatih metoda. Kurnik (2010.) ističe kako se rješavanjem takvih zadataka postojeća znanja produbljuju i proširuju novim znanjima, a kao najvažnije navodi da zadaci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku. Pri tome, valja naglasiti kako je važnija kvaliteta, odnosno upoznavanje i usvajanje različitih metoda rješavanja zadataka, a ne kvantiteta, samo rješavanje velikog broja zadataka.

Preduvjet za rješavanje problemskog zadatka je njegovo pravilno postavljanje. “Paralelno uz poticanje rješavanja problema, smatra se da je hvale vrijedno i za kreativnost važno i poticanje postavljanja problema (*problem posing*) jer rješavanje nekog zadatka često može biti pitanje matematičkih ili eksperimentalnih vještina.” (Burušić, 2019., str. 64.) Kako bi riješio problem, prema Kuzle (2016.), učenik treba povezati različite dijelove problema, predstaviti problemsku situaciju, odlučiti o putu rješenja, pratiti vlastiti napredak, provjeriti rješenje i procijeniti njegovu opravdanost.

Kako bi učenik mogao primijeniti više kognitivne procese, problemski se pristup ostvaruje kroz zadavanje nestandardnih zadataka s kojima se učenici još nisu susreli. Takvi se zadaci mogu sastojati od više koraka, a za njihovo rješavanje često je potrebno primijeniti postojeće znanje i razumijevanje različitih matematičkih područja. Za razliku od standardnih zadataka, kod kojih je način rješavanja poznat i teorijska je osnova lako uočljiva, nestandardni zadaci zahtijevaju veći umni napor i dublju analizu. Kod njih je

barem jedna sastavnica nepoznata, a ako su nepoznate dvije ili više njih riječ je o problemskim zadacima.

Osim potrebnog specifičnog znanja, koje ima ključnu ulogu pri rješavanju problema, Mayer (1998.) govori i o potrebnim metavještinama koje se odnose na strategije kako koristiti postojeće znanje za rješavanje problema, odnosno znati kada i na koji način primijeniti ono što se zna. O istima govori i Hmelo-Silver (2004.) te ističe njihovu važnost u vidu omogućavanja razvoja vještina potrebnih za cjeloživotno učenje, kao što je postavljanje ciljeva, njihovo planiranje i odabir primjerenih strategija za njihovo ostvarivanje. Kako bi problemski pristup rješavanju zadataka bio kompletan, kao treću komponentu Mayer (1998.) naglašava važnost motivacije, volje i osobnih uvjerenja. Upravo je nedjeljivost navedenih komponenti i njihovo istovremeno međudjelovanje potrebno za uspješno rješavanje problema.

Poučavanje putem rješavanja problema doprinosi kognitivnom razvoju učenika, ali utječe i na brojne afektivne vrijednosti, od kojih se može istaknuti poticanje pozitivnog stava prema predmetu u kojem se problem rješava te jačanje intrinzične motivacije učenika, a upravo je ona jedan je od najvažnijih čimbenika za uspješno rješavanje problema.

2.1. Problem-based learning

“*Problem-based learning* način je konstruiranja znanja i podučavanja predmeta koristeći probleme kao poticaj i fokus za učeničku aktivnost” (Boud, D. i Feletti, G., 1997., str. 12.). Takva vrsta nastave, prema Hungu (2013.) poboljšava ishode učenja u vidu razvoja učenikovih sposobnosti i vještina za primjenu znanja, rješavanje problema, korištenja viših razina mišljenja te kreiranja i promišljanja o vlastitom znanju. Prema Kurnik (2002) osnovu za primjenu problemske nastave čine tri sastavnice:

- problem,
- problemska situacija i
- načelo problemnosti.

Problem koji se zadaje učenicima prvenstveno mora biti primjeren predznanju i sposobnostima učenika te kod njih treba pobuditi interes za njegovo rješavanje.

Problemski se pristup odnosi na "pravilan izbor izvora za poučavanje, izdvajanje potrebnih teorijskih činjenica, misaono prorađivanje, postavljanje i provjeravanje hipoteza, jezično oblikovanje rezultata i dr." (Kurnik. 2002., str. 197). Takav način poučavanja zahtjevan je nastavni sustav, a karakterizira ga zadavanje autentičnih zadataka, konstruktivistički pristup i učenje otkrivanjem. Prema Wilson (1993.) konstruktivistički je pristup sadržan u kognitivnim teorijama rješavanja problema i matematičkom poimanju rješavanja problema koje uključuje istraživanje, traženje uzoraka i matematičko razmišljanje. Učenje koje polazi od rješavanja problema temelji se na načelu problemnosti, koje doprinosi razvoju matematičkog mišljenja i povećanju efikasnosti nastave matematike. Načelo problemnosti, jedno od načela iz sustava načela nastave matematike, a prema Kurnik (2002.) karakterizira ga produbljivanje postojećih zadataka kako bi nestala prethodna jasnoća u svrhu nastajanja problema za čije je rješavanje potrebno dosta truda i dodatni umni napor. "Primjenom toga načela nastavnik matematike može potisnuti prividnu jasnoću, upozoriti učenike na probleme koji oni ne uočavaju, doprinijeti razvoju matematičkog mišljenja i znatno poboljšati vrsnoću nastave matematike" (Kurnik, 2002., str. 152).

Cai (2003.) poučavanje putem rješavanja problema objašnjava kroz zahtijevanje mijenjanja i uloge učitelja, pri čemu se učenju i poučavanju pristupa od zadavanja problema koji je nastao elaboracijom i problematizacijom postojećeg kurikulumu te koji je oblikovan prema zahtjevima problemskoga sustava. Uloga učitelja u takvom nastavnom sustavu očituje se u organizaciji rada učenika, odabiru odgovarajućih zadataka koji će biti izazovni učenicima, ali koji omogućuju i postavljanje pitanja na različitim razinama znanja te u vođenju i pružanju podršci učeniku pri rješavanju problema. "U nastavi kroz rješavanje problema, učenje se odvija tijekom procesa rješavanja problema" (Cai, 2003., str. 16).

2.2. Metoda rješavanja zadataka prema Georgeu Poyli

U svojoj knjizi *Kako ću riješiti problemski zadatak*, George Poyla razlikuje četiri faze rješavanja problemskih zadataka, a to su:

- razumijevanje zadatka,

- stvaranje plana,
- izvršenje plana te
- osvrt.

1. Razumijevanje zadatka

Kako bi zadatak bio razumljiv i pobudio interes kod učenika, on treba biti dobro odabran, primjeren razvojnim sposobnostima učenika, ali ni prelagan ni pretežak te zanimljiv. U ovoj se fazi učenik upoznaje sa zadatkom te stječe bolje razumijevanje istog. Od njega se očekuje da razumije tekst zadatka, uoči glavne dijelove zadatka kao što su nepoznanica, zadani podaci te uvjet. Pri tome može pomoći crtanje skica i uvođenje oznake za ono što je u zadatku nepoznato. Temelj za prelazak u sljedeću fazu jest u potpunosti iskorišten čitav uvjet.

2. Stvaranje plana

Postojanje plana podrazumijeva prepoznavanje koji se postupci trebaju koristiti kako bi se dobila nepoznanica. Pri tome, glavno je doći do ideje samoga plana, a ona se osniva na temelju prethodno stečenoga znanja i iskustva. Stvaranju veze između zadatka i problema mogu pomoći ranije korištene metode pri rješavanju srodnih zadataka.

3. Izvršenje plana

Nakon potpuno ovladanom glavnom idejom samoga plana, u ovoj se fazi provode sve geometrijske i algebarske operacije potrebne za dolazak do rješenja. Kod složenih zadataka koji zahtijevaju postepeno rješavanje mogu se uvesti manji koraci, pri čemu je važno da svaki od njih bude ispravan i podložan provjeri i dokazivanju istog.

4. Osvrt

Posljednja i često izostavljena faza rješavanja zadatka odnosi se na ponovno razmatranje i osvrtnje na dobiveno rješenje i na put koji je do njega doveo. Posljednja faza doprinosi učvršćivanju znanja učenika te povećavanju sposobnosti učenika u rješavanju problemskih zadataka, interpretiranju te njegovom boljem razumijevanju. Prema Wilsonu (1993.) osvrt se odnosi na skup aktivnosti poput provjeravanja rezultata, provjeravanje

argumenta, dobivanja rezultata na drugačiji način, korištenje metode ili rezultata za neki drugi problem, reinterpretiranje problema, interpretiranje rezultata ili započinjanje novoga problema. Analiziranjem riješenoga zadatka učeničko se znanje učvršćuje te se razvija sposobnost variranja podataka pri rješavanju idućeg zadatka. Osvrtanje na postupak rješavanja i dobiveno rješenje odnosi se i na mogućnost pojednostavljivanja rješavanja te prepoznavanja ključnog koraka koji je doveo učenika do rješenja.

Poylin pristup često je kritiziran zbog prezentiranja postupka rješavanja problema kao niza koraka, kao i zbog njegove naglašene linearnosti, ističe Wilson (1993.). Zamjera mu se viđenje postupaka rješavanja matematičkih problema kao skupa postupaka koje treba upamtiti, prakticirati i stjeći naviku njihovog primjenjivanja. Događa se da učenik u postupku rješavanja nekog problema shvati da ga na odabrani način ne može riješiti, da ga treba bolje razumjeti ili napraviti bolji plan. Zbog toga važno je naglasiti dinamičnu i cikličku prirodu rješavanja problema, koja omogućuje povratak na neki od prethodnih koraka u postupku rješavanja.

2.3. Schoenfeldov model rješavanja problema

U svojoj knjizi *Mathematical Problem Solving* Schoenfeld (1985.) opisuje prirodu matematičkog razmišljanja prilikom rješavanja nestandardnih matematičkih problema kroz četiri glavne kategorije kroz koje se problem elaborira, a to su:

- resursi,
- heuristika,
- kontrola i
- sustavi vjerovanja.

1. Resursi

Preduvjet za rješavanje matematičkog problema je postojanje određenog činjeničnog i proceduralnog znanja te vještina dostupnih pojedincu za uspješno rješavanje predstavljenog problema. Upravo oni prema Schoenfeldu (1985.) predstavljaju temelj za uspješno rješavanje problema. Temeljna komponenta vezana uz bazu znanja odnosi se na

uspostavljanje ispravnih veza između onoga što individualac zna, a potrebno mu je kako bi riješio predstavljeni problem.

2. Heuristika

“Heuristične strategije su glavna pravila za uspješno rješavanje problema, temeljne strategije koje pomažu individualcu kako bi bolje razumio problem ili napravio napredak prema njegovom rješenju.” (Schoenfeld, 1985, str. 38, prijevod: autorica) Neke od navedenih strategija su korištenje analogija, korištenje pomoćnih elemenata pri rješavanju problema, argumentiranje korištenjem kontradikcije u odnosu na dani problem, variranje podataka danoga problema, stvaranje skica, rješavanje problema unazad i druge.

3. Kontrola

Navedena se kategorija odnosi na načine na koje pojedinac koristi informacije koje ima na raspolaganju. Pod navedenim Schoenfeld podrazumijeva glavne odluke koje pojedinac donosi vezane uz zadani problem koje mogu doprinijeti ili odmoći pri rješavanju problema, a odnose se na postavljanje ciljeva i podciljeva, procjenjivanje uvedenih postupaka te napuštanje istih ako se navedeni procijene neodgovarajućima. U slučaju nedostatka navedene kategorije nije moguće iskorištavanje postojećih resursa, što vodi neuspjehu rješavanja predstavljenog problema. Navedeni se procesi u psihologiji poznati pod nazivom metakognicija.

4. Sustavi vjerovanja

Ljudske su spoznaje oblikovane s obzirom na određeni sustav vjerovanja, bez obzira na svjesnost pojedinca o njihovom postojanju. Navedena se kategorija odnosi na perspektivu pojedinca s kojom pristupa matematici i matematičkim problemima, odnosno koje će tehnike koristiti ili izbjegavati te koliko dugo i naporno će raditi kako bi ga riješio i sl. Schoenfeld (1985.) navodi neka tipična uvjerenja, poput rješivosti matematičkih problema u manje od deset minuta ili njihova nerješivost uopće, vjerovanja da su jedino geniji sposobni otkrivati i kreirati matematiku te da je formalna matematika vrlo malo povezana sa stvarnim načinom razmišljanja i rješavanjem problema.

2.4. Organizacija problemske nastave

Prema Kurniku (2002.) nastavni se sat, koji se temelji na problemskom pristupu, metodički oblikuje i priprema prema sljedećoj shemi:

1. Stvaranje nastavne problemske situacije
2. Postavljanje problema
3. Proučavanje uvjeta
4. Rješavanje postavljenog problema
5. Razmatranje dobivenog rješenja i iskazivanje novog znanja
6. Proučavanje dobivenog rješenja i traženje drugih načina rješavanja
7. Proučavanje mogućih proširenja i poopćenja postavljenog problema
8. Zaključci izvršenog rada

Također autor napominje kako se navedena struktura ne treba shvaćati kruto, već je moguće objedinjavanje koraka ili njihovo ispuštanje.

Organizacija problemski usmjerene nastave razlikuje se od klasične nastave usvajanja novog nastavnog sadržaja ili sata vježbanja i ponavljanja. Usvajanje novog nastavnog sadržaja te vježbanje i ponavljanje odvija se kroz fazu rješavanja problema te se etape kao takve ne izvode određenim redom, već se međusobno isprepliću. Tijek sata oblikuje nastavnik, uzimajući u obzir prethodna znanja učenika te složenost učenicima predstavljenoga problema. Hosnan (2014.) razlikuje pet faza u modelu problemski orijentirane nastave, a to su predstavljanje problema učenicima, organizacija učenja, individualno i grupno vođenje, prezentiranje rezultata rada te analiza i evaluacija procesa. Slične korake u problemskom pristupu nastavi razlikuje i Baysal (2017.) prema Schuncke (1988.), a odnose se na definiranje problema, formuliranje hipoteze, planiranje prikupljanja podataka, njihovo objedinjavanje, ispitivanje, analiza i evaluacija istih te na kraju, prihvaćanje ili odbacivanje hipoteze, odnosno stvaranje generalizacija. Predstavljeni problem učenicima treba biti rješiv, odnosno, odabirom pravih problema, prema Kuzle (2016.), učenicima se ukazuje na korisnost matematike.

