

Poučavanje geometrije prostora u razrednoj nastavi

Džaja, Lorena

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:070488>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-14**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

Lorena Džaja

**POUČAVANJE GEOMETRIJE PROSTORA U RAZREDNOJ
NASTAVI**

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2021.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

Lorena Džaja

**POUČAVANJE GEOMETRIJE PROSTORA U RAZREDNOJ
NASTAVI**

Diplomski rad

Mentor rada:

izv. prof. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Zagreb, rujan, 2021.

SAŽETAK

Ljudi su oduvijek proučavali i percipirali trodimenzionalni prostor u kojem su svakodnevno obitavali, kao i objekte koji su se u tom prostoru nalazili te odnose među njima. Nastava geometrije prostora omogućuje razvoj prostornog zora i prostornog mišljenja koji su sastavni dio matematičke kompetencije. Stoga je važna uključenost geometrije prostora u matematičkom kurikulumu i njeno poučavanje u čitavoj obrazovnoj vertikali pa tako i u razrednoj nastavi. Ovaj rad bavi se razmatranjem i usustavljanjem teorijskih i praktičnih spoznaja iz literature, povezanih s metodikom nastave geometrije prostora. Donosi se pregled teorija o razvoju geometrijskog mišljenja kod učenika razredne nastave te spoznaja o odabiru i organizaciji sadržaja geometrije prostora primjerenih razini mišljenja na kojoj se učenici nalaze. U sklopu rada analizirani su i hrvatski kurikularni dokumenti, kurikulumi zemalja Slovenije, Njemačke i Škotske, kao i TIMSS-ov kurikulum i istraživanje, s naglaskom na geometriju prostora.

Pri organizaciji i poučavanju sadržaja geometrije prostora u obzir bi trebalo uzeti kognitivni razvoj i individualne mogućnosti učenika pojedine dobi. Funkcionalna bi nastava geometrije prostora trebala težiti razvoju prostornog zora i mišljenja te osigurati odabir odgovarajućih sadržaja i provedbu onih aktivnosti u nastavi koje će spomenut razvoj i omogućiti. Rezultati analize hrvatskih kurikularnih dokumenata pokazuju manjak sadržaja geometrije prostora u razrednoj nastavi općenito, a posebice onih usmjerenih na razvoj prostornog zora i mišljenja. S druge strane, rezultati analize stranih kurikuluma pokazuju kontinuitet u poučavanju geometrije prostora, kao i implementaciju fundamentalnih ideja. Istraživanje TIMSS-a pokazalo je da učenici četvrtih razreda u Republici Hrvatskoj nailaze na poteškoće prilikom rješavanja zadataka geometrije prostora kojima se ispituje prostorni zor. Stoga je u ovom radu na temelju teorijskih i praktičnih spoznaja iz literature dan prijedlog kurikuluma geometrije prostora za razrednu nastavu te prijedlog aktivnosti i zadataka koji bi trebali omogućiti ostvarenje ishoda kurikuluma.

Ključne riječi: prostorni zor, geometrija prostora, kurikulum, analiza

SUMMARY

Throughout history mankind has been studying and perceiving the three-dimensional space in which they live, as well as the objects that were placed there and the relations between them. Efforts in teaching spatial geometry enable the development of spatial ability and spatial thinking, both of which are an integral part of mathematical competence. Therefore, it is important to include spatial geometry in the mathematics curriculum and to teach it through the entire educational vertical, as well as in primary education. This paper analyzes the current literature related to the methodology of teaching spatial geometry in an effort to construct consideration and systematization of theoretical and practical knowledge on the topic. It gives a theoretical overview on the development of the geometric thinking of students in primary education and the knowledge on the selection and organization of the contents of spatial geometry adequate to the level of thinking that students possess. Additionally, the paper analyzes Croatian curricular documents and curricula from the countries of Slovenia, Germany and Scotland. Furthermore, an examination of the TIMSS-curriculum and research is conducted.

When organizing and teaching the content of spatial geometry, the cognitive development and individual abilities of students of a certain age should be considered. Functional teaching of spatial geometry should strive for the development of spatial ability and reasoning, as well as ensure the selection of appropriate contents and the implementation of the activities that will enable said development. The results of the analysis of Croatian curricular documents show an overall lack of contents in spatial geometry in primary education, especially of those contents which are aimed at the development of spatial ability and reasoning. The results of the analysis of foreign curricula on the other hand show an existing continuity of teaching spatial geometry, as well as the implementation of the fundamental ideas. The research of TIMSS revealed that fourth grade students in the Republic of Croatia encounter difficulties in solving spatial geometry tasks that examine spatial vision. Therefore, based on theoretical and practical knowledge from current literature, this paper gives a proposal of the curriculum of spatial geometry for primary education and also a suggestion of activities and tasks that should enable the realization of the curriculum goals.

Keywords: spatial ability, spatial geometry, curriculum, analysis

SADRŽAJ

| | |
|---|----|
| 1. UVOD..... | 1 |
| 2. GEOMETRIJA PROSTORA..... | 3 |
| 2.1. Povijesni pregled razvoja geometrije prostora | 3 |
| 2.1.1. Stari istok – kolijevka geometrije prostora | 3 |
| 2.1.2. Starogrčko razdoblje i Euklidovi Elementi | 4 |
| 2.1.3. Geometrija prostora na Bliskom i Dalekom istoku | 7 |
| 2.1.4. Geometrija prostora od Novog vijeka do danas | 8 |
| 2.2. Podvrste geometrije prostora | 11 |
| 3. METODIKA NASTAVE GEOMETRIJE PROSTORA | 13 |
| 3.1. Geometrijsko mišljenje..... | 14 |
| 3.1.1. Piaget i intelektualni razvoj..... | 15 |
| 3.1.2. Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja | 16 |
| 3.2. Smjernice za organizaciju i poučavanje sadržaja geometrije prostora | 18 |
| 3.2.1. ICMI studija i Wittmannove fundamentalne ideje | 18 |
| 3.2.2. Meranski nastavni plan i genetička nastava Felixa Kleina | 19 |
| 3.2.3. Aktivnosti i zadatci u geometriji prostora | 20 |
| 4. ANALIZA KURIKULUMA | 30 |
| 4.1. Geometrija prostora u hrvatskim dokumentima | 30 |
| 4.1.1. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije | 30 |
| 4.1.2. Nastavni plan i program za osnovnu školu | 32 |
| 4.1.3. Nacionalni okvirni kurikulum | 33 |
| 4.2. Geometrija prostora u TIMSS-ovom kurikulumu i istraživanju | 34 |
| 4.2.1. Primjeri i zastupljenost zadataka geometrije prostora u istraživanju | 37 |
| 4.2.2. Uspjeh učenika u rješavanju zadataka geometrije prostora..... | 45 |
| 4.3. Geometrija prostora u kurikulumima drugih zemalja..... | 47 |
| 4.3.1. Slovenija..... | 48 |
| 4.3.2. Njemačka..... | 49 |
| 4.3.3. Škotska | 52 |
| 4.4. Usporedba kurikuluma | 54 |
| 5. PRIJEDLOG KURIKULUMA I AKTIVNOSTI ZA GEOMETRIJU PROSTORA | 57 |
| 5.1. Prijedlog kurikuluma geometrije prostora za razrednu nastavu | 57 |
| 5.1.1. Prvi razred | 58 |
| 5.1.2. Drugi razred..... | 60 |

| | |
|--|----|
| 5.1.3. Treći razred | 61 |
| 5.1.4. Četvrti razred..... | 62 |
| 5.2. Prijedlog radnih aktivnosti za geometriju prostora..... | 64 |
| 6. ZAKLJUČAK | 73 |
| 7. LITERATURA | 75 |
| PRILOZI I DODATCI | 79 |
| IZJAVA O IZVORNOSTI DIPLOMSKOG RADA | 90 |

1. UVOD

Živimo u trodimenzionalnom svijetu u kojem nas okružuju različiti prostorni oblici. Svakodnevni život podrazumijeva interakciju pojedinca s tim istim prostorom i objektima koji se u njemu nalaze. Mnogi poslovi i radnje koje smatramo uobičajenima, poput parkiranja automobila, iziskuju ispravnu vizualizaciju i realizaciju u prostoru. Ljudi su od davnina bili skloni matematiziranju stvarnosti, što se odnosi i na razmatranje geometrijskih problema iz okoline te njihovo rješavanje.

Kako je izgledao put geometrije do njenog postanka stvarnom matematičkom disciplinom? Koje područje geometrije proučava trodimenzionalni prostor i ono što on obuhvaća? Jesmo li svjesni uloge vizualizacije i prostornog zora u našoj svakodnevici i jesu li oni prepoznati u hrvatskom matematičkom obrazovanju? Možemo li na njihov razvoj, te razvoj geometrijskog načina razmišljanja općenito, utjecati već u sklopu razredne nastave? Ako da, koje sadržaje, metode i očekivanja trebaju obuhvaćati kurikulumi geometrije prostora usmjereni na razvoj prethodno spomenutih sposobnosti? Ovim se radom pokušalo, barem djelomično, dati odgovore na navedena pitanja. U njemu je na temelju praktičnih i teorijskih spoznaja te analize nekih trenutno važećih kurikuluma predstavljena ideja o kurikulumu geometrije prostora u razrednoj nastavi i aktivnostima koje bi trebale omogućiti ostvarenje njegovih ishoda. U tom kontekstu, rad bi trebao pružiti doprinos u poučavanju geometrije prostora u razrednoj nastavi.

Drugo poglavlje ovog rada donosi pregled povijesnih otkrića, osoba i zanimljivosti vezanih uz pojavu i razvoj geometrije prostora od vremena prvih civilizacija pa sve do danas. Na mnogim otkrićima spomenutim u poglavlju zasniva se i nastava geometrije kakvu danas poznajemo. U poglavlju je dan i prikaz područja matematike koje se bavi trodimenzionalnim prostorom i njegovim podskupovima, a prisutne su i definicije određenih pojmova usko vezanih uz geometriju i prostor.

Treće poglavlje pojašnjava što geometrija početne nastave matematike podrazumijeva te ukazuje na problematiku s kojom se metodika geometrije prostora susreće. Javljaju se pojmovi prostornog mišljenja i prostornog zora te razmatraju smjernice pristupa geometriji prostora u nastavi kojom bi se osigurao razvoj istih.

Četvrto poglavlje obuhvaća analizu geometrije prostora unutar *Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije iz 2019.*, TIMSS-ovog kurikuluma i ispitivanja te kurikuluma pojedinih europskih zemalja. U poglavlju je dana usporedba sadržaja geometrije prostora hrvatskog nacionalnog kurikuluma s prethodno važećim dokumentima, kao

što su *Nastavni plan i program* iz 2006. godine te *Nacionalni okvirni kurikulum* iz 2011. godine. Na kraju poglavlja provedena je i usporedba koncepata geometrije prostora spomenutih dokumenata.

Peto poglavlje sadrži prijedlog kurikuluma geometrije prostora za razrednu nastavu. U poglavlju je dan i prijedlog aktivnosti i radnih listića koji obuhvaćaju sadržaje geometrije prostora i za cilj imaju omogućiti doseganje ishoda navedenih u prijedlogu kurikuluma.

2. GEOMETRIJA PROSTORA

Čovjeka posvuda okružuju različite prostorne forme. Geometrijski oblici, poliedri i rotacijska tijela tek su apstraktni pojmovi koji se oblikuju u našoj svijesti. Od davnina je čovjek proučavao svojstva geometrijskih oblika, prvenstveno s ciljem da ih iskoristi za vlastite praktične potrebe. Crtežima i slikama po kamenju, stijenama i predmetima za svakodnevnu uporabu ljudi su nastojali što vjerodostojnije prikazati prirodan oblik onoga što ih je okruživalo. Upravo je ta praksa pripremila put geometriji kao znanosti, što je ona postala između 7. i 4. stoljeća prije Krista na prostoru stare Grčke (Gleizer, 2003).

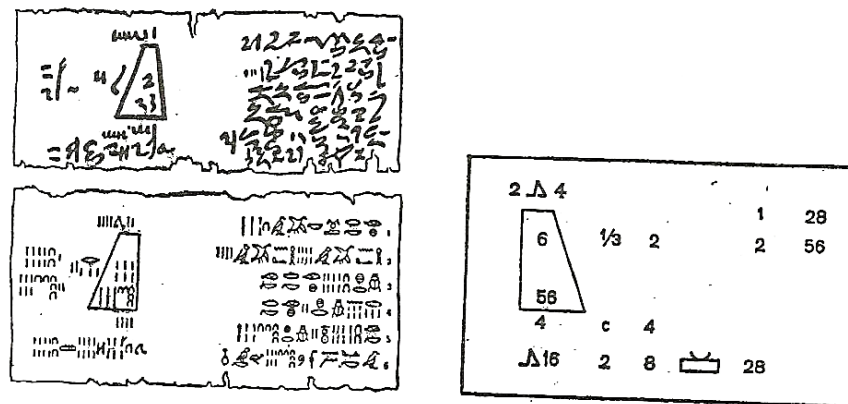
2.1. Povijesni pregled razvoja geometrije prostora

Pojava prvih geometrijskih pojmova datira još iz pretpovijesnog doba, kada su čovjeku praktičan rad i rješavanje problema iz svakodnevnog života služili kao osnova u dugotrajnome procesu kreiranja apstraktnih pojmova i otkrivanja uzročno-posljedičnih veza (Gleizer, 2003). Geometrijski oblici prisutni u raznim crtežima sačuvanim u pećinama, građevine u obliku stošca, valjka i paralelepipeda te jednakost, simetrija i sličnost likova, prepoznatljivi na ornamentima neolitičkih posuda, svjedoče o tome da su već u to doba geometrijska znanja i predodžbe bili dobro razvijeni. Znanja su bila konkretna te proizlazila iz iskustava (Dadić, 1992). Također, to što je već prapovijesni čovjek naučio mjeriti i računati bila je dobra podloga daljnjem razvitku matematike (Dadić, 1992).

2.1.1. Stari istok – kolijevka geometrije prostora

Geometrijska tijela kao što su kocka, kvadar ili prizma, spominju se na spomenicima babilonske i staroegipatske arhitekture. Gradnja kuća, dvoraca, hramova i drugih građevina na tim područjima iziskivala je određivanje obujma različitih prostornih oblika. Egipat je bio smatran kolijevkom geometrije. Gotovo svi zadatci sačuvanih egipatskih papirusa tiču se izračunavanja duljina, površina i volumena, no u svim tim zadacima korištena su približna računanja (Gleizer, 2003). Matematičari Staroga istoka određivali su i obujme različitih predmeta oblika prizme, piramide, valjka, stošca te krnje piramide i stošca. Ni u jednom rješenju nije bilo apstrakcije, a pojmovi su bili vezani isključivo uz konkretne predodžbe (Dadić, 1992). Prilikom rješavanja služili su se pravilima do kojih su dolazili praktičnim putem. Među najzanimljivijim zadacima starog Egipta 14. je zadatak *Moskovskog papirusa*, starog oko 4000

godina. To je najvjerojatnije i prvi zadatak u povijesti u kojem je računat obujam krnje piramide. Uz zadatak je pronađen i pripadajući crtež prikazan na slici 1 (Gleizer, 2003).



Slika 1. Iz Moskovskog papirusa (Gleizer, 2003, str. 276)

Najstariji primjer izračunavanja površine zakrivljene plohe pripisuje se desetom zadatku Moskovskoga papirusa. Ne zna se sa sigurnošću o kakvoj je plohi bila riječ, ali najvjerojatnijom pretpostavkom smatra se ta da je riječ o kupolastom spremištu za žito (Gleizer, 2003).

Na prostorima prvih civilizacija skupljena su mnoga matematička znanja, pronađeni postupci rješavanja i ponekih zahtjevnijih zadataka te opisani mnogi likovi i tijela. Ta su znanja bila temelj daljnjem razvitku matematike u starogrčkom razdoblju (Dadić, 1992).

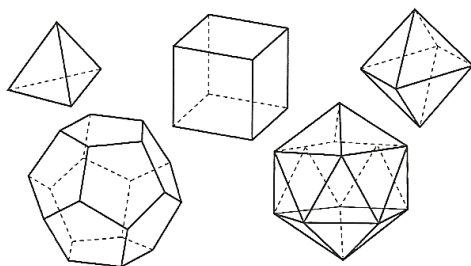
2.1.2. Starogrčko razdoblje i Euklidovi Elementi

Dostignućem visokog stupnja društvenog i kulturnog razvoja grčkih država, otprilike u 5. i 6. stoljeću prije Krista, počela je i nova etapa razvoja geometrije. Već u 5. stoljeću prije Krista pojavila su se djela sa sustavno izloženom geometrijom. Vitruvijevo djelo *Deset knjiga o arhitekturi* progovara o činjenici da su se elementima perspektive s ciljem izgradnje kazališnih dekoracija još u 5. stoljeću prije Krista služili Agafarh, Demokrit i Anaksagora (Gleizer, 2003). Na razrađivanje teorije obujma uvelike su utjecali Demokrit i Eudokso (Gleizer, 2003). Demokrit je uspio riješiti brojne geometrijske probleme (Dadić, 1992), npr. prvi je pronašao formulu za izračun obujma bilo koje piramide te istim metodama otkrio i obujam stošca. Eudokso se svojim radovima istaknuo u 4. stoljeću prije Krista, kada je prvi detaljno i precizno uspio dokazati formulu obujma piramide (Gleizer, 2003). Sve do Eudoksa geometrija se vezivala uz aritmetiku, a za njihovo konkretno odvajanje zaslužan je Aristotel (Dadić, 1992). Krajem 5. stoljeća prije Krista, na osnovi Hipokratovih dokaza, razrađena je gotovo cijela planimetrija te dio stereometrije (Gleizer, 2003).

Većina djela antičkog razdoblja ipak je *zasjenjena* Euklidovim *Elementima*. Najveća povijesna zasluga Euklidu se pripisuje jer je u *Elementima* uspio objediniti i usustaviti sve rezultate svojih prethodnika (Gleizer, 2003). „Svojom knjigom *Elementi*, Euklid je otvorio prozor kroz koji se ukazala priroda našeg svijeta“ (Mlodinow, 2007, str. 10). Njegovo remek-djelo preživjelo je stoljeća te postalo i najdugovječnijim udžbenikom na svijetu prema kojem se geometrija poučavala sve do 20. stoljeća (Stedall, 2014). I Gleizer naglašava činjenicu da se geometrija „tijekom dvaju tisućljeća proučavala u onoj količini, onim redom i metodama kako je bila izložena u Euklidovim *Elementima*“ (Gleizer, 2003, str. 218). „Euklidovi su *Elementi* knjiga koja je nakon Biblije doživjela najviše izdanja“ (Gusić, 1995, str. 53). Djelo je intelektualno *oživjelo* srednji vijek, nakon izuma tiskarskog stroja bilo je jedno od prvih tiskanih djela, a od 1533. godine pa sve do 18. stoljeća bilo je jedino grčko djelo koje je na izvorniku postojalo u tiskanom obliku. Postalo je temeljem logičkog mišljenja na području obrazovanja (Mlodinow, 2007).

Cijela je Euklidova geometrija bila povezana s prostornom intuicijom. Prilikom određivanja površine ili obujma, geometrijske je objekte samo uspoređivao ne pridajući im brođane vrijednosti (Dadić, 1992). Njegovi dokazi proizlazili su isključivo iz logičkog razmišljanja (Gleizer, 2003). O želji i trudu za približavanjem Euklidove geometrije prosječnomu čovjeku svjedoči djelo *The Pathway to Knowledge*, izdano 1551. godine u Engleskoj, autora Roberta Recordea. On se, prilikom objašnjavanja geometrije, služio jednostavnim vokabularom te primjerima i pomoćnim crtežima (Stedall, 2014).