Kako bi bilo uspješno organizirati problemsku nastavu učitelji za to trebaju imati odgovarajuće nastavničke kompetencije. "Uloga nastavnika u njemu sastoji se u savjetovanju i pomaganju učenika pri izboru izvora, ukazivanju na potrebne teorijske činjenice i završnoj raspravi o rezultatima samostalnog rada učenika" (Kurnik, 2002., str. 198.). Kako bi uspješno pripremio i organizirao problemsku nastavu, učitelj mora poznavati više različitih pristupa određenom zadatku, treba jasno postaviti ciljeve koje želi da učenici postignu te odabrati odgovarajuće strategije, metode i postupke koje će mu pomoći pri uspješnom ostvarivanju tih ciljeva. Također, prilikom odvijanja samog nastavnog procesa, učitelj treba znati kako osigurati da su svi učenici uključeni u rad, treba pratiti njihov napredak te znati kako postaviti odgovarajuća pitanja kojima će pravilno usmjeriti učenika k rješenju problema.

2.5. Problem solving u kurikularnim dokumentima

U hrvatskome se školstvu trenutno razlikuju dva polazišna dokumenta u obveznom obrazovanju, a to su Nacionalni kurikulum za osnovnoškolski odgoj i obrazovanje (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta [MZOŠ], 2010.), koji se u primarnom obrazovanju primjenjuje u prva dva razreda osnovne škole te Nastavni plan i program (MZOŠ, 2006.), koji je u vrijeme pisanja ovog rada važeći u trećem i četvrtom razredu. Osim navedenih dokumenata, razrađeni su i Kurikulumi međupredmetnih tema (MZOŠ, 2019.), čiji su sadržaji implementirani u sadržaje postojećih nastavnih predmeta.

2.5.1. Kurikul za nastavni predmet Matematika

Prema Kurikulumu za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Narodne novine, 2019.) stjecanje matematičkih kompetencija očituje se u povezivanju matematičkih procesa i domena, odnosno u ishodima učenja. Matematika se kao logična i zaokružena cjelina spoznaje međusobnom nedjeljivošću njenih domena, jer je usvojenost koncepta jedne domene često preduvjet razumijevanju i usvajanju druge. Rješavanje problema i matematičko modeliranje matematički su procesi koji prožimaju sve domene kurikuluma nastavnog predmeta Matematika. Prema tome, na temelju usvojenih matematičkih znanja, vještina i procesa učenici će biti sposobni:

“rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije.” (Kurikulum za nastavni predmet Matematika u osnovnim i srednjim školama, 2019., str. 5.) Područje navedene domene odnosi se na učeničko analiziranje problemske situacije, prepoznavanje elemenata te na planiranje pristupa za njegovo rješavanje. Pri tome, učenici osmišljavaju razne strategije koje primjenjuju tako da rješavaju problem, čiji rezultat po završetku vrednuju i prikazuju na prikladan način.

2.5.2. Kurikuli međupredmetnih tema

Sedam je kurikuluma međupredmetnih tema, a to su: Osobni i socijalni razvoj, Učiti kako učiti, Građanski odgoj i obrazovanje, Zdravlje, Poduzetništvo, Uporaba informacija i komunikacijske tehnologije i Održivi razvoj (Narodne novine, 2019.). Naznake implementacije problemskog pristupa pri rješavanju zadataka vidljive su u opisu sadržaja i ishoda kurikuluma za međupredmetnu temu Učiti kako učiti i Poduzetništvo.

2.5.2.1. Kurikulum za međupredmetnu temu Učiti kako učiti

Osim razvoja specifičnih kompetencija sadržanih u predmetnim kurikulumima, tijekom formalnog se obrazovanja sjeću i opće kompetencije. Jedna od tih je kompetencija učiti kako učiti, a ona uključuje: “sposobnost učinkovitog upravljanja vlastitim učenjem, rješavanje problema, usvajanje, obradu i vrednovanje informacija i njihovog integriranja u smislene cjeline novoga znanja i vještina koje su primjenjive u različitim situacijama” (Kurikulum za međupredmetnu temu Učiti kako učiti, 2019., str. 4). Naznake problemskog pristupa rješavanju problema vidljive su u dvije od četiri domene koje navedeni kurikulum sadrži, a to je domena primjene strategija učenja i upravljanja informacijama te domena upravljanje svojim učenjem. Prema kurikulumu za međupredmetnu temu Učiti kako učiti (Narodne novine, 2019.) sposobnost stvaralačkog rješavanja problema očituje se kao jedna od strategija učinkovitog učenja i kao jedan od rezultata kreativnog mišljenja te predstavlja jedan od načina stjecanja znanja na višim kognitivnim razinama.

2.5.2.2. Kurikulum za međupredmetnu temu Poduzetništvo

Kompetencija za poduzetništvo je, kao i sposobnost rješavanja problema, jedna od ključnih kompetencija cjeloživotnoga učenja te prema Kurikulumu za međupredmetnu temu Poduzetništvo (Narodne novine, 2019.) podrazumijeva kreativnost, inovativnost, sposobnost planiranja te organiziranja. Upravo je razvijanje sposobnosti rješavanja problema jedan od ciljeva učenja i poučavanja navedene međupredmetne teme. Problemski je pristup kao ishod sadržan u dvije od tri domene, Promišljaj poduzetnički i Djeluj poduzetnički. Očekivanja koja se odnose na sastavnice ovih domena, a doprinose razvoju sposobnosti problemskog pristupa su prepoznavanje, definiranje i rješavanje problema i primjena inovativnih i/ili kreativnih rješenja te razvoj sposobnosti planiranja i upravljanja planiranim aktivnostima (Kurikulum za međupredmetnu temu Poduzetništvo, 2019.).

2.5.3. Nastavni plan i program za osnovnu školu

Vezano uz matematičke sadržaje, temeljni školski dokument, Nastavni plan i program za osnovnu školu (MZOŠ, 2006.) koji se koristi u trećim i četvrtim razredima osnovnoškolskog obrazovanja, ne spominje problemski pristup ni u jednoj svojoj sastavnici. Naznake problemskog pristupa vidljive su u definiranju jednog od cilja nastave matematike. "Cilj nastave matematike je stjecanje temeljnih matematičkih znanja potrebnih za razumijevanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu, stjecanje osnovne matematičke pismenosti i razvijanje sposobnosti i umijeća rješavanja matematičkih problema" (Nastavni plan i program za osnovnu školu, 2006., str. 238). Prema Nastavnom planu i programu za osnovnu školu (MZOŠ, 2006.) problemski i zahtjevniji zadaci djelomično su prebačeni u izborne sadržaje. "Uspjelo se količinski smanjiti gradivo i to tako da su izostavljeni pojedini složeniji dijelovi, koji su se do sada tradicionalno učiti, odnosno da su prebačeni u izborne sadržaje" (MZOŠ, 2006., str. 238).

3. Dodatna nastava

Jedan od oblika odgojno-obrazovnog rada koji se odvija u školi je dodatni rad. Namijenjen je učenicima koji žele produbiti i proširiti svoja znanja izvan propisanih sadržaja koja trebaju usvojiti na redovnoj nastavi.

Prema Zakonu o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi (2015.) dodatna se nastava organizira za učenike koji u određenom nastavnom predmetu ostvaruju natprosječne rezultate i pokazuju poseban interes za određeni nastavni predmet te ju je škola dužna organizirati, a učenici se u nju uključuju na temelju vlastite odluke. U Nastavnom planu i programu (2006.) dodatni se rad navodi kao oblik rada u školi koji se organizira za darovite učenike, a u hrvatskim se školama organizira jednom tjedno u trajanju od jednog školskog sata. Realizacija dodatne nastave sadržajno je razrađena u školskom kurikulumu kojeg svaka škola pojedinačno donosi. Prema Pravilniku o tjednim radnim obvezama učitelja i stručnih suradnika u osnovnoj školi (2014.) dodatni rad pripada neposrednom odgojno-obrazovnom radu učitelja te pripada radnoj obvezi učitelja uz izvođenje redovite nastave u količini propisanoj nastavnim planom i uz ostale poslove u sklopu satnice do punog radnog vremena. Sadržaj dodatne nastave organizira se prema sklonostima, sposobnostima i interesima učenika, a njena je prednost što u njoj sudjeluje manji broj učenika nego u redovnoj nastavi, čime se omogućuje veća individualizacija u pristupu učeniku.

Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu u osnovnoj i srednjoj školi (2019.) dodatna je nastava sadržana u vidu školskoga kurikuluma zajedno s fakultativnim nastavnim predmetima, izvannastavnim aktivnostima i ekskurzijom. Dodatna nastava ne završava brojčanom ocjenom na kraju školske godine, a organizira se prema sklonostima i mogućnostima škole. Njezina učinkovitost ovisi o kvaliteti i opsegu sadržaja namijenjenom za dodatnu nastavu te o razini kompetentnosti učitelja za provođenje iste, jer o njemu ovisi koji će oblici, metode i sredstva biti primijenjeni (Mišurac-Zorica i Rožić, 2015). Pri njezinom metodičkom oblikovanju potrebno je prvenstveno identificirati učenike kod kojih postoji intrinzična motivacija i želja za proširivanjem vlastitih znanja, odabrati nastavne sadržaje shodno njihovim interesima, izraditi plan i program dodatne

nastave te pratiti napredak učenika u cilju maksimalnog razvoja njihovih sposobnosti i potencijala. Jedan je od ciljeva dodatnog rada potaknuti uključivanje učenika za sudjelovanje na natjecanjima, susretima i smotrama. Dodatna nastava često se organizira kao priprema učenika za razna natjecanja, ali to svakako nije njen jedini cilj. U nižim se razredima osnovne škole najčešće provodi iz matematike, hrvatskoga jezika te prirode i društva.

3.1. Dodatna nastava matematike

“Dodatna nastava matematike poseban je oblik nastave organiziran za učenike koji su savladali program matematike u redovnoj nastavi i pokazuju izrazite sklonosti i interese za matematičke sadržaje” (Mišurac-Zorica i Rožić, 2015., str. 28). Učenici koji pokazuju interes i sklonosti za dodatne sadržaje iz matematike često se uključuju u dodatnu nastavu matematike. Prema Vidić (2016.) učenici se u dodatnu nastavu uključuju na prijedlog učitelja koji ih prepoznaje kao posebno zainteresirane za matematiku, sa sposobnošću rješavanja složenijih zadataka i ukoliko to učenici sami žele. Sadržaji obuhvaćeni dodatnom nastavom razlikuju se od sadržaja predviđenih za redovnu nastavu po svojoj složenosti te oni zahtijevaju veće kognitivne sposobnosti učenika.

Čuvidić (2016.) navodi opći cilj je dodatne nastave matematike u vidu motiviranja učenika za bavljenje matematikom, razvijanja matematičkog mišljenja i logičkog zaključivanja te važnosti uočavanja uporabe matematike u svakodnevnom životu. Često se dodatna nastava matematike organizira kao priprema učenika za matematička natjecanja, ali svakako to nije jedini cilj dodatne nastave matematike. Prednost je takvog oblika nastave što program nije strogo propisan, zbog čega se učitelj može prilagoditi interesu učenika, broj učenika koji sudjeluju na dodatnoj nastavi manji je od broja učenika na redovnoj nastavi, a i u njoj učenici sudjeluju dobrovoljno. U dodatnu se nastavu matematike mogu uključiti i učenici koji ne pokazuju znakove matematičke darovitosti, ali su izrazito motivirani.

Prema Mišurac-Zorica i Rožić (2015.), uključivanje i ostalih učenika u dodatnu nastavu matematike budi interes učenika za matematiku, oni dolaze do novih znanja, a već usvojena se usavršavaju. U njen se sadržaj mogu uključiti sadržaji iz zabavne matematike,

logički zadaci, matematički rebusi te ostali sadržaji. Navedeni su sadržaji obuhvaćeni na školskim i županijskim matematičkim natjecanjima koje organizira Ministarstvo prosvjete i športa u suradnji s Hrvatskim matematičkim društvom i Agencijom za odgoj i obrazovanje u kojima mogu sudjelovati učenici od četvrtog razreda nadalje. Uz to, Kurnik (2007.) navodi kako učenici mogu, uz navedena matematička natjecanja, sudjelovati i na međunarodnom matematičkom natjecanju Klokan bez granica. Upravo su sadržaji obuhvaćeni navedenim natjecanjima često sadržaji dodatne nastave matematike u školama. Odnosno, zadaci s već održanih natjecanja služe kao primjeri zadataka za vježbu pri pripremi učenika za buduća natjecanja. Upravo je jedan od temeljnih ciljeva matematičkih natjecanja, prema Kurnik (2006.), pobuđivanje i širenje interesa učenika za učenje matematike.

Rezultati postignuti na navedenim natjecanjima često služe kao povratna informacija o ostvarenosti ciljeva i zadataka dodatne nastave matematike te predstavljaju način vrednovanja iste. Ostvarenost ciljeva i zadaća dodatne nastave matematike vidljiva je kroz individualno praćenje napretka učenika, pri čemu je naglasak na primjeni usvojenog znanja u redovnoj nastavi i svakodnevnom životu. Za omogućavanje napretka nekog društva najvažniji je zadatak učitelja identifikacija i briga o matematički darovitim učenicima.