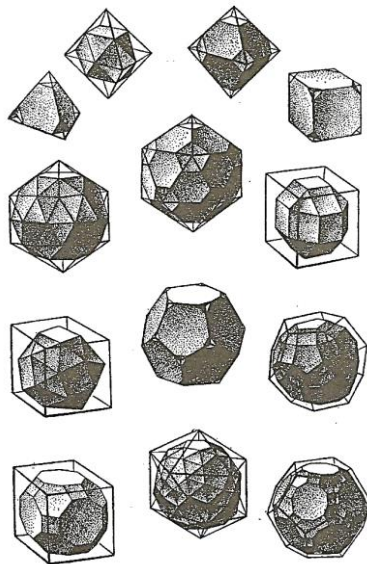
Dio knjiga *Elemenata*, od njih ukupno 13, posvećen je stereometriji, a posljednje se tri njome bave gotovo u potpunosti (Gleizer, 2003). Definicije geometrijskih pojmova, kojima je iz iskustvene pojavnosti doživao matematičko znanje, Euklid je postavio na početku prve knjige (Dadić, 1992). „Prva definicija XI. knjige Euklidovih *Elemenata* glasi: Tijelo je ono što ima duljinu, širinu i dubinu“ (Gleizer, 2003, str. 264). U istoj knjizi definirao je prizmu, kao prostornu figuru omeđenu s dvije usporedne ravnine i s pobočkama – paralelogramima, te valjak, polazeći od rotacije pravokutnika oko jedne njegove stranice. Po prvi put spomenuo je i pojam paralelepipeda (tijela s paralelnim bočnim stranama), dok je kugli i njenoj plohi posvetio minimalnu pozornost. Poliedar je Euklid smatrao dijelom prostora omeđenog ravninama, a u posljednjoj knjizi *Elemenata* nailazimo i na njegovo učenje o pravilnim poliedrima. U njoj je ustvrdio postojanje spomenutih poliedara te pokazao na koji ih je način moguće upisati u sferu. U pravilne konveksne poliedre ubrojeni su tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar, koji su prikazani na slici 2.



Slika 2. Pravilni konveksni poliedri (Gleizer, 2003, str. 277)

Zasluge za konstruiranje pet pravilnih poliedara povjesničar Proklo pripisao je Pitagori. Pravilni poliedri još su nazivani i kozmičkim figurama, idealnim figurama te Platonovim tijelima, a nazivi su proizašli iz antičke filozofije o četirima elementima prirode – zemlji, vodi, zraku i vjetru, čijim je atomima Platon pridavao formu tetraedra, heksaedra (kocke), oktaedra i ikozaedra. Cijelom svijetu je pak pridavao formu dodekaedra (Gleizer, 2003). Kod tijela je promatrao isključivo plohe. Vjerovao je i kako nebeske sfere nisu bilo kako postavljene, nego imaju svoju geometrijsku harmoniju (Dadić, 1992).

Polupravilne poliedre otkrio je Arhimed pa ih se po njemu i naziva Arhimedovim tijelima, a prikazani su na slici 3.



Slika 3. Polupravilni poliedri ili Arhimedova tijela (Gleizer, 2003, str. 279)

U svome djelu *O konoidima i sferoidima* Arhimed je izračunao obujme odsječaka paraboloida, hiperboloida i rotacijskog elipsoida. Zaslužan je i za pronalazak površine plašta valjka i stošca te formula za oplošje i obujam kugle. Iste je dokazao u svojoj raspravi *O kugli i valjku*. Uz Euklida i Arhimeda, za geometriju prostora vezano je ime još jednog antičkog

matematičara, geometra Apolonija iz Perge, poznatog po uvođenju pojma stožaste plohe u svome djelu *Presjeci stošca* te po radovima o presjecima stošca u osam knjiga (Gleizer, 2003).

Svojevrsnom enciklopedijom starogrčke praktične geometrije smatraju se i Heronova djela (Gleizer, 2003). On je djelovao početkom prvog stoljeća te napisao veći broj djela, među kojima se istaknula *Metrika* (Dadić, 1992). U tom djelu nalaze se pravila za točno i približno izračunavanje površina i obujama. Njegovu Geometriju kao priručnik su koristili grčki i rimski arhitekti, a utjecaj djela osjećao se i u europskim zemljama u periodu srednjeg vijeka pa sve do renesanse.

Veliku ulogu u razvoju matematičkih metoda odigrao je treći klasični zadatak starogrčkih matematičara, takozvana *duplikacija kocke*, poznatiji kao *delski problem*. Legenda vezana uz zadatak govori o tome kako se u Egejskom moru na otoku Delosu proširila epidemija kuge. Prorok je stanovnicima otoka savjetovao da udvostruče žrtvenik Apolonovog hrama kako bi se spasili. Žrtvenik je imao oblik kocke. Stanovnici su izgradili novi žrtvenik, brida većeg dva puta u odnosu na brid starog te tako povećali obujam osam puta umjesto dva. Kuga se nakon tog događaja još više proširila. Vjerovali su da je bog na taj način Grke htio ukoriti jer nisu dovoljno razmišljali o matematici niti cijenili geometriju (Gleizer, 2003).

2.1.3. Geometrija prostora na Bliskom i Dalekom istoku

Geometrija prostora se, uz prostor starogrčke civilizacije, paralelno razvijala i na drugom dijelu Zemaljske kugle. Tako su još u vrijeme 2. stoljeća prije Krista kineski znanstvenici poznavali velik broj praktičnih metoda za računanje površina i obujmova. U petoj se knjizi njihovog poznatog traktata *Matematika u devet knjiga* nalaze zadatci za izračunavanje obujma zidova bedema, tvrđava, nasipa i ostalih građevina. Uz njih je usko vezano računanje obujama geometrijskih tijela paralelepipeda, piramida, krnjih piramida te valjaka, a iz ostalih knjiga vidljivo je da su Kinezi poznavali i računanje obujma stošca, kugle i drugih geometrijskih tijela (Gleizer, 2003).

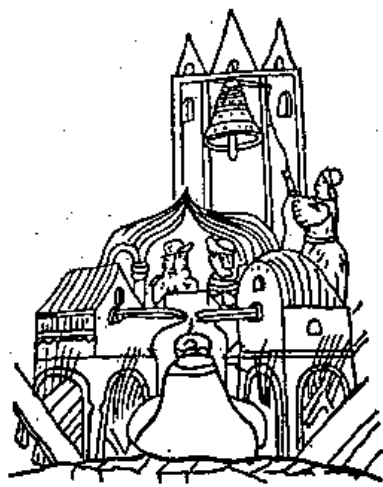
Za prijevod brojnih djela mnogih istaknutih matematičara, poput Euklida i Arhimeda, s grčkog jezika na arapski, zaslužni su matematičari prostora Bliskog i Srednjeg istoka iz 8. i 9. stoljeća. Ista djela i sami su proučavali, komentirali ih i tako ostvarivali daljnji razvoj geometrije te svojim radovima utjecali na matematičare 18. i 19. stoljeća.

Nakon Apolonijevog uvođenja pojma stožaste plohe i djela o presjecima stošca nisu se pojavljivala veća geometrijska otkrića. Tek su geografska otkrića u 15. i 16. stoljeću potaknula razvoj novih matematičkih ideja zbog praktičnih potreba (Gleizer, 2003).

2.1.4. Geometrija prostora od Novog vijeka do danas

U svome djelu *Nova stereometria doliorum vinariorum*, objavljenome 1615. godine, Kepler je riješio težak problem određivanja obujma vinske bačve promatranjem obujma kao zbroja nedjeljivih dijelova. Primjenu nedjeljivih dijelova učinio je Bonaventura Cavalieri, koji je uspoređivanjem nedjeljivih dijelova dvaju tijela došao do tvrdnje po njemu nazvane Cavalierijevim poučkom (Dadić, 1992). On glasi: „Ako dva tijela imaju jednake visine, i ako su usporedni presjeci s osnovicama i u jednakim udaljenostima od njih uvijek u zadanom omjeru, tada su obujmi tijela također u tom omjeru“ (Dadić, 1992, str. 104). Iz poučka slijedi i Cavalierijev poučak o jednakosti volumena (Dadić, 1992). Između ostalog, Cavalieri je uveo i općenit pojam valjkaste plohe (Gleizer, 2003).

Uz geometriju prostora veže se još jedna grana geometrije, a to je projektivna geometrija. Nadalje, povijest razvoja projektivne geometrije usko je vezana uz razvoj shvaćanja perspektive. Točnu geometrijsku interpretaciju pravila i metoda crtanja prostornih likova, uz ostvarivanje perspektive, sustavno su razrađivali umjetnici, kipari i arhitekti renesansnoga doba. Dotad se na crtežima mogao uočiti izostanak perspektive, što se moglo vidjeti i na primjerima ruskih minijatura tehničke tematike, od kojih je jedna prikazana na slici 4.

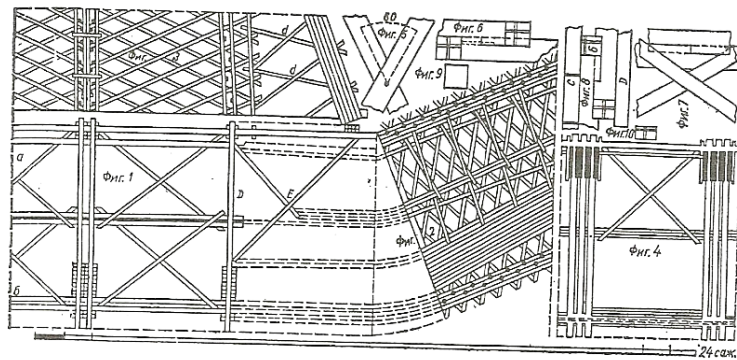


Slika 4. Minijatura s početka 15. stoljeća (Gleizer, 2003, str. 240)

Temelji projektivne geometrije postavljeni su u 17. stoljeću u radovima francuskih matematičara Désarguesa i Pascala, a Désarguesa se smatra i ocem projektivne geometrije jer je prvi razradio osnove matematičke teorije perspektive 1630. godine (Gleizer, 2003).

Pojam trodimenzionalnog prostora kakav danas poznajemo formiran je u 18. stoljeću. Metode vjernog predočavanja prostornih figura na ravninskom crtežu, razrađene u 18. i 19. stoljeću, utkale su temelje nacrtnoj geometriji. Povećanim zahtjevima tehnike, vojske,

slikarstva, arhitekture i industrije uzrokovan je i njen nastanak kao samostalne matematičke grane. Upotpunio ju je francuski matematičar Monge, koji je u svome radu *Nacrtna geometrija*, objavljenom 1789. godine, dao osnove projektivnog crtanja te razradio metodu ortogonalne projekcije tijela na dvije međusobno okomite ravnine, poznatiju kao *Mongeova metoda* (Gleizer, 2003). Postavio je dvije ravnine pod pravim kutom, jedna od njih bila je vertikalna, a druga horizontalna, te projicirao bridove i vrhove tijela ortogonalno na njih. Zatim je vertikalnu ravninu rotirao oko presjeka ravnina sve dok se nije poklopila s horizontalnom te dobio slike trodimenzionalnog tijela u dvodimenzionalnoj ravnini (Dadić, 1992). Primjena ortogonalne projekcije uočena je na brojnim crtežima iz 18. stoljeća, što je vidljivo i na primjeru slike 5.



Slika 5. Crtež drvenog mosta izgrađenog 70-ih godina 18. stoljeća. (Gleizer, 2003, str. 240)

Nedostatkom njegove metode smatra se manjak zornosti (Gleizer, 2003). Ipak, zbog projektivne i nacrtna geometrije kakve je stvarao, proizašlo je uvjerenje da se projektivna geometrija može shvaćati kao samostalna i neovisna o analitičkoj interpretaciji, što je poljuljalo gotovo dvostoljetno uvjerenje da je sve geometrijske probleme pogodnije promatrati analitički. Jean Victor Poncelet, potaknut idejom sintetičke metode, izgradio je sintetičku geometriju kojoj su temelj projektivna svojstva (Dadić, 1992). 1822. godine objavio je Svoje djelo *Rasprave o projektivnim svojstvima likova*, koje je označilo pojavu projektivne geometrije kao samostalne matematičke discipline, objavio je 1822. godine.

Pojam zakrivljenosti na plohe je prvi primijenio Euler. Najveći dio njegovih radova posvećen je upravo geometriji i njenim različitim primjenama. U svome je djelu *O presjecima ploha ravninama* u trećem poglavlju izložio teoriju ravninskih presjeka kružnog valjka i stošca (Gleizer, 2003).

O implementaciji geometrije prostora u obrazovnom sustavu svjedoče zapisi s početka 19. stoljeća, u kojima se spominje kurikulum akademije Greenrow, osnovane 1780. u gradu Silloth u Engleskoj, koji je, među ostalim predmetima, uključivao i sfernu geometriju (Stedall,

2014). Novu, neeuclidsku geometriju u 19. stoljeću utemeljio je ruski matematičar Lobačevski, čime je započeto i novo razdoblje njenog razvoja (Gleizer, 2003). Uz njega se zasluge za pronalazak neeuclidске geometrije pripisuju i drugim matematičarima, poput Janosa Bolyaia i Bernharda Riemanna (Dadić, 1992). U udžbeniku *Geometrija*, napisanom 1823. godine, Lobačevski je iznio ideju o tome kako planimetriju i stereometriju treba nastojati poučavati paralelno. Ta metoda naziva se fuzionizam i do danas nije izgubila na značaju. Otkrićem nove geometrije pojedine logičke osnove Euklidovih *Elementata* dovedene su u pitanje te podvrgnute kritici. Geometrija se pokušavala izgraditi na nov, deduktivan način, a ono što je nedostajalo Euklidovim aksiomima bilo je to što nisu bili dostatni za strogu logičku izgradnju geometrije. Euklid se prilikom dokazivanja poučaka oslanjao na intuiciju te očitost pojedinih tvrdnji i vizualne spoznaje, a zornoj predodžbi davao je prednost naspram logike. No, u primjeni je primarno i dalje najveći utjecaj imala njegova geometrija jer rad Lobačevskog nije naišao na priznanje od strane njegovih suvremenika. Njegove ideje prihvaćene su tek 70-ih godina 19. stoljeća nakon spoznaje o Gaussovom poimanju neeuclidске geometrije kao logički potpuno ispravne (Gleizer, 2003).

Godine 1889. Peano, a potom deset godina kasnije i Hilbert, u potpunosti su formalizirali aritmetiku i geometriju te ih odvojili od bilo kakve intuicije (Dadić, 1992). Hilbert je u svome djelu *Osnove geometrije* dao potpunu aksiomatiku geometrije. „Aksiomi su pretpostavke prihvaćene bez dokaza, s ciljem otkrivanja svojstava osnovnih pojmova. Oni daju osnovu za izgradnju svake strogo deduktivne znanosti“ (Gleizer, 2003, str. 228). Naime, postavio je svoj matematički pravac formalizam u kojem su definicije pojedinih pojmova smatrane samo dogovorom, a važnost se pridavala logičkim formama.

U drugoj polovici 19. stoljeća napredak su doživjela mnoga područja geometrije, posebice projektivne, dok se u 20. stoljeću razvila apstraktna matematika (Dadić, 1992). Kao nova samostalna geometrijska disciplina počela se formirati topologija, u čijem je nastanku važnu etapu odigralo stvaranje pojma višedimenzionalnog prostora (Gleizer, 2003).

Dug je put geometrija prošla do svoje pretvorbe u deduktivnu znanost, kakvom ju je Euklid izložio u svojim *Elementima*. Složen je bio i njen daljnji razvoj. Otkriće geometrije Lobačevskog potaknulo je stvaranje novih sustava geometrijskih prostora u radovima matematičara 20. stoljeća. Geometrijske su metode prodrle i u druga područja suvremene matematike i prirodnih znanosti, a predmetom geometrije postale i forme i odnosi koji su na apstraktnom planu s prostorima srodni, kao i bilo koji prostori i pripadajući im likovi (Gleizer, 2003).

2.2. Podvrste geometrije prostora

Geometrija pripada osnovnim matematičkim disciplinama, a bavi se prostornim odnosima i oblicima. Grana geometrije koja se bavi geometrijskim likovima u ravnini zove se planimetrija, dok geometrijska tijela i odnose u trodimenzionalnom prostoru proučava stereometrija. Sam naziv stereometrije potječe iz grčkog jezika, a označava prostor i mjerenje. Pritom prostor podrazumijeva realni trodimenzionalni prostor (Gusić, 1995).

Uz geometriju vežemo i pojam perspektive, koji dolazi od latinske riječi *perspicere*, što bi značilo *jasno gledati* (Kurilj, Sudeta i Šimić, 2005). Problemom perspektive bavi se projektivna geometrija (Gusić, 1995), o čijem je razvoju bila riječ u prošlom potpoglavlju. Perspektiva u geometriji podrazumijeva konstrukcijski postupak, zasnovan na centralnoj projekciji, te njegov rezultat – vjerodostojan crtež, koji uvelike može pomoći, primjerice graditeljima u ocjenjivanju vizualnog i estetskog dojma objekata prije same njihove realizacije (Kurilj i sur., 2005). Centralnom se projekcijom ustvari prikazuju podskupovi ravnine ili prostora (Gusić, 1995).

Grana geometrije koja istražuje prostorne geometrijske oblike te se bavi njihovim međusobnim odnosima i grafičkim predočavanjem zove se nacrtna geometrija (Kovačević i Jurkin, 2013). Drugi nazivi za nacrtnu geometriju su deskriptivna geometrija ili opisno mjerstvo. Njene metode pružaju mogućnost prikazivanja prostornih figura trodimenzionalnog prostora na dvodimenzionalnoj ravnini te rješavanja prostornih problema pomoću iste (Radović, Svedrec, Soucie i Kokić, 2012). Nacrtna je geometrija usmjerena i na obrnuti proces, odnosno na razvoj vizualizacije i interpretacije prostorne situacije na temelju dvodimenzionalnih grafičkih prikaza (Kovačević i Jurkin, 2013). Stoga prilikom prikazivanja geometrijske figure crtežom u ravnini treba imati na umu da promatrač iz njega treba moći predočiti pravu sliku prikazane geometrijske figure (Radović i sur., 2012). Uloga je ravninskih projekcija koje nastaju omogućiti zorniji prikaz trodimenzionalnih objekata te olakšati analizu i pristup mnogim stereometrijskim problemima, bez umanjivanja složenosti prostornih objekata i odnosa.

Veliku pažnju nacrtna geometrija pridodaje razvoju onih sposobnosti i vještina koje za cilj imaju razvoj prostornog razmišljanja i inteligencije. Upravo su razvijeno prostorno mišljenje, prostorni zor i sposobnost vizualizacije kvalitete ključne za uspješan razvoj kompetencija koje iziskuju brojna zanimanja, poput arhitekata, brodograditelja, geografa i drugih (Kovačević, 2016). I za Pestalozzija je geometrija kao učenje o formama zauzimala važno mjesto u pedagoškom sustavu. Vjerovao je u njen velik utjecaj na opću izobrazbu i razvoj misaonih djelatnosti (Gleizer, 2003). Prema istraživanju Kovačević i Jurkin (2013) razvoj

nacrtna geometrija u hrvatskom obrazovanju, kao suvremenom i usmjerenom na razvoj kompetencija, i dalje stagnira u svim obrazovnim ciklusima. Istraživanje je pokazalo da brojni studenti tehničkih fakulteta u Hrvatskoj imaju nedovoljno razvijenu sposobnost vizualizacije. Dobiveni su zaključci o tome da nove smjernice nacrtna geometrije, između ostalog, za cilj trebaju imati razvoj sposobnosti vizualizacije, vještine skiciranja i interpretiranja prostornog položaja objekata na temelju danog ravninskog prikaza, sposobnosti prepoznavanja, opisivanja i rješavanja postojećih konstrukcijskih problema. Pretpostavka je da su navedene vještine rezultat dugotrajnog procesa učenja. Stoga bi problematiku razvoja didaktičkih principa i problema odabira geometrijskih sadržaja trebalo aktualizirati u svim obrazovnim ciklusima, počevši od razredne nastave (Kovačević i Jurkin, 2013).