3.2. Matematička darovitost

Jedna od definicija darovitost promatra kao visoku područno-specifičnu sposobnost, pri čemu pojedinac, "...uz razvijene opće intelektualne sposobnosti ima naročito visoke sposobnosti za jedno specifično područje, za čije ovladavanje pokazuje izvanrednu motivaciju, predanost i posvećenost" (Čudina-Obradović, 1990., str. 16). Na dodatnoj se nastavi matematike razlikuju oni učenici koji svoje rezultate postižu upornošću i marljivim radom od onih koji uspjeh postižu uz zbog natprosječnih sposobnosti zaključivanja i logičkoga razmišljanja.

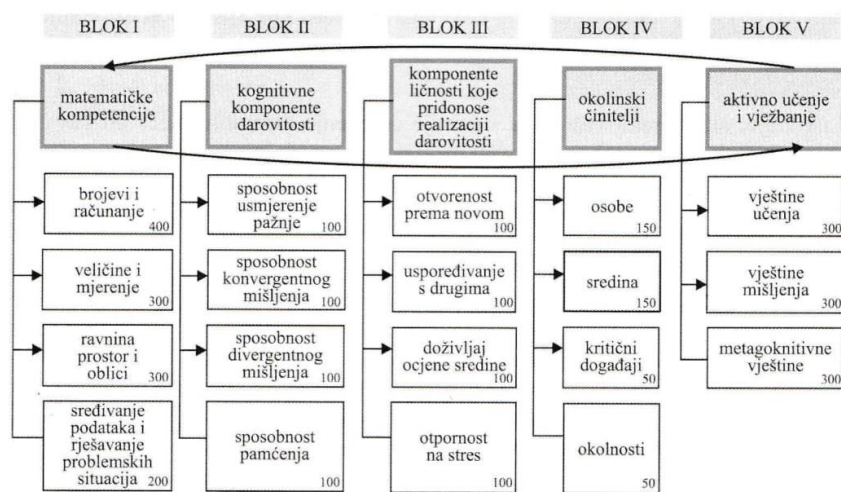
Čudina-Obradović (1990.) matematičku sposobnost opisuje kao rezultat istodobne aktivacije sposobnosti pamćenja i planiranja, numeričke sposobnosti, sposobnosti prostornog predočavanja te logičkog zaključivanja. Učenici koji su daroviti za

matematiku brže shvaćaju bit problema, fleksibilni su u razmišljanju te pamte odnose u nekom problemu, umjesto konkretnih pojedinosti istog. Od ostalih se učenika razlikuju po brzini kojom uče, dubini kojom shvaćaju te većem interesu i motivaciji. Parish (2014.), prema Krutetskii, (1976.) matematički darovite učenike opisuje kao one koji lako dolaze do generalizacija, koji proširuju, stvaraju i osmišljavaju nove metode za rješavanje matematičkih problema te prirodno teže najjednostavnijim i najkraćim putevima dolaska do svojega cilja.

U svome istraživanju u kojem je analizirala vještine učenika prilikom rješavanja problema, Szabo (2015.) prema Krutetskii (1976.) opisuje model za prepoznavanje matematički darovitih učenika kao dinamičan i kompleksan fenomen koji se sastoji od sposobnosti pribavljanja i formaliziranja matematičkih informacija, sposobnosti njihovog procesuiranja i upamćivanja te postojanje "matematičkog dijela uma." Navedena se fraza odnosi na tendenciju matematički talentiranih učenika da svakodnevne fenomene i pojave proučavaju kroz matematiku. Ta mogućnost brze i široke generalizacije matematičkih odnosa i operacija, njihova fleksibilnost i kognitivna sposobnost čini ih različitim od onih učenika koji se ne smatraju darovitim. O istome govore i Schindler i Rott (2016.), ali pri tome ističu kako su navedene sposobnosti usko povezane te utječu jedna na drugu. Pri tome, važno je napomenuti da učenici koji postižu visoke rezultate ne moraju nužno biti matematički daroviti učenici. S druge strane, model matematičke darovitosti opisuje i Joe S Renzulli, koji darovitost određuje: "...kao interakciju (presjek) specifične sposobnosti, intrinzične motivacije i visokog stupnja kreativnosti – ovo je tzv. troprstenasti model" (Huzjak, 2008., str. 28), pri čemu je darovitost u presjeku navedenih prstena. Schindler i Rott (2016.) pojašnjavaju kako je kod Renzullijevog modela naglasak na ponašanju karakterističnom za darovite učenike, a ne o darovitosti samoj te je njegova teorija općenita, primjenjiva na različita područja.

S obzirom na učeniku darovitost za matematiku, Pavleković (2009.) navodi postojanje potencijalno darovitih učenika i učenika iznadprosječnih matematičkih sposobnosti. Oni se međusobno razlikuju po dubini razumijevanja i razini apstrakcije, pri čemu su potencijalno daroviti učenici vještiji u rješavanju nestandardnih zadataka i onih u kojima je potrebno dublje razumijevanje. Pri određivanju matematičke darovitosti kod djeteta,

prema Pavleković (2009.), potrebno je analizirati njegove matematičke kompetencije, kognitivne komponente darovitosti, kao i komponente ličnosti (Slika 1) te navedeno sagledati u odnosu na okolinske činitelje koji utječu na razvoj učeničke darovitosti. Zbog složenosti postupka otkrivanja potencijalne darovitosti učenika, potrebno je da učitelj bude kompetentan kako bi takvog učenika znao prepoznati, a i zadržati u području matematike u suradnji s drugim stručnim suradnicima.



Slika 1. Komponente darovitosti za matematiku prema Pavleković (Pavleković, 2009, str. 47)

3.3. Uloga učitelja u dodatnoj nastavi matematike

Jedna od najvažnijih uloga učitelja jest pomoći svojim učenicima da shodno vlastitim mogućnostima ostvare svoje potencijale. U procesu do potpune samostalnosti učenika pri rješavanju matematičkih problema, učitelj treba upoznati učenika, njegove interese i sklonosti te prepoznati njegovu darovitost. Prema Glasnović Gracin (2019.) nužno je da učitelji posjeduju odgovarajuće nastavničke kompetencije za rad s darovitim učenicima, čijim se usavršavanjem stječe potrebno samopouzdanje u radu. Stručno usavršavanje učitelja kroz skupne ili pojedinačne oblike obrazovanja i stjecanja dodatnih znanja i vještina s ciljem unapređenja osobnih sposobnosti i vještina iz svoje struke i sveukupnog odgojno-obrazovnog rada jedna je od temeljnih odrednica Državnog pedagoškog

standarda osnovnoškolskog sustava odgoja i obrazovanja (2008.), koji se primjenjuje u svim osnovnim školama.

U radu s darovitim učenicima važno je da učitelj posjeduje odgovarajuće specifične kompetencije. Prema istraživanju koje je provela Mišurac (2015.) pokazalo se kako uspješnost budućih učitelja razredne nastave u rješavanju tipičnih zadataka iz dodatne matematike nije dovoljan pokazatelj pripremljenosti studenata učiteljskog fakulteta za dodatnu nastavu matematike. Kako bi učitelji uspješno mogli prepoznati i pravovremeno uključiti matematički talentiranu i darovitu djecu u dodatni rad, trebaju posjedovati i određene psihološke, pedagoške te matematičko-metodičke kompetencije. Kontinuirano usavršavanje učitelja poboljšava kvalitetu izvođenja nastave te je jedan od značajnih čimbenika koji doprinosi uspjehu učenika. Kvaliteta se učitelja matematike, prema Pavleković (1999.) ogleda u njegovoj sposobnosti zaokupljanja pozornosti slušatelja, uočavanja njihovih reakcija i poticanja na aktivno učenje. Pri tome, težište se prebacuje na razvijanje matematičkih sposobnosti, uočavanje veza i odnosa nasuprot razvijanja tehnike računanja i pamćenja samih činjenica.

Postupak identifikacije darovitog učenika složen je proces jer razvijena vještina računanja i automatizacije ne pretpostavlja potencijalnu darovitost učenika. Daroviti učenici često se dosađuju ako ne nalaze na dovoljno intelektualno izazovan problem, zbog čega često gube interes i volju. Upravo su takvi izazovni i nestandardni sadržaji dio dodatne nastave matematike, a njihova je prednost sadržajna prilagodljivost interesima i spoznajnim mogućnostima učenika. Prema Poyli (1966.) učitelj je cilj pomoći učeniku da spretno riješi svoj zadatak i, drugo, razvijati umne sposobnosti učenika tako da buduće zadatke može rješavati sam. Kako bi ostavio navedeni cilj važno je njegovo pravilno postavljanje pitanja učenicima koji će ga uputiti na postupak kojeg bi se učenik sam mogao dosjetiti. Poyla (1966.) rješavanje zadataka opisuje kao praktičnu vještinu koja se stječe oponašanjem i vježbanjem, stoga ističe učiteljevu važnost za pobuđivanje interesa za rješavanjem zadataka i davanje dovoljno prilika učenicima za oponašanje i vježbanje. Učiteljeva se uloga očituje u postavljanju problemske situacije i vođenju učenika do otkrivanja puteva do njenog rješavanja, pri čemu je učenikova uloga aktivnija i složenija od one koju ima u redovnoj nastavi. Kako bi učenici mogli ostvariti svoje potencijale,

prema Pavleković (2009.), potencijalno darovite učenike treba usmjeriti prema dugoročnoj i usmjerenoj matematičkoj naobrazbi kako bi takvi, potencijalno daroviti učenici, zaista i ostvarili svoju potencijalnu darovitost, a time učitelj na najbolji način podržava razvoj darovite djece.

3.4. Rad s darovitim učenicima u STEM području

Tijekom 21. stoljeća raste važnost područja znanosti, tehnologije, inženjerstva i matematike. Navedena su područja sadržana u kratici STEM prema engleskim nazivima *science, technology, engineering* i *mathematics*. Velik se naglasak stavlja na ranu identifikaciju STEM darovitih i talentiranih učenika u procesu općeg obrazovanja s ciljem popularizacije znanosti i poticanja mladih na znanstvene karijere.

Model STEM darovitosti opisan u knjizi od Burušić i Šeperac (2019.) temelji se na prilagodbi Renzullijeva modela opisanog ranije, koji je jedan od najčešće prikazivanih modela darovitosti. Njime je obuhvaćena STEM motivacija, STEM interesi i stavovi o STEM području te opća intelektualna sposobnost učenika. Kako bi se pojedinac smatrao darovitim, nužno je posjedovanje svih od navedenih komponenti te njihova međusobna interakcija. Prema Glasnović Gracin (2019.), u praktičnom radu s darovitim učenicima u STEM području nastava usmjerena na učenika potiče njegovu autonomiju i samostalnost u rješavanju problema, pri čemu se sadržaji, aktivnosti i intenzitet učenja pojedinačno prilagođava darovitim učenicima i njihovim posebnim potrebama. U radu s darovitim učenicima naglasak je stavljen na rješavanje problemskih zadataka u kojima kroz praktičan rad učenici traže odgovore te su u mogućnosti povezivati sadržaje iz više STEM disciplina. Odnosno, suvremena nastava u STEM području treba biti usmjerena na učenika, inovativna i dovoljno izazovna, povezana za svakodnevni životom te počivati na projektnom radu pri kojem je učenik aktivni sudionik u radu. Njegova se aktivnost ostvaruje kroz rad na eksperimentima, u vidu neovisnih istraživanja i učenja putem rješavanja problema. Pri tome, u radu s učenicima u STEM području teži se pomaku od konkretnog prema apstraktnome, poticanju postavljanja hipoteza i objašnjavanju pojava na apstraktnoj razini te postavljanju pitanja koja se odnose na neodređenost ili rubne slučajeve s ciljem razvoja divergentnog mišljenja učenika. Glasnović Gracin (2019.)

prema Klahr i Dunbar (1988.) navodi preporuke za rad s darovitim učenicima u STEM području poput poticanja generalizacija, modificiranje zadataka, ideja i teorija, osmišljavanje instrumenata, formuliranje hipoteza, rješavanje problema te rada s neočekivanim i drukčijim idejama. Današnji bi obrazovni sustavi, prema Kubat (2018.) trebali težiti stvaranju uvjeta za omogućavanje razvoja vještina učenika za rješavanje problema, kreativnost, istraživanja, kritičko razmišljanje, poduzetništva i komunikacije, a upravo STEM obrazovanje olakšava njihovo učenje i omogućuje njihovu primjenu.

Prema Glasnović Gracin (2019.) primjeri dobre prakse proučavanja sadržaja iz STEM područja karakterizira: nastava usmjerena na učenika, primjena tehnologije, projektni rad, nastava temeljena na produkciji te fakultativna nastava. Pri tom valja naglasiti važnost autonomije i samostalnosti učenika pri rješavanju problema iz STEM područja. Problemski pristup potiče kritičko mišljenje učenika, gdje učenik kroz traženje odgovora dolazi do novih spoznaja. Pri tome često je potrebno povezivanje sadržaja iz više STEM područja, a neke od suvremenih trendova koje navodi Glasnović Gracin (2019.) su izrađivanje maketa, modela, mini-robotu, strujnih krugova i sl. Ističe se i važnost suradnje s poslovnim i znanstvenim sektorom gdje rade stručnjaci raznih STEM profila s ciljem poticanja interesa učenika za takva zanimanja. Razvijanje viših kognitivnih procesa potiče se aktivnostima koje zahtijevaju veću aktivnost učenika, a neke od tih aktivnosti bit će navedene u nastavku.

4. Specifične metode rješavanja problemskih zadataka

Rješavanje zadataka jedna je od osnovnih djelatnosti na dodatnoj nastavi matematike kroz koju se ostvaruju postavljeni zadaci i ciljevi. Kroz rješavanje matematičkih zadataka učenici stječu osnovna matematička znanja, razvijaju sposobnosti i vještine rješavanja problema te razvijaju stvaralačko mišljenje.

Prema Kurniku (2000.) samostalna spoznajna djelatnost učenika pri proučavanju matematike ostvaruje se u velikoj mjeri primjerenim izborom i korištenjem nastavnih zadataka. Pritom je višestruka korisnost od rješavanja nestrukturiranih zadataka, kod kojih je nepoznata barem jedna sastavnica. "Za njega je potreban pojačan umni napor, dublja analiza, veća koncentracija, ustrajnost i dosjetljivost" (Kurnik, 2000., str. 7). Neke od specifičnih metoda rješavanja matematičkih zadataka koje se mogu koristiti u razrednoj nastavi na dodatnoj nastavi matematike su metode uzastopnog približavanja, metode razlikovanja slučajeva, grafičko-aritmetičke metode, metoda analogije, metoda supstitucije, metoda rekurzije, metoda matematičke indukcije, algebarska metoda i dr. Prema Kurniku (2003.), poznavanje velikog broja metoda rješavanja podataka doprinosi smanjenju psihičke napetosti učenika, doprinosi boljem usmjeravanju njegove pažnje te pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njihovog znanja. Pri tome, uloga je učitelja upoznati učenike s pojedinim metodama, njihovom primjenom i djelotvornošću. Također, njegova je uloga i poticati učenike da samostalno otkriju novi postupak rješavanja određenog problema koji će biti primjenjiv i za rješavanje njemu sličnih problema. Kuzle (2016.) navodi kako mnoge empirijske studije i studije velikih razmjera pokazuju kako učenici često ne znaju riješiti problemske zadatke te kako nastavnicima nedostaju nastavni materijali s didaktičkim komentarima kojima bi unapređivali učenikove kompetencije rješavanja matematičkih problema. Prema analizi sadržaja matematičkih udžbenika koju su napravile Kos i Glasnović Gracin (2012.) pokazalo se kako su zadaci povezivanja prosječno prisutni u udjelu oko 20-30%, dok refleksija nije ili gotovo da nije zastupljena, iz čega se može zaključiti kako postoji nedostatak zadataka refleksivnog tipa, što upućuje na deficit pravih problemskih zadataka i razvijanja kritičkog mišljenja.

Kako bi učenici uspješno riješili predstavljeni problem trebaju poznavati metode za njihovo rješavanje kako bi ih znali primijeniti na odgovarajući način u određenoj situaciji. Kako navedene metode ne bi predstavljale samo gotove postupke za rješavanje problemskih zadataka, svakoj se od navedenih metoda može pristupiti na kreativan način, odnosno kroz suvremeni pristup prema Poylinoj teoriji koja je ranije opisana. Neke od navedenih metoda, koje su primjenjive pri rješavanju matematičkih problema na dodatnoj nastavi matematike u razrednoj nastavi, opisane su u nastavku.

4.1. Metoda uzastopnog približavanja

Jedna od metoda rješavanja matematičkih problema je metoda uzastopnog približavanja, ponekad u literaturi (Kurnik, 2003.) nazivana i metoda pokušaja i pogrešaka. Pri uporabi navedene metode pokušava se u nizu pokušaja doći do rješenja postavljenog problema, a u svakom se od njih pokušava ispraviti pogreška iz prethodnog koraka, da bi se svakim sljedećim pokušajem došlo bliže traženom rezultatu. Kurnik (2003.) ističe procjenu kao važnu značajku navedene metode, gdje učenici u svakom pokušaju promišljaju o granicama u kojima se nalazi rješenje problema te vježbom razvijaju preciznost, smanjuju broj pokušaja te zadatke rješavaju brže. Navedena se metoda primjenjuje kako bi se zamijenila potreba postavljanja jednadžbi, a najčešće se prikazuje pomoću tablice. Prednost je takvog načina rješavanja problema u visokoj samostalnosti učenika te njezina primjenjivost u pisanim i praktičnim problemskim zadacima.

Primjer 1. Na stolu se nalaze crvene, bijele i plave kuglice, njih ukupno 28. Bijelih kuglica je 8 puta više od crvenih kuglica, a plavih je kuglica najmanje. Koliko je plavih kuglica na stolu?

(4. razred, županijsko natjecanje, 2011. g.)

Rješenje: Ako je bijelih kuglica osam puta više nego crvenih, onda je broj crvenih 1, 2 ili 3. Navedeni se brojevi upišu u tablicu i iz uvjeta se izračuna broj bijelih kuglica. Od ukupnog broja kuglica oduzme se broj bijelih i crvenih kako bi se dobile vrijednosti preostalih plavih kuglica. Postupak rješavanja i samo rješenje jasno se razaznaje iz prikazane tablice.

bijele kuglice	crvene kuglice	plave kuglice
8	1	19
16	2	10
24	3	1

Poylini koraci u metodi uzastopnog približavanja:

1. Razumijevanje zadatka

Nakon pročitano g teksta zadatka vidljivo je kako su nepoznate tri veličine koje čine tri različite vrste kuglica. Za dobivanje povratne informacije od učenika o razumijevanju teksta zadatka mogu poslužiti pitanja poput: Što se od tebe traži u navedenom zadatku? Misliš li da bi ti za dobivanje rješenja mogao pomoći neka skica ili grafički prikaz? Imaš li dovoljno zadanih podataka za rješavanje ovoga problema? i sl. U navedenom zadatku postoje tri dijela uvjeta, a od učenika se očekuje da prepozna kako treba znati koliko ima i ostalih kuglica, odnosno onih čiji se broj ne traži u pitanju, da bi mogao saznati koliko ima onih koje se u tekstu zadatka traže.

2. Stvaranje plana

Kako bi učenik stvorio plan za rješavanje zadatka, potrebno je da odabere neku od njemu poznatih strategija rješavanja problemskih zadataka. S obzirom na to da je poznato kako je bijelih kuglica osam puta više od crvenih, a uz to je i poznat ukupan broj kuglica, učenik može zaključiti kako metodom tablice može izračunati broj preostalih kuglica. Svakim pokušajem postupno će se približavati ukupnom broju kuglica, sve dok jednakost ne bude zadovoljavajuća.

3. Provođenje plana

Olakšani prikaz poznatih podataka je pomoću tablice, gdje se jasno i pregledno vidi broj pojedinih kuglica, čiji zbroj daje ukupan broj od 28 kuglica. Ako je zbroj brojeva u redu jednak 28, procijenjen je točan broj pojedinih kuglica. Zbroj kuglica u redu postepeno se kroz redove povećava, ako je za prvi broj bijelih kuglica odabran broj 1. Ukoliko učenik dobije navedeni rezultat, može zaključiti kako je odabrao ispravnu metodu za rješavanje postavljenoga problema.

4. Osvrt

Analizom zadatka naslućuje se mogućnost rješavanja istog postavljanjem jednadžbi, na način da se svaka od navedenih boja kuglica zamijeni određenom nepoznaticom, a rješenje se dobije rješavanjem sustava postavljenih jednadžbi. Ukoliko je dobiveni rezultat jednak prethodno dobivenom rezultatu, učenik može lako zaključiti kako je isti i točan. Također, kroz analizu zadatka i njegovog rješenja, valja preispitati može li se rezultat ili metoda koristiti za rješavanje nekog drugog problema.

4.2. Metoda inverzije ili računanja unazad

Kao što i sam naziv navedene metode govori, zadatak se pomoću ove metode počinje rješavati krećući od posljednjeg podatka koji je zadan prema početku istog. Odnosno, računске se operacije izvode obrnuto od zadanoga redosljed. Varošaneć (2014.) navodi da kod strukturiranja takvih zadataka neka se radnja najprije treba izvesti na dijelu cjeline, zatim na preostalom dijelu pa na sljedećem ostatku i tako dalje dok se nakon konačno mnogo koraka ne pojavi krajnji ostatak. Navedena metoda može se primijeniti za rješavanje zadataka prije upoznavanja učenika s algebarskim jednadžbama.

Primjer 2. Kojem broju treba pribrojiti broj 4, taj zbroj pomnožiti brojem 9 i od umnoška oduzeti broj 311 da se dobije broj 2011?

(županijsko natjecanje, 4. razred, 2011. g.)

Rješenje: Zadatak se rješava polazeći od posljednjeg podatka, odnosno broja 2011, koji je dobiven oduzimanjem broja 311 od nekog broja. Iz toga se zaključuje da je nepoznati broj jednak zbroju brojeva 2011 i 311, odnosno $2011 + 311 = 2322$. Prema tekstu zadatka taj je zbroj dobiven umnoškom nekog broja s brojem 9. Dakle, nepoznati broj jednak je $2322 : 9 = 258$. I na kraju, taj je broj dobiven zbrajanjem nepoznatoga pribrojnika s brojem 4 pa je početni broj jednak $258 - 4 = 254$.

Poylini koraci u primjeni metode inverzije:

1. Razumijevanje zadatka

Nakon pročitano zadatka učenici bi trebali razumijeti kako je poznato rješenje zadatka, dok je nepoznati prvi broj, odnosno prvi pribrojnik. Također, važno je prepoznati kako su zadaci međusobno povezani, odnosno, rješenje prethodnog zadatka početak je sljedećeg. Pri tome, rješenje prethodnog zadatka treba biti točno kako bi jednakost bila zadovoljena. U ovom dijelu učenik treba prepoznati da je moguće doći do rješenja uz navedene podatke odvajanjem dijelova uvjeta.

2. Stvaranje plana

Navedeni zadatak potrebno je zapisati tako da bude vidljivo na koji će se način doći do rješenja. Ono što je nepoznato potrebno je označiti određenim simbolom za nepoznanicu ili prikazati prazninom. U ovome je dijelu potrebno zapisati sve dijelove zadatka, kako bi se od konačnog rješenja došlo do početnog prvog pribrojnika. Za uspješnost u ovome koraku potrebno je da učenik primijeni svoje ranije stečeno znanje o suprotnim računskim radnjama. U ovom se koraku od učenika očekuje da prepozna je li se s navedenim tipom zadatka susreo ranije te može li primijeniti isti način njegova rješavanja ukoliko je odgovor na prethodnu tvrdnju pozitivan.

3. Provođenje plana

Nakon točno postavljenog zadatka, odnosno zapisivanja svih dijelova zadatka, slijedi računanje istog tako da se za svaki dio zadatka primijeni suprotna računski radnja od one koja piše. S obzirom na zavisnost dijelova uvjeta za dobivanje konačnog rješenja, odnosno početnog broja, nužna je provjera svakog dijela uvjeta. Poticajno pitanje koje se može postaviti kako bi se potvrdilo prethodno rečeno je: Možeš li dokazati da si taj dio uvjeta točno riješio?

4. Osvrt

Analizom rješenja učenici mogu predložiti ostale ideje rješavanja zadanog zadatka. Navedena metoda inverzije može se povezati s Descartesovom metodom rješavanja zadataka, gdje se svaki zadatak može svesti na jednadžbu.

4.3. Metode rješavanja logičkih zadataka

Logički zadaci često su dio matematičkih natjecanja te pripadaju dodatnim matematičkim sadržajima. Takvi su zadaci najčešće zadani u obliku tvrdnji te je za njihovo rješavanje više potrebno logičko rasuđivanje nego samo matematičko predznanje. Značajka je takvih zadataka što su sadržajno povezani sa svakodnevnim životom, što doprinosi i razvoju interesa za matematiku. Njihova se važnost, prema Debelec (2012.), očituje u razvoju logičkog mišljenja te doprinosu jačanja interesa za matematiku. Kurnik (2010.) ukazuje kako u primjeni metode često dolaze zajedno, jedna drugu nadopunjuju, a zadaci se mogu riješiti na više načina. Neke od metoda rješavanja logičkih zadataka su metoda pomoćne pretpostavke, metoda grafova, metoda tablice i dr.

4.3.1. Metoda pomoćne pretpostavke

“Rješavanje logičkog zadatka počinje uvođenjem pretpostavke o istinitosti neke izjave, a zatim se utvrđuje zadovoljava li ova pretpostavka uvjete zadatka” (Kurnik, 2010., str. 20). Prema Debelec (2002.) bit se ove metode sastoji u tome da se, rješavajući problem, za rješenje odabere tvrdnja koja će se prema uvjetima zadatka mijenjati te analizom vršiti korekcija lažnog rješenja te tako doći do onog pravog. Navedena metoda može se opisati kao jedna od onih koje koristi zdrav razum i analizu podataka koji su zadani. S obzirom na to da za nju nije potrebno veliko matematičko znanje, rijetko se zadaci rješivi ovom metodom javljaju na matematičkim natjecanjima u osnovnoj školi. Debelec (2002.) navodi primjer takvog zadatka:

Primjer 3. Tri djevojčice čija su imena Gordana, Lidija i Nataša, na natjecanju u gimnastici zauzele su prva tri mjesta. Na pitanje prijateljica, koja je koje mjesto zauzela, dobiveni su sljedeći odgovori:

- Gordana: “Ja sam zauzela prvo mjesto.”

- Lidija: “Ja nisam zauzela prvo mjesto.”

- Nataša: “Ja nisam zauzela treće mjesto, ali imajte u vidu da je odgovor samo jedne moje prijateljice istinit.”

Koje je mjesto zauzela Nataša, ako se zna da je njezin odgovor u potpunosti istinit?

Rješenje: Za dobivanje rješenja navedenog zadatka nužno je uvesti pretpostavku da je jedna od tvrdnji djevojčica lažna. Prema tome, ako je Gordana rekla istinu, onda je i Lidija rekla istinu, što iz uvjeta zadatka nije moguće. Ako je slučaj obrnut, navedena je situacija moguća te se na temelju toga može zaključiti kako je prvo mjesto zauzela Nataša.