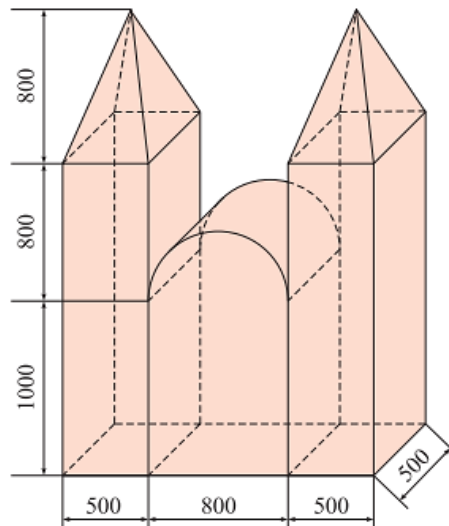
Geometrija prostora sa svojim metodama i sadržajima omogućuje razvoj sposobnosti i vještina potrebnih za svakodnevni život. Potrebno je razmotriti što sve prostorna kompetencija podrazumijeva i na koji način sustav obrazovanja pristupa poučavanju geometrije prostora, koje razvoj spomenute kompetencije i omogućuje. O tome će biti riječi u sljedećem poglavlju ovog rada.

3. METODIKA NASTAVE GEOMETRIJE PROSTORA

Matematički su sadržaji specifični jer paralelno proizlaze iz svakodnevice te uključuju usvajanje i shvaćanje apstraktnih pojmova. Stoga njihova specifičnost iziskuje i specifičnosti u procesu učenja i poučavanja matematike. Kako bi nastavu matematike bilo moguće unaprijediti, spomenuti proces potrebno je temeljito istražiti i dobro razumjeti, u čemu se očituje uloga metodike nastave matematike (Čižmešija, Milin Šipuš i Glasnović Gracin, 2013). Sam naziv *metodika nastave matematike* podrazumijeva znanost o matematičkom odgajanju i obrazovanju na svim razinama školovanja (Markovac, 1992). Metodika nastave matematike razmatra pretpostavke važne za učenje i poučavanje matematike, za razvoj učeničkog poimanja matematičkih koncepata, ulogu učitelja, jezika i tehnologije u poučavanju, društvene aspekte te stavove prema matematici i njenom učenju i poučavanju (Čižmešija i sur., 2013). Prvenstveno je usmjerena na postizanje pozitivnog međudjelovanja prirode matematičkih sadržaja i intelektualnih sposobnosti učenika. Prema Markovcu (1992), metodika početne nastave matematike odnosi se na razrednu nastavu, odnosno prva četiri razreda osnovne škole. Osim sadržaja aritmetike, za razrednu je nastavu karakteristična i pojava elementarnih geometrijskih pojmova (Markovac, 1992). Geometriju je moguće promatrati dvojako, kao jedan od najrealističnijih i najintuitivnijih alata za razumijevanje, opisivanje i interakciju s prostorom oko nas, ali i kao znanstvenu disciplinu, koja ustvari iziskuje visoku razinu apstrakcije i generalizacije (Kovačević i Jurkin, 2013). No, često se početni *neuspjeh* u matematici javlja u onoj nastavi koju karakterizira upravo prebrzo prelaženje s konkretnog mišljenja na apstraktno te uvježbavanje matematičkih sadržaja bez uporišta u svakodnevnom iskustvu (Andrilović i Čudina, 1988).

Učenici bi trebali imati priliku nastavom matematike učvrstiti znanje o trodimenzionalnom svijetu u kojem žive (Glasnović Gracin, 2016). Trenutan pristup geometriji prostora, odnosno neznatna implementacija njenih sadržaja u matematičkom obrazovanju, mogla bi ostaviti negativne posljedice po pitanju razvoja geometrijskog mišljenja u čitavoj obrazovnoj vertikali (Kovačević, 2016). Vertikalno i horizontalno povezivanje sadržaja u čitavom matematičkom obrazovanju trebalo bi biti temelj koncipiranja kurikuluma nastavnog predmeta Matematike (Čižmešija, Milin Šipuš, Svedrec i Špalj, 2014). Kao uzroke nedovoljno razvijenog geometrijskog mišljenja, Kovačević (2016) navodi nedovoljnu zastupljenost tema iz geometrije prostora unutar hrvatskih kurikulumskih dokumenata, diskontinuitet u poučavanju geometrijskih sadržaja te nepravilno usvajanje osnovnih geometrijskih koncepata. Pritom se nepravilno usvajanje osnovnih geometrijskih koncepata može odnositi na nepravilnu

uporabu crteža u razvijanju vizualizacije, neispravno korištenje geometrijske terminologije u matematičkoj literaturi te neadekvatnu kontekstualizaciju prostornih problema. Nastavnici trebaju biti oprezni prilikom definiranja geometrijskih pojmova, kao i prilikom odabira ili osmišljavanja zadataka. Primjerice, Slika 6 prikazuje primjer zadatka namijenjenog određivanju oplošja ili obujma prikazanog tijela na temelju crteža.



Slika 6. Zadatak za određivanje oplošja ili obujma (Kovačević, 2016, str. 200)

Na prikazanom je crtežu moguće zamijetiti pogrešno zadavanje mjernih kota, odnosno neispravno zadavanje visine ili bočnog brida piramide (Kovačević, 2016). Crtež treba biti ispravan kako bi ga učenici samostalno mogli *pročitati* te, pomoću njega, riješiti zadatak.

U nastavku poglavlja objašnjeni su pojmovi prostornog mišljenja i prostornog zora, čijem razvoju geometrija prostora treba težiti, ukratko su prikazane teorije koje objašnjavaju intelektualni razvoj učenika i razmotrene smjernice za poučavanje geometrijskih sadržaja s naglaskom na geometriju prostora.

3.1. Geometrijsko mišljenje

Među osam ključnih kompetencija određenih *Preporukama o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje*, dokumentu donesenom 2006. godine odlukom Parlamenta i Vijeća Europske unije, nalazi se i matematička kompetencija (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010). Ona, između ostalog, predstavlja sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja, pa tako i prostornog, u rješavanju problema iz svakodnevice (Čižmešija i sur., 2010). „Sposobnost vizualizacije prostora, tj. pamćenja oblika, veličina geometrijskih figura

(predmeta), kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa, naziva se prostorni zor“ (Radović i sur., 2012, str. 51). Pojam podrazumijeva i intuitivni osjećaj za oblike u prostoru te za geometrijske aspekte okoline i oblike koje objekti oko nas formiraju (Čižmešija i sur., 2010). Potrebno je jačati razvoj geometrijskog mišljenja kroz prostorno mišljenje i prostorni zor, prvenstveno produblivanjem geometrijskih znanja na svim obrazovnim razinama. Pritom prostorno mišljenje i prostorni zor treba nastojati proučavati s različitih stajališta, kako matematičkog, tako i kognitivnog (Kovačević, 2016).

S obzirom na to da je pri organiziranju i poučavanju nastavnih sadržaja, pa tako i sadržaja geometrije prostora, neophodno na umu imati kognitivne mogućnosti i intelektualne sposobnosti učenika, u nastavku slijedi prikaz teorija o kognitivnom razvoju djece koja pohađaju razrednu nastavu.

3.1.1. Piaget i intelektualni razvoj

Intelektualna razvijenost učenika važan je element učenja u početnoj nastavi matematike. Unutar Piagetove teorije intelektualnog razvoja nalazi se i objašnjenje geneze intelektualnih sposobnosti relevantnih za formiranje osnovnih matematičkih pojmova (Markovac, 1992). Učenici razredne nastave u najvećoj mjeri pripadaju trećem Piagetovom razdoblju intelektualnog razvoja, koje otprilike traje od sedme do jedanaeste godine života, a zove se razdoblje konkretnih operacija. U toj fazi dijete još uvijek nije u stanju *baratati* apstraktnim sadržajima (Furlan, 1985). Dijete počinje ispravno formirati pojmove i može logički misliti, ali je mišljenje i dalje konkretno, intuitivno te ograničeno na konkretnu realnost i prisutnu sadašnjost (Andrilović i Čudina, 1990; Markovac, 1992). Usvajanje matematičkih sadržaja stoga uvelike ovisi o interakciji učenika s materijalnim objektima. Njihove misli trebaju biti utemeljene upravo na onim radnjama koje konkretne objekte i uključuju, odnosno potkrepljene perceptivnim ili osjetilnim podacima.

Kada se govori o intelektualnoj razvijenosti kao preduvjetu učenja, misli se na stupanj kojim učenici raspolazu u određenom trenutku. Dakle, taj stupanj nije jednak kod svih učenika. Postavlja se pitanje kako prepoznati nalazi li se dijete u razdoblju konkretnih operacija. Učenik koji se nalazi u toj fazi moći će, primjerice, prepoznati i razumjeti da raspored elemenata unutar skupa ne utječe na brojnost elemenata tog istog skupa, što nazivamo invarijantnošću. Kako bi učenici upoznali invarijantnost, moguće je u nastavi provoditi vježbe poput promatranja dviju kugli jednakih veličina i načinjenih od istog materijala, nakon čega slijedi promjena perceptivne strukture jedne od njih valjanjem te vraćanje iste u prvobitni oblik (Markovac, 1992).

3.1.2. Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja

Teorija o razvoju geometrijskog mišljenja objavljena je 1973. godine na Sveučilištu u Utrechtu u Nizozemskoj, u sklopu doktorskih disertacija Dine van Hiele-Geldof i njenog supruga Pierra van Hielea, po kojima je teorija i dobila naziv. Ona daje uvid u to na koji način učenici percipiraju ravninu i prostor, kao i geometrijske oblike u njima. Teorijom je identificirano pet razvojnih razina geometrijskog mišljenja, koje opisuju kako i o kojem tipu geometrijskih ideja mislimo, neovisno o količini znanja koje posjedujemo (Čižmešija i sur., 2010). Osnovnu razliku među razinama čine objekti o kojima možemo geometrijski promišljati. U tablici 1 prikazane su razine uz objekte i proizvode mišljenja koji su za njih karakteristični.

Tablica 1

Pet razina geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji (Čižmešija i sur., 2010)

| Razina | Objekt mišljenja | Proizvod mišljenja |
|-------------------------|---|---|
| 0. Vizualizacija | Oblici i njihov izgled (čemu su nalik) | Klase ili grupe oblika koji <i>izgledaju slično</i> |
| 1. Analiza | Klase oblika (umjesto pojedinačnih oblika s razine 0) | Svojstva geometrijskih oblika |
| 2. Neformalna dedukcija | Svojstva geometrijskih oblika | Odnosi među svojstvima geometrijskih oblika |
| 3. Dedukcija | Odnosi među svojstvima geometrijskih oblika | Deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora) |
| 4. Strogost | Deduktivni aksiomatski sustavi geometrije | Usporedba različitih aksiomatskih sustava geometrije (euklidska i neeuklidske geometrije) |

Kako bi učitelji mogli lakše prepoznati razinu geometrijskog mišljenja na kojoj se pojedini učenik nalazi te u skladu s time prilagoditi didaktičke metode s ciljem podizanja trenutne razine, u teoriji su dani i primjeri tipičnog geometrijskog ponašanja učenika i mogućih načina utjecanja na nastavu oblika i prostora za pojedinu razinu. Čižmešija i suradnici (2010) ističu kako se većina učenika nižih razreda osnovne škole nalazi na nultoj razini. S obzirom na tu činjenicu, u daljnjem tekstu navedeni su objekti i struktura geometrijskog mišljenja karakteristični za nultu fazu i fazu koja slijedi. Opisana su i tipična ponašanja učenika navedenih faza te metodička rješenja koja se na njih odnose.

Na razini vizualizacije, objekte geometrijskog mišljenja predstavljaju pojedinačna tijela, a strukturu čine vizualno prepoznavanje, imenovanje te vizualno sortiranje. Učenici koji se nalaze na razini vizualizacije često pri prepoznavanju tijela i njihovu uspoređivanju, klasificiranju i opisivanju koriste nevažna vizualna svojstva, kao što je primjerice boja. Često

se pozivaju i na vizualne prototipove tijela pa ih nerijetko zbunjuje promjena položaja i orijentacije tijela. Na primjer, ako se piramida u prostoru ili u ravninskom prikazu ne nalazi u *standardnom* položaju (s horizontalnom bazom) teško ju prepoznaju. Također, nisu u mogućnosti pojmiti beskonačno mnogo varijacija određenog tipa tijela, neovisno o tomu je li riječ o obliku ili orijentaciji. Tijela nepotpuno definiraju jer često samo nužne uvjete, kao što su vizualni, smatraju dovoljnima pri definiranju (Čižmešija i sur., 2010). Počinju upotrebljavati osnovna imena za oblike, ali često za to ne nude objašnjenje niti prikazane oblike povezuju sa sličnim objektima (Vlasnović i Cindrić, 2014). Kao rješenje bi u nastavu trebalo uvesti aktivnosti koje uključuju puno sortiranja i klasificiranja te dovoljno raznolikih primjera oblika, kako njihove manje bitne osobine ne bi dolazile do izražaja. Bilo bi poželjno učenicima omogućiti da crtaju, izgrađuju, sastavljaju i rastavljaju dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike te u nastavu uključiti one aktivnosti usmjerene na specifične osobine ili svojstva oblika kako bi se kod učenika razvijalo razumijevanje geometrijskih svojstava i kako bi ih i sami prirodno počeli koristiti.

Na idućoj razini, razini analize, objekt geometrijskog mišljenja su klase tijela, a struktura podrazumijeva prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa tijela. Učenici koji se nalaze na toj razini eksplicitno uspoređuju tijela u terminima njihovih bitnih svojstava, izbjegavaju inkluzije među različitim klasama tijela te sortiraju tijela na temelju samo jednog svojstva (Čižmešija i sur., 2010). Ono u čemu često griješe i što ne razumiju su veze među prostornim figurama i generalizacija. Primjerice, ne mogu uočiti zajednička obilježja kocke i kvadra (Vlasnović i Cindrić, 2014). Također, prilikom opisivanja ili definiranja tijela neekonomično se služe svim njihovim svojstvima te često prednost daju definicijama koje su sami osmislili nasuprot onima koje nude, na primjer, učitelj ili udžbenik. Vjeruju kako je empirijska provjera, kao što je na primjer skica, dovoljna za utvrđivanje istinitosti neke tvrdnje. Za učenike koji se nalaze na ovoj razini potrebno je osmisliti dovoljno aktivnosti u kojima će fokus biti stavljen i na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje, zatim, prepoznati i iskoristiti činjenicu da uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste i broj svojstava oblika. Potrebno je ideje primjenjivati na sve klase oblika, a ne samo na pojedinačne modele te uočavati nova svojstva analizom klasa oblika. Ovdje je poželjno i korištenje programa dinamične geometrije (Čižmešija i sur., 2010).

Metodičari, kreatori kurikuluma i učitelji trebali bi imati na umu van Hieleovu teoriju prilikom organiziranja kurikuluma i samog nastavnog procesa. Odabir sadržaja i metoda poučavanja geometrije prostora prikladnih pojedinoj razini razvoja geometrijskog mišljenja, omogućit će uspješan prelazak učenika s jedne razine na drugu.

3.2. Smjernice za organizaciju i poučavanje sadržaja geometrije prostora

Posljednjih je desetljeća moguće zamijetiti smanjenje udjela geometrijskih sadržaja u nacionalnim kurikulumima mnogih zemalja. Pretpostavka je da je jedan od uzroka tomu želja za uvođenjem novijih matematičkih disciplina u nastavu matematike, poput vjerojatnosti i statistike (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019). S druge strane, brojni stručnjaci naglašavaju važnost izgradnje dobrih modela školskih geometrijskih kurikuluma. Okvirne smjernice za poučavanje geometrijskih sadržaja dane su u sklopu ICMI (eng. *International Commission on Mathematical Instruction*) studije (Kovačević i Jurkin, 2013).

3.2.1. ICMI studija i Wittmannove fundamentalne ideje

Diskusije na temu krize u nastavi geometrije potaknute su od strane ICMI organizacije, a kao ideja je navedena organizacija koherentnog kurikuluma geometrije zasnovanog na takozvanim fundamentalnim idejama. Naglašena je i nužnost međunarodnog usklađivanja geometrijskog obrazovanja te razmatranja ciljeva nastave geometrije. Fundamentalne ideje podrazumijevaju matematičke koncepte duboko povezane s realnošću te primjenjive u stvaranju različitih aspekata i pristupa matematici. Također, odnose se i na skup strategija koje je moguće pronaći u povijesnome razvoju matematike, koje se održivo protežu čitavom obrazovnom vertikalom, koje nastavu matematike čine fleksibilnijom i transparentnijom te sadrže odgovarajući lingvistički ili akcijski prototip u svakodnevnom životu.

Sedam fundamentalnih ideja oko kojih bi se školska geometrija trebala organizirati predložio je njemački metodičar Erich Wittmann. U tablici 2 navedeno je svih sedam fundamentalnih ideja, kao i opis svake od njih (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019).

Tablica 2

Wittmannove fundamentalne ideje (Glasnović i Kuzle, 2019)

| Fundamentalna ideja | Obilježja |
|--|--|
| Geometrijski oblici i njihove konstrukcije | Strukturalno se bazira na trodimenzionalnom prostoru i njegovim podskupovima. Odnosi se i na usvajanje i razumijevanje trodimenzionalnih objekata, odnosno geometrijskih tijela i ostalih dijelova prostora, koje je moguće prikazati na brojne načine kojima se obilježavaju njihova svojstva (materijalima, crtanjem geometrijskim priborom i slično). |
| Operacije s oblicima | Podrazumijeva razumijevanje geometrijskih operacija (npr. rotacije, osne simetrije i sl.) te njihovog utjecaja na svojstva objekata s kojima se operira. |

| | |
|------------------------|---|
| Koordinate | Odnosi se na razumijevanje mogućnosti opisivanja pozicije različitih geometrijskih objekata pomoću koordinatnog sustava i sl. |
| Mjerenje | Predstavlja mogućnost kvalitativnog i kvantitativnog opisivanja geometrijskih objekata, primjerice, obujma. |
| Uzorci | Podrazumijeva shvaćanje mogućnosti o brojnim načinima povezivanja točaka, pravaca, likova i tijela tako da nastaju određeni geometrijski uzorci. |
| Oblici iz svakodnevice | Odnosi se na razumijevanje da je stvarne objekte, kao što su, na primjer, skulpture, te operacije među njima moguće opisati pomoću geometrije. |
| Geometrizacija | Podrazumijeva shvaćanje da je objekte, svojstva i probleme iz okruženja moguće prevesti u jezik geometrije. U tom kontekstu važnu ulogu ima i deskriptivna geometrija sa svojim projekcijama. |

Wittmannove ideje odgovaraju preporukama ICMI studije po pitanju izrade novih kurikuluma geometrije. Mogu poslužiti kao dobar temelj u stvaranju tih kurikuluma, kao i u razmatranju prohodnosti navedenih ideja kroz obrazovnu vertikalu. Učenici će sudjelovanjem na nastavi geometrije organiziranoj na bazi fundamentalnih ideja produbiti i proširiti sliku o geometriji te upoznati njenu višedimenzionalnu prirodu.

Postavlja se pitanje kako koncipirati školsku geometriju tako da sadržaji, zahtjevi i ishodi budu usko vezani uz fundamentalne ideje, koje bi se trebale kontinuirao i vertikalno protezati svim stupnjevima obrazovanja, te primjereni uzrastu učenika i njihovim mogućnostima. Problematika implementiranja fundamentalnih ideja unutar kurikuluma trebala bi zainteresirati sve razine matematičkog obrazovanja i obrazovnih politika upravo zbog uloge koju razvitak otprije spomenutog prostornog zora ima u cjelokupnom razvoju djeteta, odnosno učenika (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019).