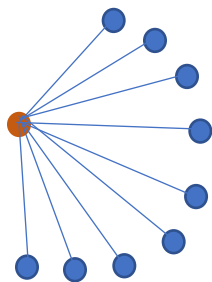
4.3.2. Metoda grafova

Prema Debelac (2002.) zornost ove metode omogućuje njeno lako korištenje pri rješavanju logičkih zadataka. Karakterizira je povezivanje elemenata koji su na određen način povezani. Varošaneć (2003.) ističe njene prednosti, učenicima je zanimljiva, a i vrlo je korisna jer olakšava učenicima prijelaz na rješavanje zadataka pomoću jednadžbi, određivanje poznatih i nepoznatih veličina te uspostavljanja odnosa među njima.

Primjer 4. Na šahovskom turniru sudjelovalo je 10 igrača. Svaki je igrač igrao sa svakim od preostalih igrača po jednu partiju. Koliko je svaki pojedini igrač odigrao partija?

(školsko natjecanje, 4. razred, 2020. g.)

Rješenje: Igrači se grafički mogu prikazati kao točke, a partije kao dužine koje povezuju dva igrača. Ukupan broj dužina kojima su spojene dvije točke, s time da je početna točka uvijek ista, čine ukupan broj partija jednoga igrača. Iz toga slijedi kako je svaki igrač odigrao devet partija na šahovskom turniru.



Poylini koraci kod metode grafova:

1. Razumijevanje zadatka

Iz teksta zadatka učenicima je poznat ukupan broj sudionika te broj partija koji je svaki od njih odigrao s ostalim igračima. Nepoznata je jedna veličina koja je ista za sve igrače.

Za takvo zaključivanje učenike je moguće potaknuti pitanjima: Što je nepoznato? Je li moguće saznati koliko su partija odigrali svi igrači? Imamo li dovoljno zadanih podataka? Može li ti crtanje skice pomoći kako bi bolje razumio problem?

2. Stvaranje plana

Od učenika se očekuje da prepozna kako je navedeni zadatak jednostavnije riješiti grafičkim prikazom ili mentalnim računanjem bez zapisivanja. Navedene podatke valja zapisati određenim simbolima kako bi rješenje zadatka bilo zorno prikazano. Za stvaranje plana rješavanja postavljenog zadatka poticajna su pitanja poput: Možeš li riješiti dio problema? Kako možeš prikazati poznate podatke? Možeš li generalizirati dobiveno rješenje?

3. Provođenje plana

Grafički se igrači prikazuju istim znakom, a njihovim međusobnim povezivanjem prikazan je broj međusobno odigranih partija. Broj linija iz istog središta predstavlja broj odigranih partija za pojedinog igrača.

4. Osvrt

Analizom postavljenog zadatka može se utvrditi kako za navedeni zadatak nije potrebno veliko matematičko predznanje, već logičko zaključivanje. Navedeni se podatci mogu prikazati i na druge načine, ne samo grafički. Jedan od njih je prikaz pomoću metode tablice, gdje se igrači upisuju u stupac, jedan ispod drugoga, a određenim znakom je prikazano s kojim je igračima određeni igrač igrao partiju. Ta metoda omogućuje i provjeru dobivenog rješenja korištenjem grafičke metode, ali i omogućuje dolazak do rješenja na drugačiji način.

4.3.3. *Metoda tablice*

Kod takvih se zadataka u tablici znakom + označuje kada nešto jest, odnosno – kada nešto nije. Kurnik (2010.) naglašava prednosti primjene tablice u vidu preglednosti izjava i pojednostavljivanu rješenja.

Primjer 5. Ante, Bruno, Darko, Jakov, Lovre, Mate i Viktor učenici su 4. razreda. Njihove visine u centimetrima su među sljedećim brojevima: 128, 132, 135, 137, 138, 141, 142. Odredi njihove visine ako vrijedi: Ante je viši od Lovre, a niži od Brune. Viktor je viši od Brune. Zbroj visina Jakova i Mate iznosi 272. Jakov je niži od Mate. Darkova je visina neparan broj veći od 137. Viktor nije niži od 136 cm.

(županijsko natjecanje, 4. razred, 2019. g.)

Rješenje: Navedene se izjave pojednostavljeno mogu prikazati u tablici. Od navedenih tvrdnji može se zaključiti da je zbroj visina Jakova i Mate jednak 135 i 137, a s obzirom ne to da je Jakov niži od Mate lako se zaključuje kako je Jakov visok 135 cm. U njihovim je stupcima ispod odgovarajućih visina upisan znak +. Isto je učinjeno i za ostale na temelju danih tvrdnji.

	Ante	Bruno	Darko	Jakov	Lovre	Mate	Viktor
128	-	-	-	-	+	-	-
132	+	-	-	-	-	-	-
135	-	-	-	+	-	-	-
137	-	-	-	-	-	+	-
138	-	+	-	-	-	-	-
141	-	-	+	-	-	-	-
142	-	-	-	-	-	-	+

1. Razumijevanje problema

Iz teksta zadatka prepoznaje se da je riječ o visini sedmorice dječaka. Također, njihove su visine u određenom odnosu. Poznate su njihove brojčane vrijednosti te odnosi nekih od njih. Od učenika se očekuje da prepoznaju jesu li im zadane brojčane vrijednosti dovoljne za dobivanje preostalih ili im neke nedostaju. Prije prelaska na idući korak poželjno je da učenici postavljeni problem mogu prepričati, odnosno izraziti svojim riječima. Ukoliko su za to sposobni, može se zaključiti kako postavljeni problem zaista razumiju.

2. Stvaranje plana

S obzirom da se uvjet sastoji od sedam dijelova, među njima je potrebno uspostaviti vezu. Kroz razgovor s učenicima naslućuje se jesu li se s takvom vrstom zadataka već ranije susreli te imaju li ideju za njegovo rješavanje. S obzirom na veći broj dijelova uvjeta,

može se raspraviti je li bolje zadatak riješiti računski, postavljanjem jednadžbi ili grafički, tablično.

3. Provođenje plana

Pažljivim čitanjem teksta zadatka tablica se ispunjava na način ako se pretpostavi da navedena tvrdnja vrijedi za određenu osobu, da se ispod njenog imena stavi znak plus, a ispred ostalih znak minus. Tablica je pravilno ispunjena ako se ispod imena svake osobe nalazi samo jedan znak plus, ako su sve visine iskorištene samo jednom te svi uvjeti iz postavljenog zadatka zadovoljeni.

4. Osvrt

Analizom teksta postojećega zadatka utvrđuju se ostali načini rješavanja zadataka. Valja naglasiti važnost preglednosti postavljenih dijelova uvjeta kako bi se smanjila mogućnost pogreške te kako bi bili iskorišteni svi zadani podatci. Osvrtanju na rješenje dobivenog zadatka mogu doprinijeti pitanja poput: Jesi li odgovorio na postavljeno pitanje? Imaju li dobiveni rezultati smisla? Možeš li provjeriti dobivena rješenja? Može li se postavljeni problem ili korištena metoda biti korisna za buduće probleme?

4.3.4. *Descartesova metoda*

Jedan od najčešćih postupaka u nastavi matematike je rješavanje jednadžbi. Descartes je u svome djelu iznio 21 pravilo za rješavanje problema, a među njima se, prema Kurniku (2010.) ističu sljedeća:

1. Zadatak bilo koje vrste svodi se na matematički zadatak.
2. Matematički zadatak bilo koje vrste svodi se na algebarski zadatak.
3. Bilo koji algebarski zadatak svodi se na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

U nastavi matematike Descartesova se metoda može primijeniti na konstruktivne i tekstualne zadatke, jer se svaki tekstualni zadatak može raščlaniti na dva dijela. Prvi je sastaviti jednadžbu prevođenjem jezika zadatka na matematički jezik simbola, dok je drugi njezino rješavanje.

Primjer 6. Maja, Stanka, Helena i Kata su šetale livadom i ubrale ukupno 134 ivančice. Maja, Stanka i Kata su ubrale ukupno 96 ivančica, a Maja, Kata i Helena ukupno 93 ivančice. Maja je ubrala 1 ivančicu više od Kate. Koliko ivančica je ubrala svaka djevojčica?

(školsko natjecanje, 4. razred, 2017. g.)

Rješenje: Uočljivo je iz teksta da se zadatak svodi na rješavanje jednadžbe. Nepoznata su četiri broja, a uvjet se sastoji od četiri dijela koja je potrebno izdvojiti. Ukupan broj ubranih ivančica jednak je $M+S+H+K=134$. Poznato je i da $M+S+K=96$ te $M+K+H=93$. Posljednji poznat uvjet je $M=K+1$. Iz prvog uvjeta primjećuje se da Helena nije uključena, odnosno može se izračunati koliko je ivančica ona ubrala, odnosno $H=134-96$ i dobije se $H=38$. Analogno tome, u drugome uvjetu isključena je Stanka. Prema tome $S=134-93$, čime se dobije da je $S=41$. S obzirom na to da je poznato da $M=K+1$, rješavanjem jednadžbe može se izračunati da je $K+1+1+38=93$. Odnosno $K=27$. Iz prethodno postavljenog uvjeta jasno je da je $M=28$.

Poylini koraci u primjeni Descartesove metode:

1. Razumijevanje problema

Učenici najprije trebaju pročitati tekst zadatka kako bi mogli razumjeti o čemu se u zadatku radi. Nakon pročitano i analiziranog teksta, učenici bi trebali znati reći što se u zadatku traži, što je poznato, od koliko se dijelova sastoji uvjet, znati zapisati navedene dijelove, prepoznati može li se iz uvjeta odrediti nepoznanica te kako ono što nije te kako ono što je poznato povezati s onime što se traži bi mogli prijeći na sljedeći korak u rješavanju problema.

2. Osmišljavanje plana

Nakon što je tekst zadatka preveden na matematički jezik simbola, može se stvoriti veza između onoga što je poznato s onime što se u zadatku traži. Ono što nije poznato u ovome je zadatku označeno početnim slovom imena te je s onime što je poznato povezano u obliku jednadžbe. U ovome koraku valja iskoristi sve što je u zadatku zadano, izraziti sve dijelove uvjeta te ih povezati u sustav. U ovome dijelu do izražaja dolazi učenikovo ranije

stečeno znanje koje je potrebno primijeniti za uspješno postavljanje zadatka. Ukoliko su iskorišteni svi zadani podaci, omogućuje se prelazak na sljedeći korak.

3. Provođenje plana

Plan se provodi rješavanjem postavljene jednadžbe odabranom metodom primjerenom dobi i znanju učenika. Za to je važno pravilno postavljanje jednadžbe, odnosno točno određivanje svih dijelova uvjeta.

4. Osvrt na rješenje

Posljednji korak karakterizira provjera rješenja kako bi se provjerila njihova točnost te ponovljena interpretacija zadatka radi utvrđivanja postojanja drugih mogućnosti rješavanja navedenoga zadatka.

Metode rješavanja problemskih zadataka prema Kurniku (2008.) posebna su znanja o kojima često ovisi uspješnost sudjelovanja učenika na natjecanjima. Takvi zadaci doprinose razvoju matematičkih sposobnosti učenika te stvaralačkom mišljenju. Problemska se nastava ne može primjenjivati na svakom nastavnom satu ističe Kurnik (2002.) i zaključuje kako je rješavanje problemskih zadataka dobar način postupnog uvođenja problemske nastave u nastavu matematike. Takvi su zadaci često dio dodatne nastave matematike pa će se u nastavku analizirati zastupljenost opisanih metoda rješavanja problemskih zadataka u zbirkama za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole.

5. Analiza zbirki za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole

Obvezni obrazovni materijal, čija struktura i sadržaj mora omogućavati učenicima samostalno učenje i stjecanje različitih razina i vrsta kompetencija, kao i vrednovanje usvojenosti odgojno-obrazovanih ishoda, prema Zakonu o udžbenicima i drugim obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu (2018.), definira se pojmom udžbenik. Poljak (1980.) definira udžbenik na sličan način, kao osnovnu školsku knjigu koja je pisana na osnovi propisanog nastavnog plana i programa, koju učenici svakodnevno upotrebljavaju u svome obrazovanju. Prema ranije spomenutom Zakonu o udžbenicima i drugim obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu (2018.), također se i dopunska nastavna sredstva, kao što su radna bilježnica i zbirka zadataka, podrazumijevaju pod pojmom udžbenik. Na temelju toga, svugdje se u nastavku pod pojmom udžbenik ujedno misli i na zbirke zadataka. Pojam zbirka zadataka u Zakonu o udžbenicima i ostalim materijalima za osnovnu i srednju školu (2018.) označava dopunsko nastavno sredstvo, koje odabirom zadataka programski i sadržajno slijedi raspored nastavnog sadržaja u udžbeniku. Usprkos tome što se brojne struke bave udžbenicima, samim time i ostalim nastavnim sredstvima, kao što su i zbirke zadataka, ne postoji jedinstvena disciplina koja se bavi njihovom sveobuhvatnom analizom. Navedeni problem navodi i Vidić (2012.), koja kaže kako se usprkos neupitnoj ulozi udžbenika u nastavi, primjećuje nedostatak istraživanja njihove kvalitete. Istraživanjem matematičkih zadataka koji se koriste u nastavi dobiva se, kako ističu Sullivan, Clarke i Clarke (2013.), jasniji uvid u prilike i mogućnosti koje imaju učenici za učenje novih znanja.