3.2.2. *Meranski nastavni plan i genetička nastava Felixa Kleina*

„Meranski plan iz 1905. bio je prvi opsežan i cjelovit plan za matematiku“ (Glasnović Gracin, 2010, str. 11). Svi planovi koji su uslijedili ustvari su bili njegove preinake, a plan i danas predstavlja temelj mnogih europskih nastavnih planova. Inače, naziv je dobio po tirolskom gradiću Meranu u kojem je po prvi put prezentiran. Plan je isticao potrebu za novim pristupom nastavi matematike te podrazumijevao težnju za orijentiranjem tadašnjoj modernoj civilizaciji i primjeni tehnologija. Prema reformi je glavnim ciljem nastave matematike bio smatran razvoj sposobnosti matematičkog razmatranja fenomena u stvarnom svijetu, iz čega proistječu i dvije temeljne zadaće nastave matematike, a to su jačanje prostornog zora te odgoj

za prilagodbu na funkcionalno razmišljanje. Pojam prostornog zora već je prethodno pojašnjen, a odgoj za prilagodbu na funkcionalno razmišljanje odnosi se na sposobnost matematiziranja svakodnevnih životnih situacija sa svojstvom ovisnosti raznih veličina i općenito percipiranje okoline na matematički način (Glasnović Gracin, 2010).

Jedan od glavnih aktera u osmišljavanju i realizaciji Meranskog plana bio je poznati njemački matematičar Felix Klein. Upravo je on imao presudan utjecaj na razvoj moderne geometrije (Gusić, 1995). Dotadašnju je nastavu smatrao *umjetnom* jer nije obuhvaćala životne primjere niti bila pedagoški i metodički potkovana. Zaslužan je za ideju takozvane genetičke nastave. Ona podrazumijeva sljedeće: kod usvajanja novih sadržaja učenika uvijek treba usmjeravati na prethodna iskustva te povijesna saznanja ljudi, vezano uz temu koja je u pitanju. Na taj bi način učenici mogli bolje povezati nove nastavne sadržaje s onima otprije poznatima (Glasnović Gracin, 2010). Takav pristup odgovara i načelu kontinuiranosti koje „kazuje da se novi programi ponašanja razvijaju na već razvijenim programima“ (Andrilović i Čudina, 1988, str. 6). Osim načela kontinuiranosti, pristup zadovoljava i načelo postupnosti, koje se ostvaruje sukladno didaktičkim pravilima kao što su: kretanje od jednostavnog prema složenom, od poznatog prema nepoznatom, od konkretnog prema apstraktnom (Markovac, 1992). Prema Kleinu, matematički bi jezik trebao nastupiti tek na kraju učenja, a fokus bi trebao biti na samoj ideji.

Ipak, Kleinova ideja u praksi dugoročno uglavnom nije zaživjela. U primjeni su pretežito ostali samo algoritmi za različita računanja koji se van nastave, u svakodnevnom životu, gotovo ni ne upotrebljavaju. Najveći doprinos Meranskog plana očituje se u tome što su u prvi plan stavljene ideje, koncepti, prostorni zor, vizualizacija, korištenje modela i primjena u nastavi matematike (Glasnović Gracin, 2010). Sve navedeno predstavlja ono čemu funkcionalno koncipiranje nastave geometrije prostora treba težiti.

3.2.3. *Aktivnosti i zadatci u geometriji prostora*

Nastava geometrije prostora trebala bi biti usmjerena stjecanju znanja potrebnih za svakodnevni život te razvoj apstraktnog mišljenja (Glasnović Gracin, 2016). Kako bi se navedena znanja u sklopu nastave geometrije prostora mogla približiti učenicima razredne nastave te unaprijediti, potrebno je razumjeti koje su aktivnosti i zadatci tim učenicima primjereni. „Učenici nižih razreda osnovne škole usredotočeni su na jednostavne prostorne odnose i jednostavna svojstva geometrijskih figura“ (Čižmešija i sur., 2010, str. 158). Unapređivanje njihove intelektualne spremnosti sastoji se od promatranja i manipuliranja konkretnim objektima te misaone pretvorbe perceptivnih podataka i vlastitih aktivnosti

objektima. Pritom se perceptivne aktivnosti u misaone pretvaraju postupno, uz govorno obrazlaganje (Markovac, 1992). U mogućnosti su: opisati položaj objekta uporabljajući orijentaciju, prepoznati, imenovati, opisati i razvrstati trodimenzionalne oblike prema određenom pravilu i izgraditi ih pomoću konkretnih materijala te prepoznati i opisati dvodimenzionalne oblike kao sastavne dijelove trodimenzionalnih. Mogu upoznati i osnovnu koordinatnu geometriju unutar kvadratne mreže, koja je prisutna i na igraćim pločama različitih, njima poznatih, igara (Čižmešija i sur., 2010). Važno je da učenik sam može prepoznati geometrijsku situaciju ili problem te odrediti metode kojima će taj problem i riješiti, a zadaća je nastavnika upoznati učenike s različitim metodama rješavanja problema (Kovačević, 2016).

Formiranje pojmova o oblicima u prostoru prvenstveno se odvija na razini konkretnosti. Učenici mogu kvalificirati objekte, primjerice, na temelju njihovog oblika, a moguće je kombinirati i više svojstava. Prvo mogu vizualno razlikovati i imenovati dva standardna oblika, uglati i obli, a za njihovo lakše razlikovanje može poslužiti demonstracija kotrljanja obli. Kao vizualno uporište za uočavanje sličnosti i razlika koriste se svakodnevni predmeti, a potrebno je uključiti i taktilno percipiranje (npr. pipavanje bridova i strana). Slijedi formiranje pojmova na razini apstrakcije, u kojoj se oblik odvaja od predmeta te generalizira kao opće i zajedničko svojstvo predmeta. Stoga učenici iz okoline izdvajaju promatrane predmete oblika kvadra, kocke, valjka, kugle. Svaki predmet promatraju te određuju njegov oblik na osnovi karakteristika. Isto otkrivaju na modelima geometrijskih tijela, kada se uvode i termini za pojedino tijelo. Na modelima mogu promatrati i geometrijske likove (Markovac, 1992).

Odnose među predmetima u prostoru (lijevo – desno, ispred – iza, gore – dolje, ispod – iznad, između) učenici upoznaju njihovim promatranjem te kretanjem u prostoru. Tablica 3 prikazuje aktivnosti kojima učenici mogu upoznati navedene odnose.

Tablica 3

Aktivnosti za spoznavanje prostornih odnosa (Markovac, 1992)

| Prostorni odnos | Aktivnosti | Primjer |
|-----------------|---|---|
| Lijevo – desno | Učenici upoznaju odnos polazeći od poznavanja odnosa dijelova vlastitog tijela. Potom identificiraju predmete koji se od njih u prostoru nalaze lijevo i desno pomoću određene ruke. Kako bi se učenike postupno dovelo do stjecanja ispravnog i trajnog znanja o odnosu, treba ih dovoditi u situacije u kojima se okreću i mijenjaju svoje stajalište, odnosno kut promatranja. | Učenici navode imena učenika koji se nalaze desno od njih. Potom se za 180° okreću ulijevo i ponovo trebaju navesti imena učenika koji se nalaze desno od njih. |
| Ispred – iza | Upoznavanje odnosa provodi se promatranjem, pronalaženjem i imenovanjem predmeta okoline koji se u odnosu na promatrača nalaze ispred i iza njega. | Učenici imenuju predmete u učionici koji se nalaze ispred njih. |

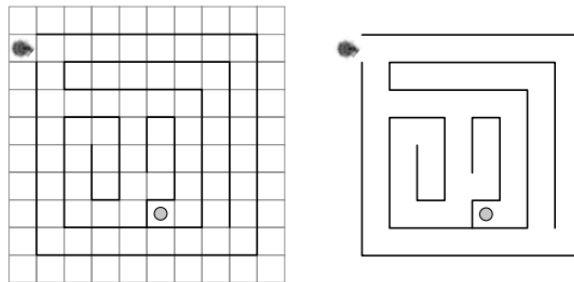
| | | |
|---------------|---|---|
| Gore – dolje | Učenici odnos upoznaju promatrajući odnos predmeta prema Zemlji, ovisno o tome jesu li joj blizu ili od nje udaljeni. | Učenici sudjeluju u igri <i>Leti, leti, leti....</i> |
| Ispod – iznad | Odnos učenici također upoznaju u prirodnoj situaciji. | Učenici imenuju pribor koji se nalazi ispod klupe. |
| Između | Odnos učenici također upoznaju u prirodnoj situaciji. | Učenici navode imena učenika između kojih se nalaze u vrsti na satu Tjelesne i zdravstvene kulture. |

Slijedi promatranje odnosa predmeta okoline, poput dulji – kraći, njihovim uspoređivanjem. Zakrivljene i ravne plohe učenici uočavaju na predmetima okoline koji su istima omeđeni te na modelima geometrijskih tijela. I tu je važno prisustvo osjeta dodira. Potom slijedi upoznavanje vodoravnih, uspravnih i kosih položaja u prostoru (Markovac, 1992).

Markovac (1992) navodi kako bi učenici upoznavanjem mjerenja trebali biti osposobljeni za mjerenje prostora kojeg zauzima određeno tijelo. Uobičajenim računanjem oplošja i volumena tijela te preračunavanjem mjernih jedinica, ponovo se veća pažnja pridaje aritmetici i algebri, nego geometriji (Glasnović Gracin, 2016). Često se mjerenje svodi samo na fizički čin i pritom izostavljaju misaone aktivnosti nužne za njegovo razumijevanje, što je ujedno preduvjet izgradnji ispravnog i operativnog znanja mjerenja veličina. Potrebno je razumjeti i postupno poticati različite spoznaje koje se kod učenika izgrađuju pri formiranju pojma mjerenja veličina. Primjerice, spoznaju da je mjerenje postupak uspoređivanja dviju istovrsnih veličina (zapremnina se mjeri zapremninom) i postupak kojim se veličini pridružuje broj koji pokazuje koliko se puta jedinična veličina našla u mjerenoj veličini. Zatim spoznaju da se istoj veličini pridružuju različiti brojevi ako se mjeri različitim jediničnim veličinama, spoznaju o jediničnim veličinama koje se koriste pri mjerenju (npr. jedinične zapremnine 1 dl, 1 l, 1 hl) te spoznaju o postupku preračunavanja jediničnih veličina. Potrebno je poticati i osposobljavanje učenika u praktičnom izvođenju mjerenja, kao i primjenu istog u svakodnevnom životu. Mjerenje u nastavi u početku može uključivati promatranje dviju posuda nejednake veličine te procjenu koja bi od njih bila veća, odnosno manja, uz obrazloženje tvrdnje na temelju veličine prostora kojeg posude omeđuju. Slijedi uvođenje pojma zapremnine ili volumena, uz pojašnjenje da je riječ o omeđenom prostoru. Prilikom promatranja predmeta čiju veličinu nije moguće procijeniti, učenici će shvatiti nužnost mjerenja. Na osnovi analogije, primjerice, da se dužina mjeri dužinom, doći će do zaključka da se volumen mjeri volumenom. Mjerne jedinice mogu upoznati uspoređujući količinu tekućine u dvjema različitim posudama.

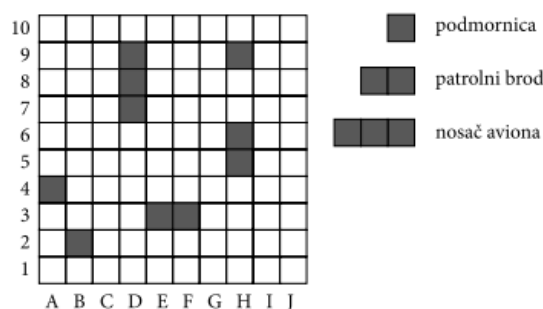
Osposobljavanju učenika za primjenu znanja u praktičnom životu može pridonijeti rješavanje tekstualnih zadataka koji uključuju mjerenje određenih zapremnina (Markovac, 1992).

Orijentaciju u ravnini učenici mogu uvježbavati različitim aktivnostima. Na primjer, za drugi i treći razred primjerena je aktivnost labirinta, koje učenici i sami mogu stvarati i rješavati. Slika 7 prikazuje složeniji i jednostavniji primjer labirinta u kojem učenici trebaju pronaći najbrži put bubamare do njene hrane.



Slika 7. Primjer labirinta u kvadratnoj mreži i bez nje (Čižmešija i sur., 2010, str. 158)

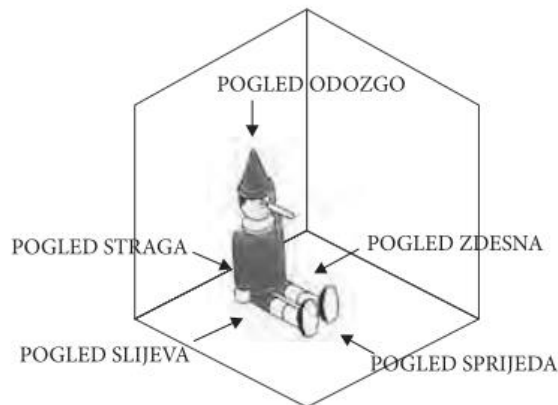
Geometrijsko obrazovanje treba obuhvaćati i upotrebu koordinatne geometrije prilikom određivanja položaja i opisivanja prostornih odnosa. Pri usvajanju pojma jednostavnih koordinata u kvadratnoj mreži u četvrtom razredu može poslužiti poznata igra potapanja brodova. Učenici se u igri prilikom zapisivanja položaja svoje flote služe uređenim parovima. Slika 8 prikazuje primjer kvadratne mreže predviđene za igru (Čižmešija i sur., 2010).



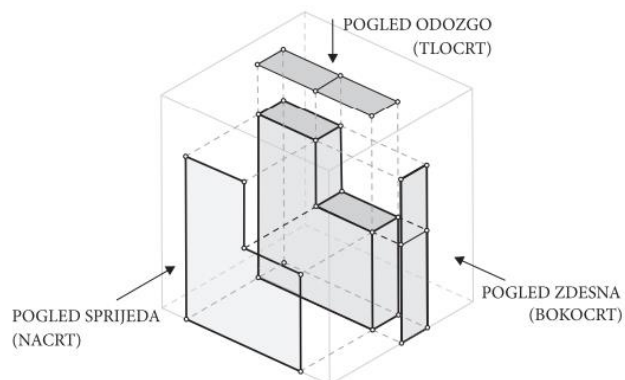
Slika 8. Kvadratna mreža za igru *Potapanje brodova* (Čižmešija i sur., 2010, str. 159)

U nastavi geometrije prednost bi trebale imati aktivnosti koje uključuju prebacivanja iz jednog prikaza u drugi, argumentiranje i dokazivanje, prebrojavanje kockica u prostoru te promatranje trodimenzionalnih slika iz različitih kutova (Glasnović Gracin, 2016). Takozvano čitanje prostornih crteža nužno je za daljnje rješavanje prostornih problema (Kovačević, 2016). Razvoj orijentacije u prostoru prvenstveno mogu potaknuti aktivnosti koje uključuju sastavljanje i rastavljanje te opisivanje prostornih oblika, a kasnije učenici od mreža

geometrijskih tijela mogu izrađivati i njihove modele (kocka, kvadar, tetraedar, trostrana i četverostrana prizma). Kontinuirano provođenje takvih aktivnosti utječe na razvoj vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju mreža pa će učenici nakon nekog vremena moći i predvidjeti rezultat njegovom vizualizacijom (Čižmešija i sur., 2010). Slika 9 prikazuje primjere pogleda na geometrijsku figuru, a slika 10 nadogradnju uvođenjem tlocrta, nacрта i bokocрта, odnosno standardnih projekcija. Kod samog projiciranja geometrijske figure na strane kocke tijekom poučavanja, ideja je da se koristi staklena kocka.



Slika 9. Pogledi na geometrijsku figuru (Radović i sur., 2012, str. 52)

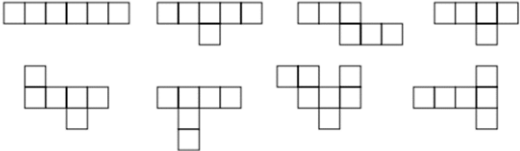
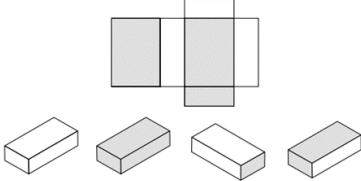
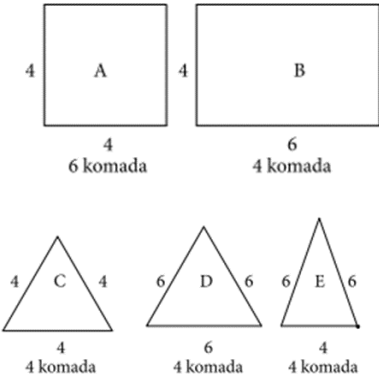
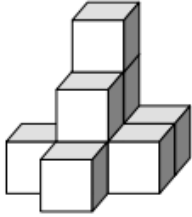
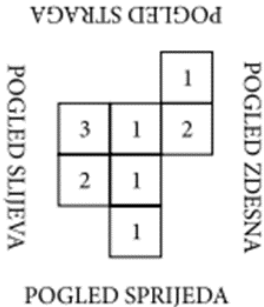


Slika 10. Standardne projekcije (Radović i sur., 2012, str. 53)

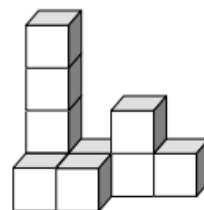
Tablica 4 prikazuje aktivnosti predviđene za provedbu u četvrtom razredu osnovne škole i pripadajuće im materijale. Aktivnosti potiču razvoj prostornog mišljenja i prostornog zora (Čižmešija i sur., 2010).

Tablica 4

Aktivnosti za četvrti razred osnovne škole (Čižmešija i sur., 2010)

| Primjer aktivnosti | Materijali |
|---|---|
| <p>Učenici trebaju provjeriti koje od prikazanih mreža mogu biti mreže kocke.</p> |  |
| <p>Iz prikazane mreže učenici trebaju misaono sastaviti kutiju i opredijeliti se za sliku na kojoj bi taj zamišljeni kvadar bio prikazan.</p> |  |
| <p>Učenici od kompleta mnogokuta trebaju sastaviti što više mogućih prizmi i piramida radom u timu.</p> |  |
| <p>Učenici mogu slagati tijela od jednakih kocaka promatrajući crteže tijela. Pomoću kvadratne mreže mogu prikazati poglede na prikazano tijelo srijeda, zdesna i odozgora.</p> |  |
| <p>Učenici tijelo mogu slagati i crtati na temelju plana gradnje.</p> |  |

Učenici u kvadratnoj mreži trebaju prikazati tlocrt kocaka prikazanih na slici. Na tlocrtu mogu zapisati *visinu* pojedinog stupca, odnosno zaključiti koliko je kocaka u gradnji tijela korišteno.

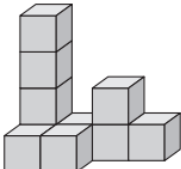
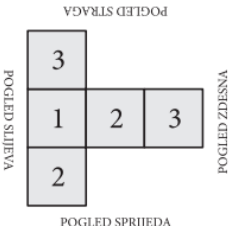


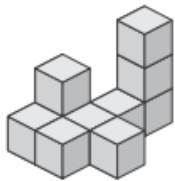
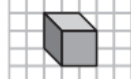
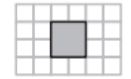
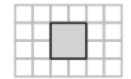
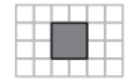
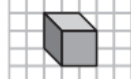
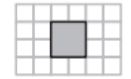
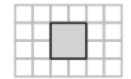
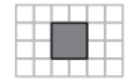
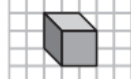
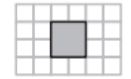
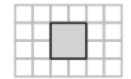
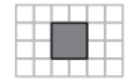
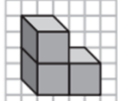


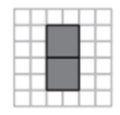
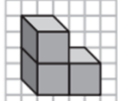


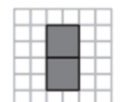
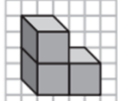


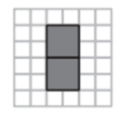
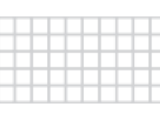
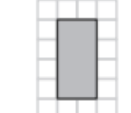
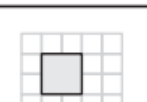
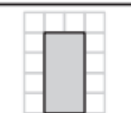
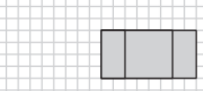
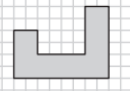

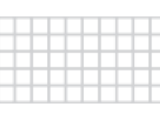
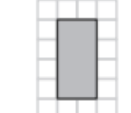
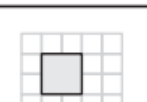
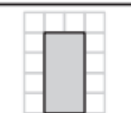
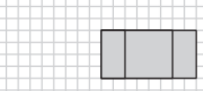
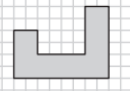

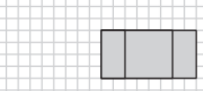
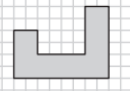

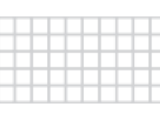
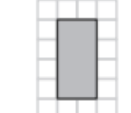
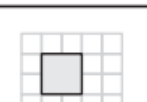
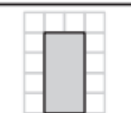
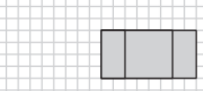
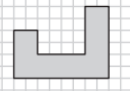

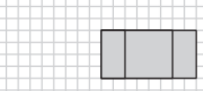
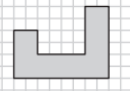

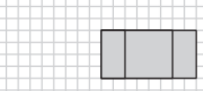
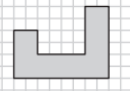

Važno je u nastavu uključiti i aktivnosti poput popločavanja ravnine i prostora, presavijanja papira, crtanja projekcija geometrijskih tijela u kvadratnoj i trokutastoj mreži točaka (Čižmešija i sur., 2010). Učenike je potrebno poticati i na prostoručno crtanje (Kovačević, 2016).

Prije samog konstruiranja dvodimenzionalnog crteža poželjno je da učenici prođu kroz različite aktivnosti, koje se kreću od najjednostavnijih prema najslženijima, a prikazane su u tablici 5 (Radović i sur., 2012). Kod učenika je važno poticati i sposobnost argumentiranja, koja zahtijeva i ispravnu upotrebu geometrijske terminologije, a razvija se obrazlaganjem položaja objekta na temelju grafičkog prikaza, obrazlaganjem argumenata za ili protiv upotrebe odgovarajućih prikaza te navođenjem argumenata za ili protiv određene pretpostavke, interpretacije ili rješenja (Kovačević, 2016). Prikazane aktivnosti od učenika iziskuju upravo argumentiranje, što će potaknuti razvoj te sposobnosti.

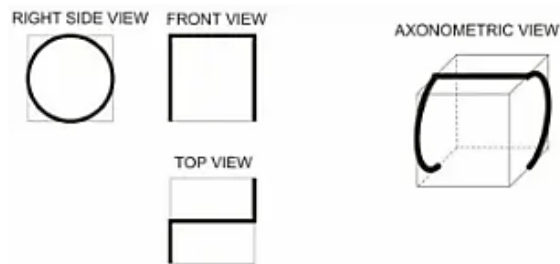
Tablica 5

Aktivnosti za razvijanje prostornog mišljenja i prostornog zora (Radović i sur., 2012)

| Aktivnost | Primjer zadatka |
|--|---|
| Slaganje tijela od jednakih kockica i njegovo opisivanje. | / |
| Slaganje tijela na temelju crteža. |  |
| Slaganje tijela na temelju plana gradnje. Pritom brojevi upisani u kvadrate označavaju broj kocaka u pojedinom <i>stupcu</i> . |  |

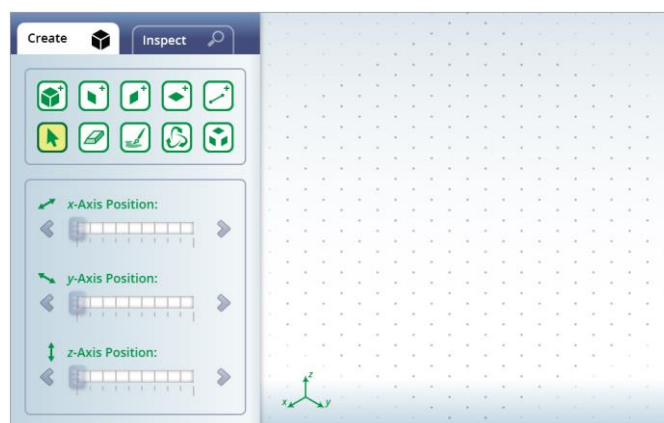
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|---|-----------------|--|---|---|---|--|---|--|--|--------|-------|---------|--|---|---|
| <p>Izrada plana gradnje tijela u kvadratnoj mreži na temelju crteža.</p> |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Provjera točnosti prikazanih projekcija uz argumentirano objašnjenje. Pritom nasuprotne strane kocke mogu biti obojane istim bojama. Na primjeru jedne kocke objasniti zašto se ne vide iste strane kocke, iako su projekcije jednake (kvadrati).</p> | <table border="1" data-bbox="919 387 1278 678"> <tr> <td data-bbox="919 387 1098 432">TIJELO</td> <td data-bbox="1098 387 1278 432">POGLED SPRIJEDA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="919 432 1098 533"></td> <td data-bbox="1098 432 1278 533"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="919 533 1098 577">POGLED ODOZGO</td> <td data-bbox="1098 533 1278 577">POGLED S DESNA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="919 577 1098 678"></td> <td data-bbox="1098 577 1278 678"></td> </tr> </table> | TIJELO | POGLED SPRIJEDA |  |  | POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA |  |  | | | | | | | | |
| TIJELO | POGLED SPRIJEDA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Crtanje projekcija popunjavanjem tablice. Argumentiranje nacrtanih projekcija.</p> | <table border="1" data-bbox="938 719 1262 1079"> <tr> <td data-bbox="938 719 1098 763">TIJELO</td> <td data-bbox="1098 719 1262 763">POGLED SPRIJEDA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="938 763 1098 898"></td> <td data-bbox="1098 763 1262 898"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="938 898 1098 943">POGLED ODOZGO</td> <td data-bbox="1098 898 1262 943">POGLED S DESNA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="938 943 1098 1079"></td> <td data-bbox="1098 943 1262 1079"></td> </tr> </table> | TIJELO | POGLED SPRIJEDA |  |  | POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA |  |  | | | | | | | | |
| TIJELO | POGLED SPRIJEDA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Na temelju crteža projekcija u kvadratnoj mreži prikazati geometrijsku figuru.</p> | <table border="1" data-bbox="906 1088 1337 1619"> <tr> <td data-bbox="906 1088 1098 1133">TIJELO</td> <td data-bbox="1098 1088 1289 1133">POGLED SPRIJEDA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="906 1133 1098 1267"></td> <td data-bbox="1098 1133 1289 1267"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="906 1267 1098 1312">POGLED ODOZGO</td> <td data-bbox="1098 1267 1289 1312">POGLED S DESNA</td> </tr> <tr> <td data-bbox="906 1312 1098 1458"></td> <td data-bbox="1098 1312 1289 1458"></td> </tr> <tr> <td colspan="2" data-bbox="906 1458 1337 1503"> <table border="0" data-bbox="863 1462 1337 1619"> <tr> <td data-bbox="863 1462 1098 1507">TLOCRT</td> <td data-bbox="1098 1462 1241 1507">NACRT</td> <td data-bbox="1241 1462 1337 1507">BOKOCRT</td> </tr> <tr> <td data-bbox="863 1507 1098 1619"></td> <td data-bbox="1098 1507 1241 1619"></td> <td data-bbox="1241 1507 1337 1619"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> | TIJELO | POGLED SPRIJEDA |  |  | POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA |  |  | <table border="0" data-bbox="863 1462 1337 1619"> <tr> <td data-bbox="863 1462 1098 1507">TLOCRT</td> <td data-bbox="1098 1462 1241 1507">NACRT</td> <td data-bbox="1241 1462 1337 1507">BOKOCRT</td> </tr> <tr> <td data-bbox="863 1507 1098 1619"></td> <td data-bbox="1098 1507 1241 1619"></td> <td data-bbox="1241 1507 1337 1619"></td> </tr> </table> | | TLOCRT | NACRT | BOKOCRT |  |  |  |
| TIJELO | POGLED SPRIJEDA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| POGLED ODOZGO | POGLED S DESNA | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="0" data-bbox="863 1462 1337 1619"> <tr> <td data-bbox="863 1462 1098 1507">TLOCRT</td> <td data-bbox="1098 1462 1241 1507">NACRT</td> <td data-bbox="1241 1462 1337 1507">BOKOCRT</td> </tr> <tr> <td data-bbox="863 1507 1098 1619"></td> <td data-bbox="1098 1507 1241 1619"></td> <td data-bbox="1241 1507 1337 1619"></td> </tr> </table> | | TLOCRT | NACRT | BOKOCRT |  |  |  | | | | | | | | | | |
| TLOCRT | NACRT | BOKOCRT | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  |  | | | | | | | | | | | | | | | |

Moguće je učenicima ponuditi i složenije zadatke u kojima strane kocke nisu obojene pa su vidljivi svi njeni bridovi. Na stranama se nalaze različite linije koje učenici trebaju prepoznati te ih uklopiti u prikaze tlocrta, nacrta i bokocrta koje sami stvaraju. Slika 11 prikazuje primjer takvog zadatka.

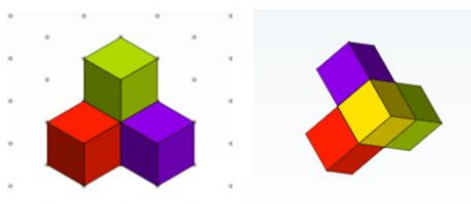


Slika 11. Primjer tijela s vidljivim bridovima i pripadajućih mu tlocrta, nacрта i bokocrta (Baranová i Katreničová, 2018, str. 24)

Geometrija prostora treba uključivati i prepoznavanje geometrijskih svojstava i simetrija u objektima iz stvarnosti i svakodnevice te primjenu geometrijskih transformacija (Čižmešija i sur., 2010). U nastavi bi postupno trebalo smisleno primjenjivati i računalne programe koji potiču razvoj prostornog zora (Glasnović Gracin, 2016). Postoje programi dinamične geometrije u sklopu kojih je moguće koristiti interaktivne izometrijske mreže te prikazivati geometrijske figure. Jedan od njih je Isometric Drawing Tool (Radović i sur., 2012). Slika 12 prikazuje sučelje spomenutog programa, a slika 13 primjer tijela izrađenog u izometrijskog mreži programa te mogućnost manipulacije istim tijelom.



Slika 12. Sučelje programa Isometric Drawing Tool



Slika 13. Primjer tijela izrađenog u programu Isometric Drawing Tool

Promatranje oblika iz različitih perspektiva omogućit će bolje razumijevanje odnosa između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih figura te vizualizaciju promjene njihovog položaja i veličine (Čižmešija i sur., 2010). Sposobnost mentalnog rotiranja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika jedan je od važnih aspekata prostornog mišljenja, a veže se i uz sposobnost iščitavanja i korištenja karata (Kaushish, 2021). Navedena sposobnost odnosi se na mogućnost mentalnog predočavanja objekata i njihovih odnosa prikazanih na karti te na praktičnu primjenu stečenih predodžbi. Program Isometric Drawing Tool nudi različite mogućnosti među kojima su i: stvaranje tijela u izometrijskoj mreži pomoću jednakih kockica, bojanje strana tijela, manipuliranje pojedinačnim dijelovima tijela, rotiranje tijela te mijenjanje njegovog položaja, promatranje njegovog trodimenzionalnog i dvodimenzionalnog prikaza, mogućnost isprinta rada i druge.

Ovim poglavljem predstavljene su spoznaje iz dostupne literature vezane uz metodiku geometrije prostora. Dane su i smjernice za njeno poučavanje u razrednoj nastavi s ciljem osiguranja razvoja prostornog mišljenja i prostornog zora kod učenika. U narednom poglavlju rada analizirani su neki trenutno važeći kurikulumi i TIMSS istraživanje. Analiza je provedena s ciljem razmatranja implementacije teorijskih spoznaja u matematičkom obrazovanju te praktičnih spoznaja povezanih s utjecajem nastave geometrije prostora na učenike.

4. ANALIZA KURIKULUMA

Riječ *curriculum*, u pedagoškom kontekstu, podrazumijeva planiranu interakciju učenika s nastavnim sadržajima i resursima te nastavni proces koji uključuje postupke učenja povezane s definiranim i operacionaliziranim ciljevima učenja (Bognar i Matijević, 1993). U nastavku su dane analize dijelova kurikuluma Republike Hrvatske, TIMSS-a te pojedinih europskih zemalja koji se odnose na geometriju prostora.

4.1. Geometrija prostora u hrvatskim dokumentima

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije trenutno je važeći dokument u Republici Hrvatskoj po pitanju matematičkog obrazovanja pa time i obrazovanja učenika razredne nastave. Slijedi analiza sadržaja geometrije prostora zastupljenih u spomenutom dokumentu, kao i otprije važećim dokumentima koji su njemu prethodili.

4.1.1. *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*

Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj donesena je 2019. godine. Trenutno se primjenjuje za učenike prvih, drugih i trećih razreda osnovne škole, a za učenike četvrtih razreda osnovne škole primjenjivat će se od školske godine 2021./2022. „Učenje i poučavanje nastavnog predmeta Matematike ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena“ (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, NN 7/2019). Pritom pod matematičkim procesima podrazumijevamo prikazivanje i komunikaciju, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjenu tehnologije, dok su domene predmeta redom Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost. U domeni Oblik i prostor naglašena je važnost prostornog zora, koji uz geometrijsko rasuđivanje omogućuje razvoj sposobnosti misaone predodžbe objekta i prostornih odnosa. Navedeno je i kako se domena bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Učenici, prema ovom dokumentu, u sklopu te domene prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnom okružju i upotrebljavaju iste za opis i analizu svijeta koji ih okružuje (NN 7/2019). Slijedi analiza zadanih odgojno-obrazovnih ishoda te predviđenih sadržaja i preporuka za njihovo ostvarivanje u sklopu domene Oblik i prostor za prvi, drugi, treći i četvrti razred osnovne škole – s naglaskom na geometriju prostora.

U prvom razredu učenici trebaju izdvajati i imenovati geometrijska tijela te ih povezivati s oblicima objekata u prostoru. Na tijelima bi trebali moći pronalaziti geometrijske likove koji ih omeđuju. Uz geometrijska tijela, među zadanim sadržajima nalaze se i ravne te zakrivljene plohe. Preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda naglašavaju važnost korištenja konkretnih materijala u nastavi te provođenja aktivnosti u kojima učenici slažu i razlažu različite modele geometrijskih oblika. Za primjer je dana uporaba slagalice tangrama, što se odnosi na ravninski zor. U dokumentu piše da će se provođenjem takvih aktivnosti postaviti dobri temelji za učenje množenja, dijeljenja i drugih sadržaja viših razina. Nije naglašeno na koji će način predviđeni sadržaji i preporuke pridonijeti razvoju prostornog mišljenja i zora. Ono što kurikulum za prvi razred u domeni Mjerenje pretpostavlja je i analiziranje i uspoređivanje objekata iz okoline prema određenim svojstvima, čime učenici mogu uočiti različite prostorne odnose.

Za drugi razred predviđa se povezivanje poznatih geometrijskih objekata i to tako da učenici na geometrijskim tijelima promatraju geometrijske likove, bridove kao dužine i vrhove kao točke. Tim aktivnostima ustvari se razmatraju sadržaji geometrije ravnine, a od aktivnosti predviđenih za razvoj prostornog zora navedeno je samo slaganje i razlaganje modela geometrijskih oblika.

U domeni Oblik i prostor kurikuluma za treći razred nema predviđenih ishoda i sadržaja vezanih uz geometriju prostora. Navedeni su samo ishodi i sadržaji vezani uz geometriju ravnine. Ono što je moguće zamijetiti u domeni Mjerenje je procjenjivanje i mjerenje volumena, ali tekućine.

U četvrtom je razredu predviđeno povezivanje svih poznatih geometrijskih oblika, što uključuje povezivanje pojmova kao što su vrhovi, strane, bridovi i plohe prilikom opisivanja geometrijskih objekata. Kao i u trećem razredu, u sklopu domene Mjerenje nalazi se procjenjivanje i mjerenje volumena (tekućine).

Tablica 6 prikazuje zastupljenost ishoda povezanih s geometrijom prostora.

Tablica 6

Zastupljenost ishoda geometrije prostora u kurikulumu razredne nastave

| Razred | Ukupan broj ishoda | Broj ishoda povezanih s geometrijom prostora | Zastupljenost |
|--------|--------------------|--|---------------|
| 1. | 12 | 2 | 17 % |
| 2. | 15 | 1 | 7 % |
| 3. | 15 | 1 | 7 % |
| 4. | 14 | 2 | 14 % |

Moguće je zamijetiti minimalnu prisutnost geometrije prostora u kurikulumu te potvrditi navod o diskontinuitetu od prvog do četvrtog razreda. Također, sadržaji predviđeni u domeni Oblik i prostor uglavnom se odnose na geometriju ravnine, dok je od sadržaja geometrije prostora moguće uočiti samo one povezane s geometrijskim tijelima, koji ponajprije služe kao modeli za promatranje elemenata karakterističnih za ravninu.

4.1.2. Nastavni plan i program za osnovnu školu

Nastavni plan i program za osnovnu školu u Republici Hrvatskoj donesen je 2006. godine i počeo se primjenjivati školske godine 2006./2007. (Nastavni plan i program za osnovnu školu, NN 102/2006). Dokument vrijedi do kraja školske godine 2020./2021. za četvrti razred osnovne škole (NN 7/2019). U Nastavnom planu i programu za nastavni predmet Matematika od trodimenzionalnih geometrijskih oblika spominju se geometrijska tijela, koja se poučavaju isključivo na razini prepoznavanja na početku prvog razreda osnovne škole. U četvrtom se razredu uče mjerne jedinice za obujam te računanje obujma kocke i tekućine (Glasnović Gracin, 2016; Glasnović Gracin i Kuzle, 2019). Kako se taj sadržaj poučava na kraju nastavne godine, nerijetko ga učitelji preskaču kako bi bolje uvježbali sadržaj aritmetike (npr. postupak pisanog dijeljenja), s ciljem bolje pripreme učenika za predmetnu nastavu. I sami govore kako su skloni reduciranju sadržaja geometrije kada su u zaostacima (Glasnović Gracin, 2016).

Kovačević (2016) navodi kako je u svome diplomskom radu kolegica Vanja Lilić istaknula analizu udjela geometrijskih tema unutar matematičkih tema određenih Nastavnim planom i programom. Od 97 matematičkih tema u razrednoj nastavi pokazalo se da je prisutno samo 29,9 % geometrijskih, dok ostale pripadaju aritmetici. Također, ukupni udio tema iz geometrije prostora od prvog do osmog razreda iznosi 4,39 %, odnosno 10 od čak 228 matematičkih tema. Istraživanjem u sklopu rada pokazano je i kako postoji veliki vremenski razmak između obrada dviju prostornih tema (Kovačević, 2016). Slika 14 prikazuje broj tema iz geometrije i geometrije prostora te udio tema iz geometrije prostora koje se nalaze u Nastavnom planu i programu za Matematiku od prvog do osmog razreda osnovne škole.

| Razred | Broj tema iz geometrije | Broj tema iz geometrije prostora | Udio |
|--------|-------------------------|----------------------------------|---------|
| 1. | 6 | 1 | 16.67 % |
| 2. | 2 | 0 | 0 % |
| 3. | 8 | 0 | 0 % |
| 4. | 13 | 1 | 7.69 % |
| 5. | 8 | 0 | 0 % |
| 6. | 13 | 0 | 0 % |
| 7. | 10 | 0 | 0 % |
| 8. | 18 | 8 | 44.44 % |
| ukupno | 78 | 10 | 12.82 % |

Slika 14. Zastupljenost geometrije prostora u Nastavnom planu i programu (Kovačević, 2016, str. 200)

Vidljivo je da je u Nastavnom planu i programu za razdoblje od prvog do osmog razreda osnovne škole od ukupno 78 tema iz geometrije prisutno samo njih 10 vezanih uz geometriju prostora, što iznosi 12,82 %. Od tih 10 tema samo su 2 pretpostavljene za razrednu nastavu i to za prvi i četvrti razred. U Nastavnom planu i programu tema iz geometrije prostora u drugom i trećem razredu nema.