S obzirom na to da nastavni sadržaj za dodatnu nastavu matematike nije propisan Nastavnim planom i programom (2006.) te se njegov sadržaj odabire shodno interesima i sklonostima učenika, u Katalogu obveznih udžbenika i pripadajućih dopunskih nastavnih sredstava za osnovnu školu, gimnazije i srednje strukovne škole od školske godine 2014./2015. (2014.) nisu navedena nastavna sredstva poput zbirki zadataka za dodatnu nastavu matematike. Navedena nastavna sredstva učitelj odabire individualno. Na hrvatskom tržištu trenutno je dostupno osam zbirki zadataka za dodatnu nastavu matematike u 4. razredu osnovne škole, a iste su prikazane u Tablici 1. Posljednje, deveto, navedeno u tablici, djelo Matematičkim stazama 4 skup je listića za dodatnu nastavu

matematike u četvrtom razredu, ali su svrstani u tablicu zbog oblikovanja istih, odnosno, zbog sličnosti forme i sadržaja sa zbirkama za dodatnu nastavu matematike koje su prethodno navedene.

Tablica 1.

Zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike za četvrti razred u Republici Hrvatskoj

NASLOV ZBIRKE	AUTORI	IZDAVAČKA KUĆA, GODINA IZDANJA
Matematika 4 plus	Zoran Kustura, Ivan Lugar, Biljana Obradović	Školska knjiga, 2018.
Matematika 4	Filip Čurić, Vlasta Božić	Element, 2008.
Turbomatika	Zlatko Mrkić	Alfa, 2009.
Matematika 4	Danica Vrgoč, Boško Jagodić, Ivan Mrkonjić	Tipex, 2005.
Vlatka i Matka 4	Đurđica Salamon	Alka Script, 2007.
Školarci su zakon 4, 1. dio	Ivan Mrkonjić, Đurđica Salamon Padjen	Alka Script, 2015.
Školarci su zakon 4, 2. dio	Ivan Mrkonjić, Đurđica Salamon Padjen	Alka Script, 2015.
Matematika 4 - dodatna nastava iz matematike u četvrtom razredu osnovne škole	Jasenka Đurović	Element, 2016.
Matematičkim stazama 4	Gordana Paić, Željka Manzoni, Ivana Marjanović, Nenad Kosak	Školska knjiga, 2014.

Svoju ulogu pri kreiranju udžbenika ima i državna politika. Prema tome, prva analiza udžbenika i drugih nastavnih materijala je ona zapisana u navedenom Zakonu o udžbenicima i drugim obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu (2018.). Ona se odnosi na utvrđivanje usklađenosti udžbenika s predmetnim kurikulumom i međupredmetnim temama te na ostvarenost znanstvenih, pedagoških, psiholoških, didaktičko-metodičkih, etičkih, jezičnih, likovno-grafičkih i tehničkih zahtjeva o kojima odlučuje stručno povjerenstvo. Osim prve analize udžbenika, koju provodi stručno povjerenstvo, analizu provodi i pojedinac koji donosi subjektivnu procjenu o njegovoj kvaliteti. U početnoj se analizi najčešće navode osnovne činjenice, kao što su imena autora, naslov, razred, sadržajni dijelovi udžbenika, broj njegovih stranica te ostali podaci

o izdavaštvu. Sadržajna analiza obuhvaća utvrđivanje ishoda učenja, odnosno znanja, vještina i sposobnosti koje se stječu. Također, s obzirom na to da ne postoje određeni kriteriji za analizu samoga udžbenika kao i pomoćnih materijala, te donosi pojedinac s obzirom na cilj analize. S obzirom na ispreplitanje različitih aspekata prilikom osmišljavanja i izrade samoga udžbenika i ostalih nastavnih materijala, analiza istih je kompleksna. Peterodimenzionalni instrument kojim se ispituju zahtjevi tekstualnih zadataka, prema Glasnović Gacin (2018.), sastoji se od sljedećih kategorija: matematička aktivnost, matematički sadržaj, kompleksnost, vrsta odgovora te kontekst. Navedeni se instrument može koristiti i za analizu zadataka sadržanih u zbirkama za dodatnu nastavu matematike. Pri tome, aktivnost bi označavale korištene matematičke aktivnosti, odnosno posebne, ranije opisane metode rješavanja matematičkih problema. Hrvatske zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole nisu još istražene prema kategoriji aktivnost, kompleksnost, vrsta odgovora te matematički sadržaj i kontekst.

Budući da pregled literature pokazuje da su zbirke zadataka, uz udžbenik, jedan od temeljnih materijala za vježbanje učenika i jedno od temeljnih sredstava za pripremu učitelja za sate dodatne nastave matematike, one mogu imati značajan utjecaj na učitelje i učenike. Cilj je ove analize pokazati kakvi se zadaci nalaze u zbirkama za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu, kako bi se dobio uvid u mogućnosti primjene problemskog pristupa rješavanja zadataka i razvijanja viših kognitivnih procesa. Krajnji je cilj saznati je li kroz zadatke obuhvaćene zbirkom omogućeno problemsko pristupanje prema ranije opisanom teorijskom modelu u poglavlju 1.

Analizom zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike pokušalo se doći do sljedećih spoznaja:

- Je li problem rješiv pomoću neke od ranije opisanih metoda rješavanja problemskih zadataka
- Jesu li zadaci jednostavni ili složeni
- Postoji li jedan točan odgovor na postavljeni problem ili je više njih točno
- Kakvi su zadaci u unutar zbirke s obzirom na matematički sadržaj i kontekst

U analizi zbirke zadataka za potrebe ovog diplomskog rada bilo je uključeno šest od osam zbirki zadataka za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole i jedna zbirka nastavnih listića za dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu osnovne škole, koje su ranije navedene u Tablici 1., a to su: Matematika 4 plus, Matematika 4, Turbomatika, Školarci su zakon, Matematika 4 i Matematičkim stazama 4. Odabrane su upravo zbirke zadataka dodatnu nastavu matematike za četvrti razred osnovne škole jer se učenici tada susreću s najviše problemskih zadataka, u usporedbi s prethodne tri godine. Od četvrtog se razreda učenici mogu pripremati i za matematička natjecanja u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva i Agencije za odgoj i obrazovanje, gdje se također susreću s problemskim zadacima. Svaka od zbirki zadataka analizirana je prema kriterijima iz Tablice 2. Nakon toga napravljena je usporedba zbirki zadataka međusobno kako bi se uvidjele sličnosti i razlike između njih. U Republici Hrvatskoj još nisu analizirane zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike za četvrti razred osnovne škole po navedenim kriterijima.

Tablica 2.

Kategorije za analizu zbirki za dodatnu nastavu matematike

KATEGORIJA	KONKRETIZACIJA KATEGORIJE	PRIMJERI
AKTIVNOST	Koja se aktivnost traži za rješavanje problema?	<ul style="list-style-type: none"> • Metoda uzastopnog približavanja • Metoda inverzije • Metode rješavanja logičkih zadataka • Descartesova metoda
KOMPLEKSNOST	Može li se problem riješiti u jednom koraku ili u više njih?	<ul style="list-style-type: none"> • Jednostavni zadaci • Složeni zadaci
VRSTA ODGOVORA	Postoji li samo jedan točan odgovor ili više njih?	<ul style="list-style-type: none"> • Jedan točan odgovor • Nekoliko točnih odgovora
MATEMATIČKI SADRŽAJ I KONTEKST	Koja je vrsta zadataka s obzirom na matematički sadržaj i kontekst?	<ul style="list-style-type: none"> • Numerički zadatak • Tekstualni zadatak • Zadatak s veličinama • Geometrijski zadatak

U nastavku bit će prikazani rezultati analize zbirke za dodatnu nastavu matematike. Nakon individualne analize, zbirke će biti međusobno uspoređene kako bi se utvrdile sličnosti i razlike među njima.

Matematika 4 plus

Zbirka zadataka Matematika 4 plus (Kustura, Lugar i Obradović, 2018.) strukturalno je podijeljena na devet cjelina, a to su: računski zadaci, magični likovi, dešifriranje, prebrojavanje, kombinatorni zadaci, računarska geometrija, mozgalice, geometrijske mozgalice i mješoviti zadaci. Nakon svake cjeline dana su rješenja zadataka obuhvaćenih tom cjelinom uz upute i napomene za njihovo rješavanje. Zbirkom je obuhvaćeno 215 zadataka. S obzirom na navedeni kriterij aktivnosti, odnosno mogućnost korištenja neke od ranije opisanih metoda rješavanja problemskih zadataka, utvrđeno je kako je najviše zadataka, 64 njih, moguće riješiti Descartesovom metodom, odnosno svođenjem teksta zadataka na rješavanje jednadžbe. Navedena je metoda u najvećoj mjeri primjenjiva u zadacima s veličinama, u kojima je potrebno postaviti formulu za izračunavanje nepoznate veličine. Autori su predvidjeli korištenje metode uzastopnog približavanja u ukupno devet zadataka iz zbirke, dok su metodu inverzije predvidjeli za njih šest. Navedeno je vidljivo u danim rješenjima, koje se nalaze na kraju svake cjeline. Logički zadaci nisu zastupljeni u ovoj zbirci zadataka te se samim time ne traži upotreba metode pomoćne pretpostavke, kao ni metode tablice, dok se upotreba metode grafova može naslutiti kao rješenje samo jednog zadatka unutar zbirke. Više od polovice zadataka, njih 130, što u postotku iznosi 60%, pripadaju tekstualnim zadacima. U većoj su mjeri zastupljeni i geometrijski zadaci, na koje otpada 24% zadataka. Zastupljenost zadataka s veličinama unutar zbirke je 11%, odnosno, njih je 23. U najmanjem broju zastupljeni su numerički zadaci, kojih je 5% unutar cijele zbirke, točnije njih 11. Na svaki od navedenih zadataka postoji jedan točan odgovor, odnosno, nema ni jednog zadatka otvorenog tipa koji bi podrazumijevao veći broj točnih odgovora. Njih 164 pripada složenom tipu zadataka, odnosno, rješivi su u više koraka, dok njih 51 pripada jednostavnom tipu zadatka. Rezultati prikazani u Tablici 3. pokazuju dominaciju tekstualnih zadataka, što nije ni iznenađujuće s obzirom da je riječ o zadacima koji se nalaze u zbirci za dodatnu nastavu matematike. Posebne metode

rješavanja problemskih zadataka, koje su ranije opisane, primjenjive su za rješavanje 36% zadataka u zbirci, odnosno njih je 79.

Tablica 3.

Matematika 4 plus (Kustura, Lugar i Obradović, 2018.)

BROJ ZADATAKA	215	
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	4%
	Metoda inverzije	3%
	Metode rješavanja logičkih zadataka	0.5%
	Descartesova metoda	30%
KOMPLEKSNOST	Jednostavni zadaci	24%
	Složeni zadaci	76%
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%
	Više točnih odgovora	0%
MATEMATIČKI	SADRŽAJ	I
KONTEKST	Numerički zadaci	5%
	Tekstualni zadaci	60%
	Zadaci s veličinama	11%
	Geometrijski zadaci	24%

Matematika 4 – dodatna nastava matematike u četvrtom razredu osnovne škole

Zbirka zadataka za dodatnu nastavu Matematika 4 (1998.), čija je autorica Jasenka Đurović, jedina je zbirka na tržištu uz koju postoji i poseban priručnik za učitelje (1998.) istoga naslova u kojem se nalaze rješenja zadataka i metodičke upute za njihovo rješavanje. Uz metodičke upute za rješavanje pojedinih zadataka, autorica navodi i pomoćne zadatke s pripadajućim rješenjima, koji su jednostavniji, čime je se omogućuje postupnost u spoznavanju rješavanja složenijih zadataka istog tipa. Zbirka je oblikovana kao svojevrsna radna bilježnica za učenike. Sadrži trideset listića, a na svakom se od njih nalaze po četiri zadatka, nakon kojih dolazi prazna stranica s kvadratićima za njihovo

rješavanje. Zadaci nisu raspoređeni ni u tematske cjeline, ni na koji drugi način, već je zbirka zamišljena kao skup listića predviđenih za rješavanje na dodatnoj nastavi matematike tako da je jedan listić predviđen za jedan nastavni sat. Zbirkom je ukupno obuhvaćeno 120 zadataka. Prema navedenom kriteriju aktivnosti, nisu uočeni brojni zadaci za čije bi se rješavanje mogla iskoristiti neka od navedenih posebnih metoda rješavanja zadataka. Prema tome, uočena je mogućnost primjene metode uzastopnog približavanja u 12 zadataka, dok metoda inverzije nije uočena za rješavanje ni jednog zadatka u zbirci. Mali je broj i zadataka koje je moguće riješiti nekom od metoda rješavanja logičkih zadataka pa prema tome nema ni jednog zadatka za koje je predviđeno rješavanje metodom pomoćne pretpostavke, samo je jedan zadatak predviđen rješavanjem metodom tablice, dok je najveći broj onih čije je rješavanje predviđena metoda grafova, točnije njih 7. Od navedenih metoda, najbrojniji su zadaci u kojima se može primijeniti Descartesova metoda, njih je 32. Više od polovice zadataka, točnije njih 75, što u postotku čini 62% zadataka, pripada tekstualnim zadacima. Ostalih 45 zadataka čine numerički, tekstualni i geometrijski zadaci, čiji je broj otprilike jednak, kao što je vidljivo i u Tablici 4. Odnosno, numeričkih i geometrijskih zadataka je ukupno 14, što je u postotku 12% zadataka. Zadataka s veličinama je tri više, odnosno njih je 17, odnosno 14%. Uočeno je kako su zadaci međusobno veoma slični. Primjerice, od ukupno 14 numeričkih zadataka njih 12 je zadano tako da u kvadratić treba upisati znamenku koja nedostaje kako bi rezultat bio točan. Slično je uočeno i kod tekstualnih zadataka, kod kojih u njih 12 od 63, što je 19%, slova treba zamijeniti različitim znamenkama da se dobije točan rezultat s obzirom na zadanu računsku radnju. Zanimljivo je kako ni u ovoj zbirci nema ni jednog zadatka u kojem je moguće više točnih odgovora, odnosno, nema zadataka otvorenog tipa.

Tablica 4.

Matematika 4 – dodatna nastava matematike u četvrtom razredu osnovne škole

(Đurović, 1998.)

BROJ ZADATAKA	120	
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	10%
	Metoda inverzije	0%

	Metode rješavanja logičkih zadataka	7%
	Descartesova metoda	27%
KOMPLEKSNOST	Jednostavni zadaci	20%
	Složeni zadaci	80%
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%
	Više točnih odgovora	0%
MATEMATIČKI KONTEKST	Numerički zadaci	12%
	Tekstualni zadaci	62%
	Zadaci s veličinama	14%
	Geometrijski zadaci	12%

Matematičkim stazama 4

Zbirka zadataka Matematičkim stazama 4 (Paić, Manzoni, Marjanović i Kosak, 2014.) oblikovana je kao zbirka listića za dodatnu nastavu matematike koja sadržajno prati Nastavni plan i program (MZOŠ, 2006.) za četvrti razred osnovne škole. Naslov svakog listića odgovara naslovu nastavne jedinice s redovne nastave matematike, npr. Pisano množenje dvoznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem, Pisano dijeljenje troznamenkastog broja jednoznamenkastim brojem (primjer: $624:3$), Crtanje pravokutnika i kvadrata te Opseg pravokutnika i dr. Zbirkom je ukupno obuhvaćeno 30 listića, tako da svaki listić ima pripadajući naslov te se na njemu nalaze samo zadaci koji sadržajno odgovaraju navedenom naslovu te jedan završni listić kojim su obuhvaćeni različiti zadaci sadržajno temeljeni na prethodnim listićima. Zbirka ne sadrži rješenja danih zadataka. Od ukupno 158 zadataka, uočena je dominacija numeričkih i tekstualnih zadataka. Nešto više od trećine zbirke pripada numeričkim zadacima u kojem se traži samo izračunavanje danoga zapisa, takvih je zadataka 53. Najviše je tekstualnih zadataka, njih je 61, dok je najmanje zadataka s veličinama i geometrijskih. S obzirom na velik broj numeričkih zadataka, ne iznenađuje ni činjenica da nema ni jednog zadatka otvorenog tipa koji ima više točnih odgovora. Od posebnih metoda rješavanja problemskih zadataka primjenjiva je jedino Descartesova metoda, dok ostale nisu zastupljene ni u jednom zadatku, kao što je i prikazano u Tablici 5. Njena se primjenjivost očituje u postavljanju

brojevnih izraza u tekstualnim zadacima, gdje je većina njih rješiva u koracima, bez potrebe za uvođenjem nepoznanice, već je potrebno samo postaviti brojevni izraz. S obzirom da se Descartesova metoda odnosi na prevođenje teksta na matematički jezik simbola, onda su i takvi zadaci obuhvaćeni ovom analizom. Većina zadataka pripada jednostavnom tipu, točnije njih 110, što čini 70% od ukupnog broja zadataka, dok su ostali složeni.

Tablica 5.

Matematičkim stazama 4 (Paić, Manzoni, Marjanović i Kosak, 2014.)

BROJ ZADATAKA	158	
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	0%
	Metoda inverzije	0%
	Metode rješavanja logičkih zadataka	0%
	Descartesova metoda	33%
KOMPLEKSNOŠT	Jednostavni zadaci	70%
	Složeni zadaci	30%
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%
	Više točnih odgovora	0%
MATEMATIČKI KONTEKST	SADRŽAJ I Numerički zadaci	32%
	Tekstualni zadaci	39%
	Zadaci s veličinama	5%
	Geometrijski zadaci	23%

Vlatka i matka 4

Zbirka zadataka za dodatnu nastavu Vlatka i matka 4 (Mrkonjić i Salamon, 2007.) započinje poglavljem pod nazivom Razni zadaci, nakon kojeg slijede zadaci podijeljeni u deset različitih tema, a to su: zbrajanje pomoću Vennovih dijagrama, zbrajanje sustavnim ispisivanjem, načelo umnoška, Gaussova dosjetka, logički zadaci, metoda uzastopnog približavanja, metoda dužina, magični kvadrat, određivanje znamenaka koje nedostaju i

trokut, pravokutnik, kvadrat. Svaka od navedenih tema započinje kratkim teorijskim uvodom uz nekoliko riješenih primjera, nakon kojih slijede zadaci. Osim velikog broja zadataka, točnije njih 244, primijećena je i njihova diferencijacija, odnosno zastupljenost različitih vrsta zadataka, kao što su zabavni zadaci, zagonetke, križaljke, problemski zadaci i ostali. Neke od posebnih metoda rješavanja problemskih zadataka, čija se prisutnost ispituje, sadržane su u ovoj zbirci u vidu samostalnih tema s pripadajućim zadacima. Shodno tome, za temu naslova metoda uzastopnog približavanja dostupno je 7 zadataka, dok je za temu logički zadaci navedeno 9 zadataka za metodu zdravog razuma i 4 za metodu tablice. Metoda inverzije nije sadržana u vidu samostalne teme, kao ni Descartesova metoda rješavanja zadataka. Od ukupno 244 zadataka obuhvaćenih ovom zbirkom, 121 njih su složeni zadaci, dok su preostala 123 jednostavni. Kao što je i vidljivo u Tablici 6., zbirka ne sadrži ni jedan zadatak otvorenog tipa, već svi imaju konačan broj rješenja. Uočena je dominacija tekstualnih zadataka, kojih je 176, što u postotku čini 72%. Na kraju zbirke dana su rješenja zadataka, kako bi učenici mogli provjeriti podudaraju li se njihova rješenja s autorovima.

Tablica 6.

Vlatka i matka 4 (Mrkonjić i Salamon, 2007.)

BROJ ZADATAKA	244	
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	2%
	Metoda inverzije	1%
	Metode rješavanja logičkih zadataka	5%
	Descartesova metoda	19%
KOMPLEKSNOST	Jednostavni zadaci	50%
	Složeni zadaci	50%
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%
	Više točnih odgovora	0%
	Numerički zadaci	5%

MATEMATIČKI KONTEKST	SADRŽAJ	I	Tekstualni zadaci	72%
			Zadaci s veličinama	6%
			Geometrijski zadaci	17%

Školarci su zakon

Zbirka Školarci su zakon (Mrkonjić i Salamon Padjen, 2015.) osvježeno je izdanje zbirke zadataka Vlatka i matka te je strukturalno podijeljena u dva dijela. Kao što i autori u predgovoru kažu, zbirka je strukturirana tako da prati važeći program matematike, ali sadrži i složenije zadatke koji se ne stignu obraditi u redovnoj nastavi. Natjecanje Klokkan bez granica poslužilo je kao glavna orijentacija za izbor sadržaja i razine složenosti zadataka. Prvi dio zbirke sadrži osam tematskih cjelina, a drugi dio sedam. Prvi dio obuhvaća zadatke s prirodnim brojevima, zbrajanjem i oduzimanjem, Gaussovu dosjetku, kut i trokut, pravokutnik i kvadrat, sastavljanje, rastavljanje i izabiranje likova te množenje dvoznamenkastim i troznamenkastim brojem. Prvi dio zbirke sadrži 153 zadatka s otprilike podjednakim brojem tekstualnih i geometrijskih zadataka, što se može zaključiti i iz naslova tematskih cjelina. Rješenja svih zadataka sadržana su na kraju zbirke. Uočeno je 11 zadataka u kojima se može primijeniti Descartesova metoda, što u postotku daje 7%. Od ukupnog broja, 60% zadataka određeni su kao jednostavni, a preostalih 40% čine složeni zadaci. Drugi dio zbirke sadrži sedam cjelina: dijeljenje, metoda uzastopnog preživljavanja, metoda dužina, kombinatorni zadaci, logički zadaci, kocka i kvadar te za svakoga ponešto. Kao što je vidljivo i u Tablici 7., u drugom dijelu dominiraju tekstualni zadaci, koji čine 83% zbirke. Posebne metode rješavanja problemskih zadataka sadržane su kao teme tako da je na početku teorijski uvod nakon kojeg slijede riješeni primjeri i zadaci za rješavanje, a takvih je ukupno 17. Isto tako su i logički zadaci izdvojeni kao samostalna tema i njih je ukupno 19, a među njima se razliku zadaci vezani uz metodu tablice te oni uz metodu "zdravog razuma". Zadaci vezani uz metodu inverzije sadržani u prvoj temi, dijeljenje i to samo u dva zadatka, dok je Descartesova metoda sadržana samo u jednom zadatku.

Tablica 7.

Školarci su zakon (Mrkonjić i Salamon Padjen, 2015.)

BROJ ZADATAKA				
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI		
		1. dio	2. dio	
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	0%	10%	
	Metoda inverzije	0%	1%	
	Metode rješavanja logičkih zadataka	0%	11%	
	Descartesova metoda	7%	0.6%	
KOMPLEKSNOŠT	Jednostavni zadaci	60%	51%	
	Složeni zadaci	40%	49%	
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%	100%	
	Više točnih odgovora	0%	0%	
MATEMATIČKI SADRŽAJ I KONTEKST	Numerički zadaci	13%	3%	
	Tekstualni zadaci	43%	83%	
	Zadaci s veličinama	2%	7%	
	Geometrijski zadaci	42%	7%	

Turbomatika

Zbirka Turbomatika (2009.) autora Željka Mrkića sadrži deset poglavlja, a to su: rimske brojke, skup prirodnih brojeva, računske operacije u skupu prirodnih brojeva, jednadžbe, prebrojavanje elemenata skupa, trokut, kvadrat i pravokutnik, rješenja zadataka iz povijesti za igru, zadaci za zeku-peku, dužina, pravac i polupravac te matematičke križaljke. Svako poglavlje započinje teorijskim uvodom, nakon kojeg slijede riješeni primjeri nekoliko zadataka, zadaci za rješavanje, a nakon njih dana su rješenja istih. Ukupno se u zbirci nalazi 284 zadatka, s time da su posljednja dva zadatka, odnosno dvije matematičke križaljke, promatrane kao dva zadatka iako se unutar svake nalazi veći broj zadataka. Više od pola zbirke čine tekstualni zadaci, kojih je 166, što u postotku iznosi 59%. Kao što je i prikazano u Tablici 8., najmanje je zastupljenost zadataka s veličinama,

koji čine samo 7% zbirke. Zanimljiva je činjenica da je više jednostavnih nego složenih zadataka. Analizom zadataka ove zbirke primijećeno je kako određen broj zadataka pripada početnim zadacima pri usvajanju novog nastavnog sadržaja, odnosno onim najjednostavnijim, kao što je: Koliko nula treba pripisati broju 6 da dobijemo tisuće, a koliko da dobijemo milijune?, Kojem broju trebaš dodati 5 da bi dobio 15? i sl. S obzirom na ispitani kriterij aktivnosti, uočena je prisutnost Descartesove metode, dok su ostale metode primjenjive za rješavanje iznimno malog broja zadataka, npr. metoda uzastopnog približavanja uočena je u samo jednom zadatku.

Tablica 8.

Turbomatika (Mrkić, 2009.)

BROJ ZADATAKA		284
KATEGORIJA	PRIMJERI	POSTOTCI
AKTIVNOST	Metoda uzastopnog približavanja	0.4%
	Metoda inverzije	2%
	Metode rješavanja logičkih zadataka	0.7%
	Descartesova metoda	18%
KOMPLEKSNOST	Jednostavni zadaci	55%
	Složeni zadaci	45%
VRSTA ODGOVORA	Jedan točan odgovor	100%
	Više točnih odgovora	0%
MATEMATIČKI KONTEKST	SADRŽAJ I Numerički zadaci	13%
	Tekstualni zadaci	59%
	Zadaci s veličinama	7%
	Geometrijski zadaci	21%

S obzirom na aktivnost učenika, rezultati pokazuju kako je najviše zadataka koji zahtijevaju postavljanje jednadžbi, odnosno za koje je moguće primijeniti Descartesovu metodu rješavanja problemskih zadataka. Najmanje je zadataka u kojima je moguće primijeniti metodu inverzije te metode rješavanja logičkih zadataka. Zbirke sadrže otprilike podjednak broj jednostavnih i složenih zadataka, dok je jedino u zbirkama Matematika 4 plus (Kustura, Lugar i Obradović, 2018.) i Matematika 4 (Đurović, 1998.) primijećena dominacija složenih zadataka. U svim analiziranim zbirkama nedostaje zadataka u kojima se traži više točnih odgovora, odnosno, nije pronađen ni jedan takav primjer. Također, u svakoj analiziranoj zbirci najveći je udio tekstualnih zadataka, što ni ne iznenađuje, jer je za rješavanje problema najprije potrebno njegovo uspješno postavljanje prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik simbola. Sve analizirane zbirke, osim zbirke nastavnih listića Matematičkim stazama 4 (Paić, Manzoni, Marjanović i Kosak, 2014.) sadrže i rješenja danih zadataka, koja predstavljaju veliku pomoć učenicima jer im osiguravaju dobivanje povratne informacije o točnosti dobivenog rješenja.

Pri odabiru zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike, valja obratiti pozornost na njen sadržaj. S obzirom na to da je dodatna nastava namijenjena učenicima koji pokazuju pojačane sklonosti za matematičke sadržaje te su dodatno motivirani, sadržaji dodatne nastave trebaju im omogućiti zadovoljavanje tih interesa kroz zadatke različitih stupnjeva složenosti koji će im biti dovoljno izazovi. Pri tome, zbirke koje nude dodatne zadatke koje prate obvezni nastavni program možda neće biti dovoljno izazovne. One trebaju biti usklađene s odgovarajućim pristupima poučavanju rješavanja problema. Zadaci obuhvaćeni zbirkama za dodatnu nastavu traže pojačani umni napor pojedinca jer rješenje zadataka nije odmah vidljivo. Kao što rezultati istraživanja pokazuju, u zbirkama dominiraju složeni zadaci, a problemski se pristup u njima ostvaruje kroz njihovo rješavanje u više koraka te primjenu posebnih metoda rješavanja koje su ranije opisane u teorijskom dijelu.