4.1.3. Nacionalni okvirni kurikulum

Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje donesen je 2011. godine. Dokumentom su, između ostalog, predstavljene osnovne sastavnice općega obveznoga odgoja i obrazovanja, što se odnosi i na razrednu nastavu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa [MZOŠ], 2011). Trebao je poslužiti kao temelj za izradu predmetnih kurikuluma pa tako i kurikuluma predmeta Matematike.

Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu (MZOŠ, 2011), razredna nastava pripada prvome od četiri u dokumentu opisana odgojno-obrazovna ciklusa. Za učenike je u Nacionalnom okvirnom kurikulumu u sklopu matematičkog koncepta Oblik i prostor određeno da će na kraju prvog obrazovnog ciklusa moći opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata. Također, moći će prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati plohe i jednostavne trodimenzionalne oblike i njihove dijelove te prepoznati i prikazati jednostavne prostorne oblike u različitim položajima. Uz to je navedeno da će moći i istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja prostornih oblika

uporabom stvarnih materijala poput kockica ili maketa geometrijskih tijela te prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevici. U konceptu Mjerenje navodi se da će nakon prvog odgojno-obrazovnog ciklusa učenici moći: usporediti i procijeniti obujam te ga izmjeriti rabeći odgovarajuće mjerne uređaje, navesti i rabiti standardne mjerne jedinice za obujam (litre) u svakodnevici te moći odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta u svakodnevnim situacijama i mjerenje primijeniti prilikom rješavanja problema (MZOŠ, 2011). Među ostalim općim ciljevima matematičkog obrazovanja, u prijedlogu dokumenta navedeno je i da će učenici biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje. Od očekivanih učeničkih postignuća na kraju određenog odgojno-obrazovnog ciklusa navedena su: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije. Svi navedeni procesi međusobno su povezani i ne poučavaju se kao zasebne nastavne cjeline, nego ih je potrebno uklopiti u nastavne sadržaje i sve cikluse učenja matematike (Čižmešija i sur., 2010) pa tako i geometrije prostora.

Iz navedenog možemo zaključiti da su Nacionalnim okvirnim kurikulumom ponuđene jasne smjernice vezane uz očekivana učenička postignuća po pitanju matematičkih procesa i koncepata pa tako i koncepata Oblika i prostora te Mjerenja. Pretpostavljena postignuća bila su usmjerena prema razvoju prostornog mišljenja i prostornog zora.

4.2. Geometrija prostora u TIMSS-ovom kurikulumu i istraživanju

TIMSS je međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja koje se provodi u sklopu organizacije IEA. Pritom kratica TIMSS označava naziv *Trends in International Mathematics and Science Study*, a IEA *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, što bi značilo Međunarodno udruženje za vrednovanje obrazovnih postignuća (Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja [NCVVO], 2021). Istraživanje se provodi svake četiri godine i, između ostalog, pruža pregled trendova o globalnim postignućima učenika iz područja matematike. Osmišljeno je kako bi odgovorne u obrazovanju upoznalo s navedenim trendovima. U Hrvatskoj istraživanje provodi Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja u suradnji s IEA te uz potporu Ministarstva znanosti i obrazovanja (NCVVO, 2021).

„TIMSS se koristi široko definiranim kurikulumom kao glavnim konceptom pri razmatranju načina pružanja obrazovnih mogućnosti i čimbenika koji utječu na način kako se učenici koriste tim mogućnostima“ (Mullis i Martin, 2017, str. 4). Kurikulum je temeljen na

trima sadržajnim i trima kognitivnim domenama. Sadržajne domene su domena brojeva, domena mjerenja i geometrijskih oblika te domena prikaza podataka. Kognitivnim domenama pripadaju domena činjeničnog znanja, domena primjene znanja i domena zaključivanja. Tablice 7 i 8 prikazuju spomenute domene i njihovu zastupljenost u sklopu TIMSS istraživanja 2011., 2015. i 2019. godine u kojima su sudjelovali učenici četvrtih razreda osnovne škole u Republici Hrvatskoj (NCVVO, 2021).

Tablica 7

Zadana zastupljenost sadržajnih domena u TIMSS istraživanjima (NCVVO, 2012, 2017, n.d.)

| Sadržajna domena | Zastupljenost | | |
|---|---------------|-------|-------|
| | 2011. | 2015. | 2019. |
| Brojevi | 50 % | 50 % | 50 % |
| Geometrijski likovi i mjerenje (2011.) / Geometrijski likovi, geometrijska tijela i mjerenje (2015.) / Mjerenje i geometrijski oblici (2019.) | 35 % | 35 % | 30 % |
| Prikaz podataka | 15 % | 15 % | 20 % |

Tablica 8

Zadana zastupljenost kognitivnih domena u TIMSS istraživanjima (NCVVO, 2012, 2017, n.d.)

| Kognitivna domena | Zastupljenost | | |
|--|---------------|-------|-------|
| | 2011. | 2015. | 2019. |
| Činjenično znanje (2011. i 2019.) / Pamćenje (2015.) | 40 % | 40 % | 40 % |
| Primjena (2011.) / Primjena znanja (2015. i 2019.) | 40 % | 40 % | 40 % |
| Zaključivanje | 20 % | 20 % | 20 % |

Glasnović Gracin i Kuzle (2019) kao jedan od mogućih uzroka smanjenja udjela geometrijskih sadržaja, unutar kurikulumu općenito, navode i samo TIMSS istraživanje, koje uvelike utječe na strukturu i zahtjeve mnogih nacionalnih kurikulumu. Ono što je vidljivo u tablicama po pitanju zastupljenosti kognitivnih domena jest da je njihova zastupljenost kontinuirana, odnosno da su postoci zastupljenosti pojedinih kognitivnih domena u sva tri navedena ciklusa istraživanja bili jednaki. S druge strane, moguće je primijetiti da se zastupljenost domene mjerenja i geometrijskih oblika u ciklusu istraživanja iz 2019. godine smanjila u odnosu na prethodna dva ciklusa. Naime, zastupljenost domene Geometrijski likovi

i mjerenje 2011. godine te domene Geometrijski likovi, geometrijska tijela i mjerenje 2015. iznosila je 35%, dok je zastupljenost domene Mjerenje i geometrijski oblici 2019. iznosila 30%. Time se zastupljenost domene Prikaza podataka povećala za 5 postotnih bodova, dok je zastupljenost domene Brojeva ostala nepromijenjena. Postavlja se pitanje zašto su reducirani upravo sadržaji domene Mjerenja i geometrijskih oblika, a ne, primjerice, domene Brojeva koja je najzastupljenija te ima li ta redukcija zaista dugoročno utjecaj na zastupljenost geometrijskih sadržaja unutar nacionalnih kurikuluma pa tako i hrvatskog.

Sadržajne domene kurikuluma obuhvaćaju nekoliko tematskih cjelina, a svaka od njih sadrži nekoliko tema. Domena Mjerenje i geometrijski oblici sastoji se od dviju tematskih cjelina, a to su mjerenje i geometrija (Mullis i Martin, 2017). Pritom je njihova zastupljenost u kurikulumu podjednaka, za obje iznosi 15%. Prema kurikulumu, učenici bi na kraju četvrtog razreda osnovne škole trebali moći rješavati probleme vezane za volumen, određivati volumene pomoću kocki, prepoznati svojstva i karakteristike raznih trodimenzionalnih oblika, opisati i nacrtati razne geometrijske oblike te analizirati geometrijske odnose i njima se služiti u rješavanju zadataka. Kurikulum ističe razvoj prostorne sposobnosti kao sastavni dio učenja geometrije. Tematska cjelina mjerenja, među ostalim sadržajima, podrazumijeva rješavanje problemskih zadataka vezanih za volumen (u mililitrima i litrama) te rješavanje problema vezanih za volumene ispunjene kockama. Cjelina geometrije obuhvaća upotrebu osnovnih svojstava za opisivanje i usporedbu trodimenzionalnih oblika kao što su kocka, kvadar, stožac, valjak i kugla te njihovo povezivanje s dvodimenzionalnim prikazima koji im odgovaraju.

Činjenična znanja podrazumijevaju sljedeće matematičke postupke: prisjećanje, prepoznavanje, razvrstavanje ili nizanje, računanje, pronalaženje i mjerenje. Tablica 9 prikazuje primjere matematičkih postupaka koji se odnose na sadržaje geometrije prostora u TIMSS-u.

Tablica 9

Primjeri matematičkih postupaka u domeni činjeničnih znanja (Mullis i Martin, 2017)

| Matematički postupak | Primjer |
|---------------------------|---|
| Prisjećanje | Prisjećanje definicija, nazivlja, mjernih jedinica i geometrijskih svojstava. |
| Prepoznavanje | Prepoznavanje oblika. Prepoznavanje zasebnih jedinica koje su matematički jednake (npr. različitih orijentacija jednostavnih geometrijskih oblika). |
| Razvrstavanje ili nizanje | Razvrstavanje oblika prema zajedničkim svojstvima. |
| Mjerenje | Odabir odgovarajućih mjernih jedinica. |

Domena primjene znanja uglavnom se odnosi na rješavanje problemskih zadataka koji se mogu odnositi na stvarne životne situacije ili na računske operacije koje uključuju i geometrijske oblike. Jedan od matematičkih postupaka koje domena podrazumijeva je prikazivanje ili oblikovanje. Primjerice, učenici mogu crtati geometrijske oblike koji prikazuju određene problemske situacije.

Zaključivanje podrazumijeva sposobnost logičkog, sustavnog razmišljanja i uključuje intuitivno i induktivno zaključivanje. Spomenuti oblici zaključivanja primjenjuju se pri rješavanju zadataka koji mogu biti isključivo matematički ili se odnositi na situaciju iz stvarnosti. Neke od kognitivnih vještina obuhvaćenih domenom zaključivanja su: analiza, integracija ili sinteza, procjena, izvođenje zaključaka, poopćavanje i potkrepljivanje (Mullis i Martin, 2017).

U TIMSS-ovom kurikulumu prisutne su Wittmannove fundamentalne ideje. Među zastupljenijim idejama su Geometrijski oblici i njihove konstrukcije, Mjerenje te Oblici iz svakodnevice. Iako kurikulumom nisu konkretno određeni ishodi povezani s određivanjem, odnosno opisivanjem pozicija objekata, što odgovara ideji Koordinata, kao ni ishodi povezani s idejom Operacija s oblicima, jasno je naznačeno da je kurikulum usmjeren na razvoj prostorne sposobnosti, koji spomenute ideje podrazumijevaju. U kurikulumu je naglasak stavljen i na kvalitativno i kvantitativno mjerenje, što se očituje u pretpostavci njegovog dvojakog određivanja, određivanjem volumena ispunjenih kockama te rješavanjem problemskih zadataka koristeći mjerne jedinice (ml i l).

Glasnović Gracin i Kuzle (2019) ističu kako je u TIMSS-ovim istraživanjima općenito zastupljenost geometrijskih zadataka manja u odnosu na domenu brojeva. Pitanje je kolika je zastupljenost zadataka vezanih uz geometriju prostora unutar tih geometrijskih zadataka i koliko su učenici uspješni u njihovom rješavanju. U vrijeme izrade ovog rada nisu bili javno dostupni svi zadatci istraživanja iz 2019. godine niti podatci o uspjehu učenika u njihovom rješavanju. Stoga su u daljnjem tekstu navedeni primjeri zadataka istraživanja vezanih uz sadržaj geometrije prostora te uspjeh učenika u zadacima geometrije prostora na primjeru TIMSS istraživanja iz 2015. godine.

4.2.1. Primjeri i zastupljenost zadataka geometrije prostora u istraživanju

U ovome radu izračunate su relativne frekvencije zastupljenosti zadataka u TIMSS ispitivanju iz 2015. godine. Pritom je stavljen naglasak na zastupljenost zadataka geometrije općenito, zadataka koji se odnose na tematsko područje geometrijskih likova i tijela te zasebno zadataka koji se odnose isključivo na geometriju prostora. Izračunata je i zastupljenost zadataka

geometrije prostora ovisno o kognitivnoj domeni kojoj pripadaju. Analizom sadržajnih domena i udjela zadataka povezanih sa svakom od njih moguće je uočiti dominaciju onih zadataka povezanih s domenom Brojevi. Tablica 10 prikazuje sadržajne domene, broj zadataka povezanih sa svakom od njih te udio zadataka određene sadržajne domene.

Tablica 10

Prisutnost zadataka pojedinih domena u istraživanju

| Sadržajna domena | Broj zadataka | Zastupljenost zadataka |
|---|---------------|------------------------|
| Brojevi | 93 | 54 % |
| Geometrijski likovi, geometrijska tijela i mjerenje | 55 | 32 % |
| Prikaz podataka | 24 | 14 % |

Iz tablice 10 vidljivo je da zastupljenost zadataka iz domene Geometrijski likovi, geometrijska tijela i mjerenje iznosi 32%, što se razlikuje od podatka iz tablice 7, u kojoj navedena zastupljenost iznosi 35%. Zadatci u domeni pripadaju jednom od dva TIMSS tematska područja, a to su Točke, pravci i kutovi te Geometrijski likovi i geometrijska tijela. Tablica 11 prikazuje prisutnost zadataka iz navedenih tematskih područja.

Tablica 11

Prisutnost zadataka iz tematskih područja Točke, pravci i kutovi i Geometrijski likovi i geometrijska tijela

| Tematsko područje | Broj zadataka | Zastupljenost zadataka |
|------------------------------|---------------|------------------------|
| Točke, pravci i kutovi | 23 | 42 % |
| Geometrijski likovi i tijela | 32 | 58 % |

Uočljivo je da su zadatci tematskog područja Geometrijskih likova i tijela zastupljeniji u odnosu na tematsko područje Točaka, pravaca i kutova. Te zadatke moguće je podijeliti na one koji su vezani uz geometriju ravnine te one vezane uz geometriju prostora. U tablici 12 prikazan je broj i zastupljenost jednih i drugih.

Tablica 12

Zadatci vezani uz geometriju ravnine i geometriju prostora

| Područje | Broj zadataka | Zastupljenost zadataka |
|---------------------|---------------|------------------------|
| Geometrija ravnine | 18 | 56 % |
| Geometrija prostora | 14 | 44 % |

Tablica 10 pokazuje veću zastupljenost zadataka vezanih uz geometriju ravnine. Svi zadatci istraživanja pripadaju i jednoj od triju kognitivnih domena pa tako i zadatci geometrije

prostora. Tablica 13 prikazuje broj zadataka vezanih uz geometriju prostora ovisno o kognitivnoj domeni kojoj pripadaju te njihovu zastupljenost.

Tablica 13

Zastupljenost zadataka geometrije prostora ovisno o kognitivnim domenama

| Kognitivna domena | Broj zadataka | Zastupljenost |
|-------------------|---------------|---------------|
| Pamćenje | 2 | 14 % |
| Primjena znanja | 4 | 29 % |
| Zaključivanje | 8 | 57 % |

Iz podataka je vidljiva dominacija onih zadataka u kojima učenici trebaju zaključivati. U nastavku teksta nalaze se primjeri zadataka vezani uz geometriju prostora koji su bili prisutni u ciklusu TIMSS istraživanja 2011. godine, sličnih zadatcima istraživanja iz 2015. godine. Tablice 14, 15 i 16 prikazuju opise zadataka, tipove zadataka, procjenu njihove težine i preporuku za poučavanje geometrije prostora na način kojim bi se učenici susretali s takvim i sličnim zadatcima te njihovim uspješnim rješavanjem razvijali geometrijsko mišljenje. Svi podatci prikazani u tablicama dani su u sklopu rada *Priručnik za unapređivanje nastave matematike s primjerima zadataka iz međunarodnoga istraživanja TIMSS 2015*. Svaki se zadatak istraživanja nalazi pod šifrom koja mu je u sklopu istraživanja dodijeljena.

Tablica 14

Primjeri zadataka iz TIMSS istraživanja 2015. godine – kognitivna domena Pamćenje (NCVVO, 2017)

| Šifra | Tip zadatka | Procjena težine | Opis | Preporuka za nastavu |
|---------|---|-----------------|--|---|
| M051221 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Lagan | Zadatak je prikazivao skiciranu uspravnu četverostranu piramidu. Trebalo je prepoznati likove od kojih se mreža zadanog geometrijskog tijela sastoji te prebrojati trokute među njima. | Na modelima geometrijskih tijela detaljnije određivati strane geometrijskih tijela, prebrojavati njih, bridove i vrhove te prikazivati geometrijska tijela skicama u ravnini. |
| M041254 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Srednje težak | Zadatak je prikazivao skicu kocke u ravnini tako da su njeni vidljivi bridovi bili iscrtani punim linijama, a <i>nevidljivi</i> isprekidanim linijama. Trebalo je odrediti broj bridova kocke. | Već od prvog razreda, uz prepoznavanje, imenovanje i uočavanje sličnih oblika u neposrednoj okolini, učenicima približiti skice geometrijskih tijela u ravnini. Potrebno je |

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | povezivati modele geometrijskih tijela s njihovim skicama. Preporučuje se i izrada dodatnih didaktičkih materijala (npr. plakata s crtežima geometrijskih tijela). |
|--|--|--|--|--|

Tablica 15

Primjeri zadataka iz TIMSS istraživanja 2015. godine – kognitivna domena Primjena znanja (NCVVO, 2017)

| Šifra | Tip zadatka | Procjena težine | Opis | Preporuka za nastavu |
|---------|---|-----------------|---|--|
| M061269 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Lagan | Zadatak je bio prepoznati geometrijsko tijelo kojemu su zadane gornja i donja ploha. Bio je zadan riječima te sadržavao skicu gornje i donje plohe. Površina gornje bila je manja od površine donje. | Uvježbavanje pomoću predmeta iz neposredne okoline. |
| M051236 | Zadatak otvorenoga tipa | Srednje težak | Zadatak je bio odrediti položaj objekata u koordinatnoj kvadratnoj mreži. Koordinate su bile imenovane stranama svijeta (sjever i jug). Bio je ponuđen i jedan prethodno riješen primjer. | Uvježbavanje kvadratne mreže ucrtavanjem objekta uz zadane koordinate te očitavanjem koordinata objekata unutar kvadratne mreže. |
| M041333 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Težak | Zadatak je bio zadan riječima te sadržavao skicu kutije u obliku kvadra koja je u potpunosti bila ispunjena jednakim kockama. Strane kocka smještene s prednje, bočne i gornje strane kutije bile su jasno vidljive. Trebalo je prebrojiti kocke u kutiji, a zadatkom je ispitivan prostorni zor. | Intenzivno razvijanje prostornog zora od prvog razreda osnovne škole pomoću predmeta iz neposredne okoline, primjerice kockica, uz postupno prelaženje na skice. |

| | | | | |
|---------|------------------------|------------|---|---|
| M061266 | Zadatak otvorenog tipa | Vrlo težak | Zadatak je bio zadan riječima i tablično, a u prvome stupcu tablice nalazile su se četiri skice geometrijskih tijela. U druga dva stupca trebalo je upisati broj geometrijskih likova koji omeđuju skicirana tijela. Time je ispitivana primjena znanja o odnosu geometrijskih likova prema geometrijskim tijelima. | Od prvoga razreda osnovne škole imenovati i uočavati predmete u obliku geometrijskih tijela u neposrednoj okolini. Upoznavati učenike s prikazom istih u ravnini. Izrađivati dodatne didaktičke materijale (plakati s prikazom geometrijskih tijela u ravnini). |
|---------|------------------------|------------|---|---|

Tablica 16

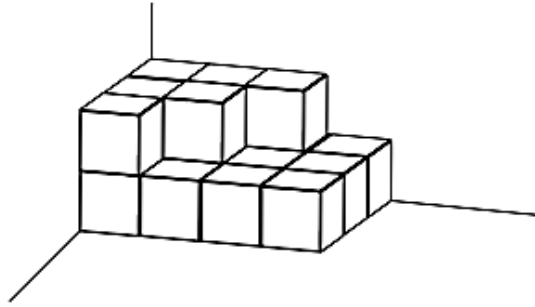
Primjeri zadataka iz TIMSS istraživanja 2015. godine – kognitivna domena Zaključivanje (NCVVO, 2017)

| Šifra | Tip zadatka | Procjena težine | Opis | Preporuka za nastavu |
|---------|---|-----------------|--|---|
| M051211 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Lagan | Određivanje tlocrta različitih geometrijskih tijela pomoću kocaka jednakog volumena u nepravilnome geometrijskom tijelu. | Uvođenje igara slaganja različitih geometrijskih tijela sastavljenih od kocaka jednakog volumena. Slaganje geometrijskih tijela prema skici. Promatranje zadanih geometrijskih tijela odozgo i crtanje tlocrta. |
| M051129 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Lagan | Zadatak je sadržavao skice četiriju nepravilnih geometrijskih tijela sastavljenih od kocaka jednakog volumena. Trebalo je zaključiti koje od njih ima najveći volumen. | Uvođenje igara slaganja različitih geometrijskih tijela sastavljenih od kocaka jednakog volumena. Učenike navoditi na zaključivanje o tome koliko je kocaka vidljivo, a koliko ne. Ponuditi učenicima |

| | | | | |
|---------|---|---------------|---|--|
| | | | | dvodimenzionalne skice različitih tijela sastavljenih od spomenutih kocaka. |
| M061076 | Zadatak otvorenog tipa | Lagan | Zadatak je bio zadan riječima i sadržavao dvije skice. Na jednoj skici bila je prikazana kocka i na njenim trima vidljivim stranama nacrtane oznake. Na dvjema je bila nacrtana jedna oznaka, a na trećoj druga. Na drugoj je skici bila prikazana mreža kocke s jednom oznakom manje. Na mreži kocke je trebalo nacrtati oznaku na odgovarajućem mjestu. | Uvođenje izrade kocke od papira radi zornog prikaza. Sadržaje geometrije prostora uključiti u svim razredima razredne nastave. Koristiti mreže geometrijskih tijela te povezivati matematičke sadržaje sa sadržajima Prirode i društva (tlocrt, plan, maketa). |
| M061077 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Srednje težak | Zadatak je bio zadan riječima te sadržavao skicu koja je prikazivala geometrijsko tijelo sastavljeno od dviju kocaka, valjka i stošca. Trebalo je među zadanim tlocrtima prepoznati onaj koji prikazuje tlocrt tijela sa skice. | Koristiti modele geometrijskih tijela te ih promatrati u različitim položajima i iz različitih perspektiva te ih crtati ili slagati tijela prema zadanim crtežima. |
| M061108 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Srednje težak | U zadatku je trebalo zaključiti koja mreža predstavlja mrežu geometrijskog tijela sa skice. Na skici je bila prikazana pravilna | Učenike upoznati s mrežama geometrijskih tijela. Moguće ih izrađivati i u sklopu nastave Likovne kulture (izrada kutija). |

| | | | | |
|---------|---|---------------|--|---|
| | | | šesterostrana prizma. | |
| M051533 | Zadatak otvorenog tipa | Srednje težak | Zadatak je bio zadan riječima i skicom koja je prikazivala dva kvadra različitog volumena. Oba su imala dvije jednake dimenzije, a treća dimenzija većeg kvadra bila je višekratnik treće dimenzije manjeg. Trebalo je odrediti broj kvadara manjeg volumena koji stanu u kvadar većeg volumena. | Ranije uvrštavanje sadržaja vezanih uz kvadar u nastavu. |
| M041151 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Srednje težak | U zadatku su bile ponuđene četiri mreže, od kojih je samo jedna predstavljala mrežu kocke, a učenici su trebali odrediti koja. | Uvesti veći broj raznolikih zadataka kojima se ispituje pojam mreže kocke. |
| M051115 | Zadatak zatvorenog tipa s četirima ponuđenim odgovorima od kojih je jedan točan | Vrlo težak | Zadatak je bio zadan riječima te sadržavao skice mreža geometrijskih likova sastavljenih od kvadrata. Trebalo je prepoznati koja od njih predstavlja traženo geometrijsko tijelo. | Učenike upoznati s mrežama geometrijskih tijela. Moguće ih izrađivati i u sklopu nastave Likovne kulture (izrada kutija). |

Zadatak na slici 15 prikazuje primjer zadatka koji je bio među zadacima TIMSS istraživanja iz 2011. godine, a sličan je zadatku pod šifrom M051129 iz istraživanja 2015. godine. Slika 16 prikazuje drugi primjer zadatka iz istraživanja 2011. godine, koji je prema sadržaju sličan zadacima iz 2015. pod šifrom M061108 i M051115. Zadatak na slici 17 primjer je još jednog zadatka iz istraživanja 2011. godine, a sličan je zadatku pod šifrom M051236 iz 2015. godine.

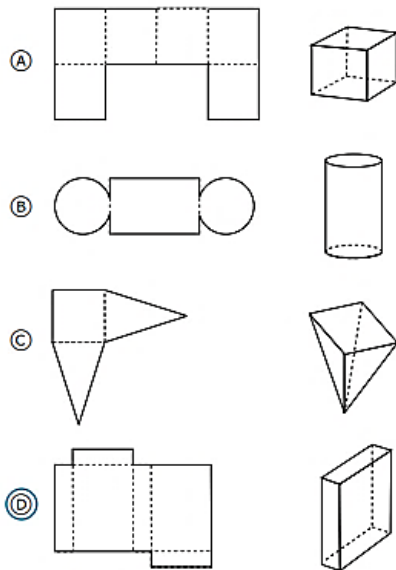


Ana slaže kocke u kut sobe. Sve su kocke iste veličine. Koliko je kocaka upotrijebila?

- (A) 25
- (B) 19
- (C) 18
- (D) 13

Slika 15. Primjer zadatka geometrije prostora koji ispituje prostorni zor (NCVVO, 2017, str. 34)

Ina je pronašla sljedeće predloške za sastavljanje kutija. Prema kojem se predlošku može sastaviti kutija koja je nacrtana pokraj njega?



Slika 16. Primjer zadatka geometrije prostora koji uključuje prepoznavanje mreža geometrijskih tijela (NCVVO, 2017, str. 34)

Ovo je karta Lucijina grada. Tržnica se nalazi na položaju C2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---------|---|---|-------|---|----------|---|
| 8 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | škola | | | |
| 5 | | | | X | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | trgovina | |
| 2 | | | tržnica | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | |
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |

A. Koji je položaj trgovine?

Trgovina se nalazi na položaju H3

B. Lucijina kuća je na položaju D5. Ucrtaj na kartu znak X da pokažeš gdje se nalazi Lucijina kuća.

Slika 17. Primjer zadatka geometrije prostora koji uključuje određivanje položaja objekata u koordinatnoj kvadratnoj mreži (NCVVO, 2017, str. 130)

Vidljivo je da je većina zadataka usmjerena na ispitivanje razvijenosti prostornog mišljenja i prostornog zora, a ne, primjerice, točnog računanja volumena tijela. Preporuke za nastavu obuhvaćaju korištenje različitih trodimenzionalnih modela u nastavi, mreža tijela, dvodimenzionalnih prikaza trodimenzionalnih tijela u ravnini. Također, uključuju određivanje položaja objekata pomoću kvadratnih mreža. Preporučuje se i crtanje i slaganje tijela iz neposredne okoline, izrada mreža geometrijskih tijela te korelacija sadržaja nastave Matematike s nastavom Prirode i društva i Likovne kulture.

4.2.2. Uspjeh učenika u rješavanju zadataka geometrije prostora

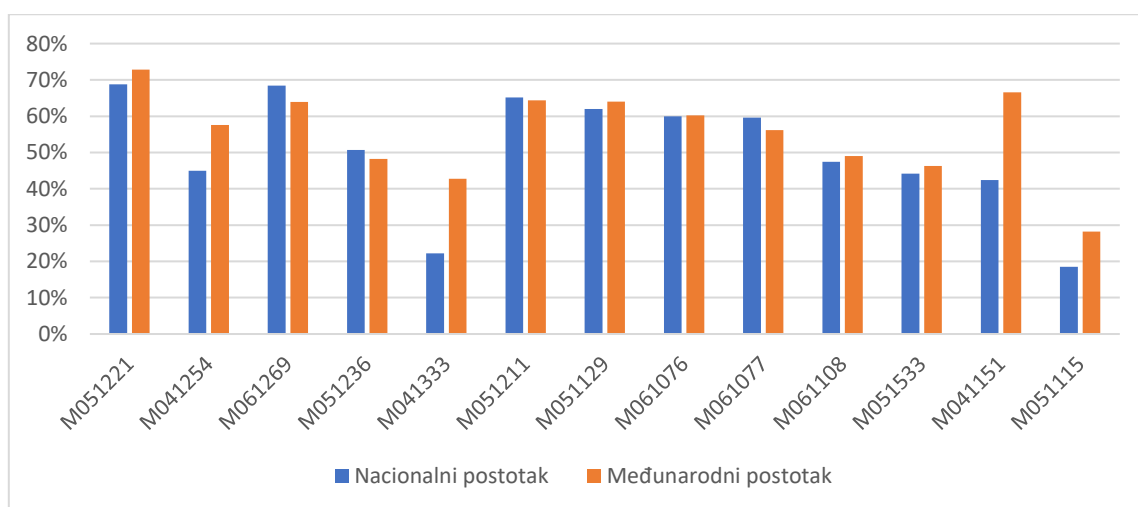
Već je spomenuto kako je zamijećen trend poboljšanja rezultata u svim sadržajnim domenama tijekom triju ciklusa TIMSS istraživanja u kojim su sudjelovali učenici četvrtih razreda osnovnih škola u Republici Hrvatskoj. Istraživanje je pokazalo da su viša postignuća povezana s pohađanjem ranog i predškolskog odgoja i obrazovanja te češćom aktivnosti roditelja u ranoj dobi vezano uz predmatematičku pismenost (NCVVO, 2021). Najveći uspjeh u ciklusu istraživanja iz 2015. godine zabilježen je u sadržajnoj domeni Geometrijskih likova, geometrijskih tijela i mjerenja. Prosječni rezultat ostvarenih bodova u toj domeni iznosio je 22 boda više u odnosu na 2011. godinu (NCVVO, 2017). Pitanje je koliko su učenici u sklopu te

sadržajne domene bili uspješni u rješavanju zadataka vezanih uz geometriju prostora. Tablica 17 prikazuje hrvatske nacionalne te međunarodne postotke riješenosti zadataka geometrije prostora.

Tablica 17

Postotak riješenosti zadataka geometrije prostora (NCVVO, 2017)

| Šifra zadatka | Nacionalni postotak (HR) | Međunarodni postotak |
|---------------|--------------------------------|-------------------------------|
| M051221 | 68,8 % | 72,8 % |
| M041254 | 45 % | 57,6 % |
| M061269 | 68,4 % | 63,9 % |
| M051236 | 50,7 % | 48,2 % |
| M041333 | 22,2 % | 42,8 % |
| M061266 | 16,3 % (2 boda) 12,4 % (1 bod) | 25 % (2 boda), 15,6 % (1 bod) |
| M051211 | 65,2 % | 64,4 % |
| M051129 | 62 % | 64 % |
| M061076 | 60 % | 60,2 % |
| M061077 | 59,6 % | 56,2 % |
| M061108 | 47,4 % | 49 % |
| M051533 | 44,2 % | 46,3 % |
| M041151 | 42,4 % | 66,6 % |
| M051115 | 18,5 % | 28,2 % |



Slika 18. Usporedba nacionalnog uspjeha u odnosu na međunarodni

Graf na slici 18 prikazuje usporedbu uspjeha učenika Republike Hrvatske u rješavanju zadataka geometrije prostora s međunarodnim uspjehom. Učenici četvrtih razreda osnovnih škola u Republici Hrvatskoj postigli su natprosječne rezultate u četirima zadacima, a to su zadatci koji se nalaze pod šifrom M061269, M051236, M051211 i M061077. Riječ je o zadacima u kojima treba prepoznati geometrijsko tijelo na osnovi njegovih naznačenih ploha, odrediti tlocrte prikazanih tijela te odrediti položaj objekata u koordinatnoj kvadratnoj mreži. Znatna odstupanja uspjeha učenika Republike Hrvatske u odnosu na međunarodni uspjeh moguće je primijetiti kod zadataka M041254, M041333, M041151 i M051115. To bi značilo da većina hrvatskih ispitanika postiže ispodprosječne rezultate u zadacima u kojima trebaju odrediti broj bridova kocke, u kojima se ispituje prostorni zor i u kojima trebaju prepoznati mrežu geometrijskog tijela ili ju povezati s odgovarajućim geometrijskim tijelom. Učenici najbolje rješavaju zadatak u kojem je trebalo odrediti geometrijske likove koji čine mrežu zadanog geometrijskog tijela, a točno ga rješava njih 68,8 %. Tek 6 od 12 zadataka točno uspijeva riješiti više od polovice učenika. Najviše poteškoća učenici su imali prilikom rješavanja zadataka M051115 i M041333, a zadatci su uključivali prepoznavanje mreža prikazanih geometrijskih tijela te ispitivanje prostornog zora prebrojavanjem kocaka unutar kutije (pritom nisu sve kocke bile vidljive).

4.3. Geometrija prostora u kurikulumima drugih zemalja

Tijekom 2005. i 2006. godine od strane MZOŠ-a proveden je istraživački projekt pod nazivom *Evaluacija nastavnih programa i razvoj modela kurikuluma za obavezno obrazovanje* koji je, između ostalog, obuhvaćao analizu okvirnih nacionalnih kurikulumskih dokumenata za obvezno obrazovanje (Čižmešija, 2006). Dio istraživanja odnosio se i na dijelove kurikuluma vezane uz nastavu matematike. Čižmešija (2006) navodi kako su u istraživanju bili uključeni kurikulumi i nastavni planovi europskih zemalja, među kojima su bili i dokumenti zemalja razvijenih i dokazano uspješnih obrazovnih sustava (Finska, Škotska i druge), zemalja koje su značajno utjecale na razvoj hrvatskog sustava odgoja i obrazovanja (Austrija, Njemačka) te Hrvatskoj susjednih zemalja sa sličnim obrazovnim tradicijama (Slovenija, Mađarska). Po uzoru na odabir zemalja u navedenom istraživanju, u sklopu ovog rada prikazana je analiza triju primjera kurikuluma, kurikuluma Slovenije, Njemačke i Škotske, usmjerena na geometriju prostora.

4.3.1. Slovenija

U Sloveniji se poučavanje temelji na *Nastavnom planu i programu za osnovnu školu*, donesenom 2011. godine (Mullis, Martin, Goh i Cotter, 2016). Dokument obuhvaća i plan i program za nastavni predmet Matematika. Osnovnoškolsko obrazovanje podijeljeno je na tri obrazovna razdoblja, od kojih se prvo odnosi na prvi, drugi i treći razred, drugo na četvrti, peti i šesti, a treće na sedmi, osmi i deveti razred. U planu i programu navedeno je što se poučava u kojem razdoblju. Svako obrazovno razdoblje određeno je trima glavnim temama u poučavanju, a to su Geometrija i mjerenje, Aritmetika i algebra te Drugi sadržaji (Ministrstvo RS za šolstvo in šport [MZŠŠ], 2011). U nastavku slijedi analiza teme Geometrija i mjerenje za prvo obrazovno razdoblje, koje podrazumijeva prva tri razreda osnovne škole.

U Geometriji i mjerenju naglasak je stavljen na: razvoj prostornog mišljenja i prostornog zora, učenje o geometrijskim elementima, razvoj sposobnosti orijentacije u prostoru, učenje o važnosti korištenja standardnih jedinica te osnovnih mjernih jedinica, korištenje osnovnih geometrijskih alata te prepoznavanje i opisivanje određenih transformacija geometrijskih elemenata.

U sklopu Geometrije i mjerenja nalaze se i *podteme*, a to su orijentacija, geometrijski oblici i korištenje geometrijskih alata, transformacije te mjerenje. Prva od njih, orijentacija, uključuje određivanje položaja predmeta u odnosu na tijelo ili druge predmete u prostoru te ispravno izražavanje prilikom opisivanja određenih položaja (npr. gore – dolje). Navedeno je i kretanje u prostoru prema uputama te razvijanje strategija za čitanje i prepoznavanje mreža, staza i labirinta.

Geometrijski oblici i korištenje geometrijskih alata uključuje prepoznavanje, imenovanje i opisivanje osnovnih geometrijskih oblika u svakodnevnim situacijama (predmeti) i matematičkim okolnostima (modeli) te izrađivanje modela tijela i njihovo opisivanje.

Transformacije se odnose na učenje o simetriji i pronalaženje simetrije u predmetima iz svakodnevice, a mjerenje na procjenjivanje i usporedbu veličina kao što je obujam te mjerenje volumena.

Dokument ističe važnost započinjanja poučavanja geometrije promatranjem konkretnih predmeta te razvijanja sposobnosti orijentacije u prostoru. Spominje se i potreba za uvođenjem geometrijskih koncepata i prije njihovog formalnog imenovanja. U prvome bi razredu učenici trebali imenovati samo određena tijela. Zatim bi trebali prepoznavati sličnosti geometrijskih tijela s predmetima iz okoline, znati iste opisati, prepoznati ih u različitim položajima u ravnini ili prostoru, pomicati ih te promatrati iz različitih perspektiva i opisivati smjerove. Kod mjerenja naglasak treba biti na procjeni i uspoređivanju.

Dokumentom su određeni i minimalni standardi znanja na kraju svakog obrazovnog razdoblja. Za Geometriju i mjerenje po pitanju geometrije prostora navedena su sljedeća minimalna standardna znanja: utvrđivanje položaja predmeta prema sebi, kretanje u prostoru prema uputama, poznavanje i opisivanje osnovnih geometrijskih oblika te poznavanje osnovnih standardnih mjernih jedinica za zapremninu. S obzirom na okvir TIMSS istraživanja, slovenski kurikulum obuhvaća većinu sadržaja koji se u istraživanju pojavljuju (Mullis i sur., 2016).

U dokumentu je vidljiva zastupljenost svih Wittmannovih fundamentalnih ideja. Najveći je naglasak stavljen na ideju Oblici iz svakodnevice, što se očituje u prepoznavanju, imenovanju i opisivanju geometrijskih oblika iz svakodnevice i pomoću modela. Znatno je zastupljena i ideja Operacija s oblicima jer je u dokumentu pretpostavljeno učenje o simetriji te promatranje i opisivanje različitih perspektiva objekata. Najmanje je zastupljena ideja Geometrizacije, odnosno načini prevođenja objekata u jezik geometrije, što se moglo očekivati s obzirom na to da je riječ o prvom obrazovnom ciklusu.

4.3.2. Njemačka

Njemačka je federalna republika koja se sastoji od 16 saveznih pokrajina. Vrhovna, zakonodavna i izvršna vlast svake pokrajine odgovorne su i za upravljanje obrazovnim sustavom unutar pojedine zemlje. U Njemačkoj je 2003. godine određen nacionalni obrazovni standard za primarno matematičko obrazovanje. Iako svaka savezna pokrajina samostalno koncipira kurikulum za svoju zemlju, svi se kurikulumi trebaju temeljiti na spomenutom nacionalnom obrazovnom standardu. Kao i u Hrvatskoj, njemačko primarno obrazovanje obuhvaća razrede od prvog do četvrtog, odnosno dob učenika od šeste do desete godine. Trenutno je njemačko primarno obrazovanje regulirano od strane spomenutih 16 pokrajina s ukupno 14 kurikuluma, koji se temelje na nacionalnom obrazovnom standardu (Kelly, Centurino, Martin i Mullis, 2020). Tablica 18 prikazuje okvirni plan matematičkog obrazovanja pretpostavljen za primarno obrazovanje u njemačkoj saveznoj pokrajini Baden-Württemberg koncipiran 2016. godine. Moguće je zamijetiti podjelu na dva obrazovna ciklusa, od kojih prvome pripadaju prvi i drugi razred, a drugome treći i četvrti. U tablici su pod sadržajnim domenama Prostor i oblik te Veličine i mjerenja navedeni i sadržaji povezani s geometrijom prostora.