Poznavanje teorije ne osigurava primjenu takvog načina poučavanja, ali je njeno poznavanje, uz metodičku osposobljenost i kompetentnost učitelja te bazom zadataka temelj za poučavanje učenika putem rješavanja problema.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu riječ je o metodama rješavanja problemskih zadataka koje su analizirane kroz primjenjivost u zadacima iz dostupnih zbirki za dodatnu nastavu matematike u 4. razrednu osnovne škole. Problemski zadaci često su dio dodatne nastave matematike, koju pohađaju učenici koji žele proširiti svoje znanje te koji su više motivirani. Takvi su zadaci specifični i traže veći misaoni angažman učenika i njegovo predznanje za uspješno rješavanje. S obzirom na to da sadržaji za dodatnu nastavu matematike nisu strogo zakonski propisani, već su dani na izbor učiteljima i učenicima, ne postoji obavezna literatura za njihovo pripremanje, kao ni za učenje i vježbu učenika, već eventualno preporučena. Prema tome, učitelji su slobodni samostalno odabrati hoće li koristiti neku od zbirki za dodatnu nastavu matematike. Prijedlog koraka rješavanja problemskih zadataka dao je Poyla, koji razlikuje četiri faze rješavanja problemskih zadataka, a to su razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršenje plana i osvrt. Za uspješno organiziranje problemske nastave učitelj mora poznavati više različitih pristupa određenom zadatku, odnosno specifične metode rješavanja. Navedeni su sadržaji obuhvaćeni dodatnom nastavom matematike jer zbog svoje složenosti zahtijevaju veće kognitivne sposobnosti učenika.

Analizom zbirki za dodatnu nastavu matematike utvrđeno je kako su neke od zbirki oblikovane kao nadopuna udžbeničkoj literaturi, sa zadacima koji doprinose obogaćivanju programa te složenijim zadacima, dok neke od njih prate nastavni program u cijelosti i sadrže zadatke koji služe dodatnom uvježbavanju tog istog sadržaja. Uočene su i zbirke oblikovane za pripremu učenika za određena matematička natjecanja, što autori i spominju u predgovoru istih. Analizirane zbirke se međusobno razlikuju broju zadataka, udjelu problemskih zadataka u njima i po načinu njihova oblikovanja. Većina njih oblikovana je tako da za određenu temu, koja nosi naziv jedne od metoda rješavanja problemskih zadataka, slijede zadaci za uvježbavanje iste. Prednost takvog načina oblikovanja zbirke je u preglednosti metoda i lakšoj dostupnosti zadataka jer ih nije potrebno tražiti po zbirci. U analizi literature za dodatnu nastavu matematike uočen je nedostatak metodičkih priručnika za učitelje, odnosno postoji samo jedan koji prati zbirku.

Pokazalo se kako u zbirkama dominiraju tekstualni zadaci, a od problemskih su najzastupljeniji zadaci u kojima se očekuje korištenje Descartesove metode, odnosno svođenje teksta zadatka na matematički jezik simbola i postavljanje jednadžbi. Prednost dominacije velikog broja tekstualnih zadataka je u njihovoj mogućnosti modifikacije kroz rješavanje putem neke od teorija koje su ranije opisane. Pri tome, najvažnija je uloga učitelja koji je upoznat s teorijom i sposoban je zadatak prilagoditi na način koji je prikazan u četvrtom poglavlju ovoga rada. Upravo su problemski zadaci oni koji omogućuju razvoj kritičkog mišljenja, povećavaju motivaciju učenika te doprinose razvoju viših kognitivnih procesa i kao takvi važan su dio u nastavi.

Pri odabiru zbirke zadataka za dodatnu nastavu matematike, valja obratiti pozornost na njen sadržaj. Odnosno, uvidjeti zastupljenost problemskih zadataka u njima, prepoznati mogućnost rješavanja istih putem neke od metoda rješavanja problemskih zadataka pri čemu je poželjno da njihov broj bude što veći.

LITERATURA

Boud D. i Feletti, G. (1997.) *The challenge of problem-based learning*. London and New York: Routledge Taylor and Francis Group.

Burušić, J. i Šakić Velić, M. (2019.) Određenje darovitosti i identifikacija STEM darovitih i talentiranih učenika. U: J. Burušić i V. Šeperac (ur.), *STEM daroviti i talentirani učenici: identifikacija, metode nastavnog rada i profesionalno usmjeravanje*. (str. 15-48) Zagreb: Alfa.

Cai, J. (2003.) *What research tells us about teaching mathematics through problem solving?* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Čudina-Obradović, M. (1990.) *Nadarenost, razumijevanje, prepoznavanje, razvijanje*. Zagreb: Školska knjiga.

Čuvidić, M. (2016.) E-matematika u razrednoj nastavi. *Poučak*, 64, 49-54.

Debelec, T. (2012.) Metode rješavanja logičkih zadataka. *Matematika i škola*, 66, 9-14.

Đurović, J. (1998.) *Matematika 4 – dodatna nastava iz matematike u četvrtom razredu osnovne škole*. Zagreb: Element.

Đurović, J. (1998.) *Matematika 4 – dodatna nastava iz matematike u četvrtom razredu osnovne škole, priručnik za učitelje*. Zagreb: Element.

Fan, L., Chen, J., Zhu, Y., Qiu, X. i Hu, J. (2004.) Textbook use within and beyond mathematics classrooms: A study of 12 secondary schools in Kunming and Fuzhou of China. U L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai i S. Li, *How Chinese learn mathematics: perspectives from inside*. 228-262.

Glasnović Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003-1024.

Glasnović Gracin, D. i Domović, V. (2009.) Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole. *Odgovorne znanosti*, 11, 45-65

Glasnović Gracin, D., Jaguš, T., Martinis, O. (2019.) Novi pristupi i metode u radu s darovitim učenicima u STEM području. U: J. Burušić i V. Šeperac (ur.), *STEM daroviti i talentirani učenici: identifikacija, metode nastavnog rada i profesionalno usmjeravanje*. (str. 51-155) Zagreb: Alfa.

Hmelo-Silver, C. (2004.) Problem-Based Learning: What and How do Students Learn? *Educational Psychology Review*, 16, 235-266.

Hosnan, M. (2014.) *Scientific and contextual approach in 21st century learning (in Bahasa)*. Bogor: Ghalia Indonesia.

Hung, W. (2013.) Problem-Based Learning: A Learning Environment for Enhancing Learning Transfer. *New Directions for Adult and Continuing Education*, 137, 27-38.

Huzjak, M. (2008.) *Učimo gledati 1-4, priručnik za nastavnike*. Zagreb: Školska knjiga.

Kadum, V. (2005.) Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike. *Metodički ogledi*, 12, 31-60.

Kos, D. i Glasnović, Gracin D. (2012.) Problematika tekstualnih zadataka. *Matematika i škola*, 66, 5-8.

Kubat, U. (2018.) The integration of STEM into science classes. *World Journal on Educational Technology: Current Issues*. 10(3), 165-173.

Kurnik Z. (2010.) *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*. Zagreb: Element.

Kurnik, Z. (2003.) Metoda uzastopnih približavanja. *Matematika i škola*, 19, 148-154.

Kurnik, Z. (2000.) Matematički zadatak. *Matematika i škola*. 7, 51-58.

Kurnik, Z. (2002.) Načelo problemnosti. *Matematika i škola*, 14, 148-152.

Kurnik, Z. (2002.) Problemska nastava. *Matematika i škola*, 15, 196-202.

Kurnik, Z. (2003.) Metoda razlikovanja slučajeva. *Matematika i škola*, 21, 4-10.

Kurnik, Z. (2007.) *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj 1992.-2006*. Zagreb: HMD

Kurnik, Z. (2008.) Metodička strana matematičkih natjecanja. *Matematika i škola*, 44, 148-151.

Kurnik, Z. (2010.) *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*. Zagreb: Element.

Kustura, Z., Lugar, I. i Obradović, B. (2018.) *Matematika 4 plus – zbirka za dodatnu nastavu matematike u osnovnoj školi*. Zagreb: Školska knjiga.

Kuzle, A. (2016.) Kroz suradnju od teorije do prakse: Razvoj kompetencija rješavanja problema na dodatnoj nastavi matematike. *Matematika i škola*, 87, 51-58.

Kuzle, A. (2016.) Problem solving ili rješavanje matematičkih problema. *Matematika i škola*, 86, 3-11.

Mayer, R., (1998.) Cognitive, metacognitive and motivational aspects of problem solving. *Instructional science*, 26, 49-63.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2006.) Nastavni plan i program za osnovnu i srednju školu. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf (preuzeto 23.12.2019.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2011.) Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (preuzeto: 22.12.2019.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2014.) Katalog obveznih udžbenika i pripadajućih dopunskih nastavnih sredstava za osnovnu školu, gimnazije i srednje strukovne škole od školske godine 2014./2015. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: <https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/enika-i-pripadajucih-dopunskih-nastavnih-sredstava-za-osnovnu-skolu-gimnazije-i-srednje-strukovne-skole-od-skolske-godine-2014-2015/1032> (preuzeto:1.5.2020.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2014.) Pravilnik o tjednim radnim obvezama učitelja i stručnih suradnika u osnovnoj školi. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: https://www.azoo.hr/images/pkssuor/pravilnik_o_normi.pdf (preuzeto: 16.1.2020.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2015.) Zakon o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi. Zagreb: MZOŠ. Preuzeto s: https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/1_Zakon_o_odgoju_i_obrazovanju_u_osnovnoj_i_srednjoj_skoli_87-08.pdf (preuzeto: 3.1.2020.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2018.) Zakon o udžbenicima i drugim odgojno obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2018_12_116_2288.html (preuzeto: 1.5.2020.)

Mišurac-Zorica, I. i Rožić, E. (2015.) Pripremljenost budućih učitelja razredne nastave za izvođenje dodatne nastave matematike. *Zbornik radova filozofskog fakulteta u Splitu*, 6-7, 27-41.

Mrkić, Z. (2009.) *Turbomatika*. Zagreb: Alfa.

Mrkonjić, I., Salamon Padjen, Đ. (2015.) *Školarci su zakon 4, 1. dio*. Zagreb: Alka Script.

Mrkonjić, I., Salamon Padjen, Đ. (2015.) *Školarci su zakon 4, 2. dio*. Zagreb: Alka Script.

Mrkonjić, I., Salamon, Đ. (2007.) *Vlatka i matka 4*. Zagreb: Alfa Script.

MZOŠ (2006.) HNOS. Nastavni plan i program za osnovnu školu. Zagreb: MZOŠ. Dostupno na: https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf (preuzeto: 20.12.2019.)

Nacionalni kurikulum međupredmetne teme Učiti kako učiti – prijedlog (2016), Zagreb: Cjelovita kurikularna reforma. Dostupno na: <http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/02/UCITI-KAKO-UCITI-FINAL-18.2.pdf> (preuzeto: 20.12.2019.)

Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta matematika – prijedlog (2016), Zagreb: Cjelovita kurikularna reforma. Dostupno na: http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf (preuzeto 20.12.2019.)

Nurdan Baysal, Z. (2017.) The problem-based learning process: Reflections of pre-service elementary school teachers. *Academic Journals*, 12(4), 177-188.

- Ovčar, S. (1990.) *Razvijanje mišljenja u nastavi matematike*. Čakovec: TIZ Zrinski.
- Paić, G., Manzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N. (2014.) *Matematičkim stazama 4 – listići za dodatnu nastavu iz matematike u četvrtom razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
- Parish, L. (2014.) *Defining Mathematical Giftedness*. Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572635.pdf> (preuzeto 22.12.2019.)
- Pavleković, M. (1999.) *Metodika nastave matematike s informatikom*. Zagreb: Element.
- Pavleković, M. (2009.) *Matematika i nadareni učenici – Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Zagreb: Element, 2009.
- Poljak, V. (1980.) *Didaktičko oblikovanje udžbenika i priručnika*. Zagreb: Školska knjiga.
- Poyla, G., (1966.) *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
- Schindler, M. i Rott, B. (2016.) *Networking Theories on Giftedness – What We Can Learn from Synthesizing Renzulli's Domain General and Krutetskii's Mathematics-Specific Theory*. Dostupno na: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1135068.pdf> (preuzeto: 4.3.2020.)
- Schoenfield, A. H., (1985.) *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Stojaković, O. (2005.) Problemska nastava. *Obrazovna tehnologija*, 3-4, 72.-89.
- Sullivan, P., Clarke, B. i Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York (NY): Springer.
- Szabo, A. (2016.) *Mathematical problem-solving by high-achieving students: Interaction of mathematical abilities and the role of mathematical memory*. Dostupno na: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287316> (preuzeto 29.12.2019.)
- Tot, D., (2010.) Učeničke kompetencije i suvremena nastava. *Odgojne znanosti*, 12(1), 65-78.
- Varošanec, S. (2003.) Neke metode rješavanja problemskih zadataka. *Poučak*, 13, 32-38.

Varošanec, S. (2014.) Metoda rješavanja unatrag. *Matematika i škola*, 77, 52-54.

Vidić, T. (2016.) Stavovi učenika osnovne škole prema matematici. *Napredak*, 157 (1-2), 11-32.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., Hadway, N. (1993.) *Mathematical problem solving*, u P.S. Wilson (ur.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, (pp. 57-77) New York, NY: Macmillan.

Izjava o samostalnoj izradi rada

Izjavljujem da sam ja, Katarina Širanović, rođena u Zagrebu, studentica 5. godine Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, ovaj rad izradila samostalno uz savjetovanje s mentoricom i korištenjem navedene literature.

Potpis pristupnika