Tablica 18

Okvirni plan matematičkog obrazovanja za prva četiri razreda osnovne škole u pokrajini Baden-Württemberg (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden Württemberg [KM], 2016)

| Kompetencije vezane uz kognitivne procese | | | | |
|---|--|---------------------|---|--------------|
| Komunikacija | Argumentiranje | Rješavanje problema | Modeliranje | Prikazivanje |
| Kompetencije vezane uz sadržaje | Prvi i drugi razred | | Treći i četvrti razred | |
| | Brojevi i računske operacije | | | |
| | Prostor i oblik | | | |
| | <ul style="list-style-type: none"> • Orijehtiranje u prostoru • Prepoznavanje i imenovanje jednostavnih geometrijskih oblika | | <ul style="list-style-type: none"> • Orijehtiranje u prostoru • Prepoznavanje, imenovanje i prikazivanje geometrijskih oblika • Određivanje i usporedba volumena | |
| | Veličine i mjerenja | | | |
| | | | <ul style="list-style-type: none"> • Upoznavanje mjernih veličina • Upotreba mjernih veličina u svakodnevnim situacijama | |
| | Statistika i vjerojatnost | | | |

Za prvi i drugi razred u sklopu *poddome* orijentacije u prostoru pretpostavljeno je sljedeće:

- Prepoznavanje i opisivanje jednostavnih prostornih odnosa (npr. lijevo – desno). Pritom se misli na odnos predmeta naspram tijela te odnose među predmetima.
- Kretanje u prostoru prema uputama (npr. idi tri koraka naprijed, a zatim dva koraka udesno).
- Proizvoljna izgradnja trodimenzionalnih oblika i njihovo opisivanje.
- Izgradnja trodimenzionalnih oblika prema uputama (izgradnja pomoću jednakih kockica, proučavanje izgrađenog objekta iz različitih perspektiva, povezivanje tijela s pripadajućim planom gradnje).

U *poddomeni* prepoznavanja i imenovanja jednostavnih geometrijskih oblika nalazi se:

- Prepoznavanje i imenovanje geometrijskih tijela kocke i piramide.
- Iskustveno prepoznavanje i imenovanje geometrijskih tijela u okolini (kocke, kugle).
- Opisivanje i sortiranje tijela uz argumentiranje. Uključuje prepoznavanje uglatog i oblog te nagiba.
- Modeliranje kocki i kugli od materijala (npr. gline).

Za treći i četvrti razred pod orijentacijom u prostoru pretpostavljeno je:

- Prepoznavanje i opisivanje prostornih odnosa te korištenje pripadajuće terminologije (različiti planovi, pogledi na tijela, kretanja u prostoru i rasporedi objekata).
- Opisivanje prostornih objekata u različitim položajima, prepoznavanje veza među objektima i promjena perspektive.
- Misaono predočavanje prostornih objekata i manipuliranje prostornih objektima (uporaba jednakih kockica, dvodimenzionalni prikazi tijela, izrada modela).
- Rješavanje prostornih problema pomoću prostornog mišljenja (povezivanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih prikaza, izgradnja tijela prema predlošku, izrada plana gradnje).

Prepoznavanje, imenovanje i prikazivanje geometrijskih oblika uključuje:

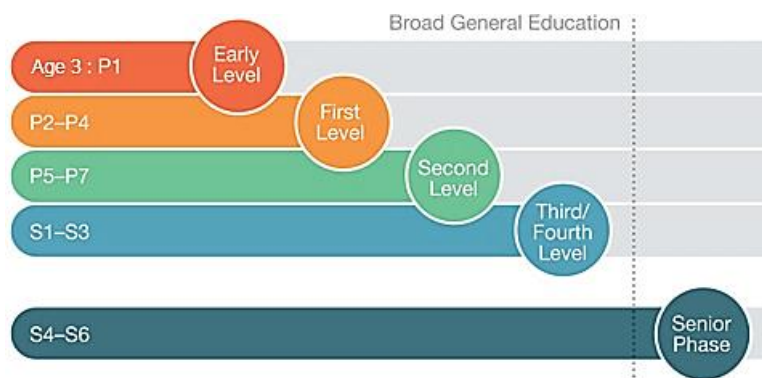
- Prepoznavanje i imenovanje geometrijskih tijela (kocke, kvadra, kugle, valjka).
- Promatranje, opisivanje i sortiranje tijela.
- Izrada tijela. Predložena su tri načina izrade tijela, a to su: izrada punog tijela od materijala poput gline, izrada tijela tako da su prikazani samo njegovi bridovi pomoću štapića i plastelina te izrada tijela iz mreža.
- Samostalno izrađivanje mreža za kocku i kvadar (crtanje, rezanje, izrada).

U domeni se određivanje i usporedba volumena u trećem i četvrtom razredu odnosi na određivanje broja jednakih kockica koje zauzimaju određen prostor (npr. koliko kocaka zauzima kutiju). Domena veličina i mjerenja uključuje usporedbu veličina (npr. vaganjem kantica u koje učenici ulijevaju tekućinu), korištenje mjernih jedinica u mjerenju (litra i mililitar), pretvaranje mjernih jedinica, procjenu volumena (npr. volumena boce), korištenje posuda za mjerenje, korištenje pojmova veličina u opisivanju objekata, primjenu volumena u stvarnim situacijama te samostalno osmišljavanje zadataka koji uključuju volumen (KM, 2016).

U kurikulumu je vidljiva implementacija Wittmannovih fundamentalnih ideja. Šest ideja prisutno je u oba ciklusa, dok se ideja Mjerenje pojavljuje samo u drugome ciklusu. U prvome ciklusu dominiraju ideje Geometrijski oblici i njihove konstrukcije i Uzorci, što se očituje u pretpostavljenim aktivnostima izgradnje trodimenzionalnih oblika te promatranja, prepoznavanja, imenovanja i opisivanja trodimenzionalnih oblika i prostornih odnosa. Spomenute ideje, uz ideju Oblici iz svakodnevice, najviše su zastupljene i u drugome ciklusu.

4.3.3. Škotska

Education Scotland škotska je agencija zadužena za osiguravanje kvalitete i unapređenja škotskog obrazovanja i time pružanja boljih iskustava u učenju i rezultata učenika svih dobi. Agencija djeluje samostalno, nezavisno i objektivno, istovremeno odgovarajući škotskoj vladi koju o svome radu izvješćuju (*Education Scotland*, 2021d). Na stranicama agencije moguće je pronaći škotski kurikulum naziva Curriculum for Excellence, koji je donesen 2010. godine i koji obuhvaća obrazovanje od predškolske dobi do srednje škole (*Scottish Government*, n.d.) Kurikulum podrazumijeva pet razina općeg obrazovanja (ranu, prvu, drugu, treću i četvrtu), a prikazane su na slici 19 (*Education Scotland*, 2021c).



Slika 19. Razine obrazovanja (*Education Scotland*, 2021c)

Kurikulum sadrži osam područja, među kojima je i matematika (*Education Scotland*, 2021b). Područje podrazumijeva brojeve, novac i mjerenje, oblike, položaje i kretanje te upravljanje informacijama (*Education Scotland*, 2021a). 2017. godine dani su okviri za poučavanje navedenog područja. Okviri poučavanja općenito su osmišljeni kako bi dali jasan uvid u nacionalne standarde očekivane unutar svakog područja kurikuluma na svim razinama obrazovanja pa tako i matematike (*Education Scotland*, 2017).

Iako je kurikulum fleksibilan po pitanju prelaska iz razine u razinu, ovisno o individualnim potrebama i mogućnostima učenika, prva se razina otprilike odnosi na učenike u dobi od šeste, sedme i osme godine, što najvećim dijelom odgovara razrednoj nastavi u Republici Hrvatskoj. Tablica 19 prikazuje škotski kurikulum koji se odnosi na geometriju prostora u spomenutom razdoblju.

Tablica 19

Škotski kurikulum geometrije prostora (Education Scotland, 2017, str. 16, 17, 18 i 19)

| | Prva razina | | |
|-----------------------------|---|--|--|
| | Organizacijska jedinica kurikuluma | Ishod | Okviri za poučavanje |
| Brojevi, novac i mjerenje | Mjerenje | „Mogu procijeniti duljinu i masu objekata ili odrediti koliki prostor zauzimaju, na primjerima iz svakodnevice, a zatim i mjeriti koristeći odgovarajuće instrumente i mjerne jedinice.“ | Pri procjenjivanju koristiti predmete iz svakodnevice. Za mjerenje volumena koristiti adekvatne instrumente. Koristiti odgovarajuće mjerne jedinice prilikom procjenjivanja volumena (primjerice, kod procjenjivanja koliko tekućine stane u čašu, učenici u govoru upotrebljavaju mililitre). |
| Oblici, položaji i kretanje | Svojstva dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika | „Promatram, prepoznajem, imenujem jednostavne oblike te opisujem njihova svojstva koristeći prikladnu terminologiju.“ „Mogu promatrati i govoriti o mogućnostima slaganja različitih oblika te stvarati različite uzorke kombiniranjem oblika (npr. popločavanje).“ | Promatrati oblike u različitim pozicijama i veličinama. Koristiti matematički jezik pri opisivanju svojstava svakodnevnih oblika (vrhovi, bridovi, strane i drugo). Promatrati i identificirati dvodimenzionalne oblike na trodimenzionalnima. Prepoznavati trodimenzionalne oblike na temelju crteža. |
| | Kutovi, simetrije i preoblikovanje | „Mogu opisati, pratiti i bilježiti različite rute koristeći znakove, riječi i drugo povezano sa smjerovima kretanja.“ „Mogu odrediti i opisati položaj objekata pomoću koordinata.“ „Mogu prepoznati simetriju na različitim oblicima u okolini.“ | Pri opisivanju koristiti odgovarajuću terminologiju (lijevi okret, desni okret, u smjeru kazaljke na satu i slično). Služiti se stranama svijeta na kompasu u opisivanju. Identificirati gdje se i zašto upotrebljavaju koordinate. Opisivati korištenjem termina koji opisuju različite položaje (okomit, vodoravan). |

U škotskom kurikulumu prisutne su i podjednako zastupljene sve Wittmannove ideje. Ideja Mjerenja zastupljena je u istoimenoj *poddomeni* kurikuluma, za koju je predviđeno procjenjivanje i mjerenje volumena različitih objekata bliskih učenicima. Prisustvo ideja Geometrijskih oblika i njihovih konstrukcija, Operacija s oblicima, Uzoraka, Oblika iz svakodnevice te Geometrizacije, vidljivo je u promatranju, imenovanju, opisivanju i prostornom prikazivanju trodimenzionalnih oblika te njihovom povezivanju s dvodimenzionalnim prikazima. U kurikulumu je uvelike zastupljena i ideja Koordinata, što se očituje u pretpostavljenim ishodima vezanim uz orijentaciju u prostoru, upotrebu terminologije povezane s prostornim položajima te upotrebu koordinata.

4.4. Usporedba kurikuluma

Hrvatski *Nastavni plan i program za osnovnu školu* iz 2006. godine od sadržaja geometrije prostora podrazumijeva isključivo geometrijska tijela i to u prvom razredu na razini prepoznavanja, dok se u četvrtom pojavljuje upoznavanje kvadra, kocke i njihovih obilježja te računanje obujma kocke. S obzirom na to da za drugi i treći razred nisu pretpostavljeni sadržaji geometrije prostora, moguće je zaključiti da je u dokumentu riječ o diskontinuitetu po pitanju obrazovne vertikale. Također, dokument manjka sadržajima usmjerenima prema razvoju prostornog mišljenja i prostornog zora. *Nacionalni okvirni kurikulum* iz 2011. godine, s druge strane, pretpostavio je različita očekivana učenička postignuća vezana uz geometriju prostora te bio usmjeren prema razvoju prostorne kompetencije učenika. Sve domene dokumenta mogu se pronaći u svakom odgojno-obrazovnom ciklusu, što pokazuje unutrašnju povezanost i kontinuitet u učenju matematike (Čižmešija i sur., 2010). Sadržaji dokumenta odnose se na upoznavanje koordinata, vrsta ploha, trodimenzionalnih oblika, različitih perspektiva promatranja, podrazumijeva i predviđanje izgleda, sastavljanje i rastavljanje oblika te njihovo prepoznavanje u svakodnevicama. Dokumentom su uključene i aktivnosti procjenjivanja obujma, mjerenje, uporaba mjernih jedinica, korištenje mjerenja u svakodnevnim situacijama te poticanje razvoja mnogih sposobnosti, poput argumentiranja.

Kurikulumom donesenim 2019. godine, kocka, kvadar i obujam kocke premješteni su u peti razred, u čemu se očituje smanjenje udjela trodimenzionalnih geometrijskih sadržaja u razrednoj nastavi matematike. Fundamentalne ideje, kao što su osna simetrija i prostorni zor, prisutne u kurikulumima Njemačke i TIMSS-a, u hrvatskom kurikulumu iz 2019. godine nisu zaživjele (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019). Geometrija prostora, prema tom kurikulumu, trebala bi se poučavati isključivo u prvom razredu razredne nastave. U ostalim razredima

sadržaji se većinom odnose na geometriju ravnine ili svode na korištenje trodimenzionalnih oblika kao predložaka za razmatranje elemenata ravnine. S obzirom na to da geometrija prostora nije zastupljena u drugom, trećem i četvrtom razredu, kao i kod *Nastavnog plana i programa*, moguće je govoriti o diskontinuitetu obrazovne vertikale. Također, iako je u kurikulumu istaknuta važnost razvoja prostornog zora učenika, u njemu nisu predloženi i opisani sadržaji za ostvarivanje onih ishoda koji se tiču njegovog razvoja.

Analiza TIMSS-ovog kurikuluma i kurikuluma drugih zemalja pokazala je prisustvo svih Wittmannovih fundamentalnih ideja u istima. S druge strane, u hrvatskom su kurikulumu od sedam ideja prisutne samo četiri. Riječ je o ideji Geometrijskih oblika i njihovih konstrukcija, Oblika iz svakodnevice, Mjerenje te Uzoraka. Također, u TIMSS istraživanju iz 2015. godine nalaze se zadatci geometrije prostora za koje su učenici Republike Hrvatske postignuli ispodprosječne rezultate. Riječ je o zadacima određivanja zapremnine prebrojavanjem kocaka koje zauzimaju prostor kutije prikazane na danoj slici te o zadacima prepoznavanja mreža prikazanih tijela. Iako je TIMSS istraživanje pokazalo da učenici nailaze na poteškoće prilikom njihovog rješavanja, takvi zadatci i sadržaji s kojima su usko povezani nisu uzeti u obzir niti implementirani u kurikulum iz 2019. godine.

Od analiziranih kurikuluma drugih zemalja, u škotskom su fundamentalne ideje najpravnomjernije zastupljene. Sadržaji navedenog kurikuluma podudaraju se i sa sadržajima međunarodnog TIMSS kurikuluma i istraživanja. Poučavanje matematičkih sadržaja, pa tako i sadržaja geometrije prostora, u analiziranim je kurikulumima organizirano po ciklusima, što pruža mogućnost fleksibilnijeg implementiranja istih sadržaja u određenom trenutku poučavanja. U njihovoj organizaciji vidljiv je i kontinuitet jer se geometrija prostora u navedenim kurikulumima pojavljuje u svim ciklusima poučavanja. U hrvatskom kurikulumu to nije slučaj jer se u razrednoj nastavi sadržaji geometrije prostora u drugom, trećem i četvrtom razredu ne nadovezuju, ne proširuju i ne produbljuju u odnosu na prvi te su minimalno ili nikako prisutni. Glasnović Gracin i Kuzle (2019) tvrde kako su geometrijski reformatori po pitanju trenutno važećeg kurikuluma zanemarili osuvremenjivanje postojećih aktivnosti geometrijskog kurikuluma te, umjesto njihove reorganizacije, geometrijske sadržaje naprosto reducirali. S obzirom na vidljivu stagnaciju razvoja geometrije prostora unutar hrvatskog obrazovanja, i to u svim obrazovnim ciklusima, postavlja se pitanje zašto njena važnost nije prepoznata od strane sustava? Ne bi li u interesu trebao biti razvoj učeničkih kompetencija, među kojima je i prostorna kompetencija?

Analiza dokumenta pokazuje da je *Nacionalni okvirni kurikulum* iz 2011. godine sadržavao kontinuitet po vertikali u poučavanju sadržaja geometrije prostora. U njemu je bila

vidljiva i implementacija Wittmannovih fundamentalnih ideja. Spomenute karakteristike odlike su analiziranih kurikuluma drugih zemalja, među kojima je i Škotska čiji se obrazovni sustav pokazao uspješnim. Kao rješenje za unaprjeđenje poučavanja geometrije prostora u razrednoj nastavi, prijedlog je revidirati spomenuti *Nacionalni okvirni kurikulum* i njegove kvalitete pretočiti u trenutno važeći kurikulum. Moguće je u obzir uzeti i rezultate učenika četvrtih razreda osnovnih škola Republike Hrvatske u TIMSS-ovim istraživanjima kako bi se jasno odredilo, primjerice, koje je sadržaje potrebno produbiti, proširiti ili čak reducirati i na koji način. Uz to, u kurikulum je potrebno ugraditi one ideje i spoznaje iz teorije, čija je učinkovitost dokazana praksom, i koje će osigurati razvoj prostorne kompetencije učenika.

5. PRIJEDLOG KURIKULUMA I AKTIVNOSTI ZA GEOMETRIJU PROSTORA

Temelj koncipiranja kurikuluma, kao što je ranije spomenuto u radu, trebalo bi biti vertikalno i horizontalno povezivanje sadržaja pa tako i sadržaja geometrije prostora u matematičkom obrazovanju. Razvoj geometrijskog mišljenja, razvoj prostornog zora i sposobnosti vizualizacije rezultat su dugotrajnog procesa učenja. Stoga bi se sadržaji geometrije prostora trebali protezati čitavom obrazovnom vertikalom i geometrijska znanja produbiti na svakoj obrazovnoj razini. Pritom očekivani ishodi i sadržaji koji omogućuju ostvarenje ishoda trebaju biti primjereni dobi, odnosno kognitivnim mogućnostima učenika. U nastavku rada prikazan je prijedlog kurikuluma za geometriju prostora, odnosno prijedlog odgojno-obrazovnih ishoda te preporuka kojima se oni mogu ostvariti u razrednoj nastavi matematike. Ovi prijedlozi su nastali na temelju spoznaja iz trećeg i četvrtog poglavlja ovoga rada. Prilikom njihove izrade u obzir su uzete Piagetova teorija intelektualnog razvoja, van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja, Wittmannove fundamentalne ideje te druge teorijske i praktične spoznaje vezane uz poučavanje geometrije prostora pronađene u relevantnoj dostupnoj literaturi. Na izradu je utjecala i analiza kurikuluma iz prethodnog poglavlja. Tako su u prijedlog kurikuluma implementirani neki prijedlozi TIMSS-istraživanja, koncepti *Nacionalnog okvirnog kurikuluma* iz 2011. godine, kao i pojedinosti analiziranih kurikuluma drugih zemalja povezane s geometrijom prostora. U drugom dijelu ovog poglavlja dani su i prijedlozi aktivnosti te zadataka u sklopu radnih listića koji bi trebali omogućiti ostvarivanje ishoda navedenih u prijedlogu kurikuluma.

5.1. Prijedlog kurikuluma geometrije prostora za razrednu nastavu

Na osnovu i po uzoru na analizirane kurikulume u prethodnom poglavlju, u ovome prijedlogu kurikuluma prvenstveno su dani generalni ishodi koji se odnose na obrazovno razdoblje razredne nastave. Učenici bi po završetku četvrtog razreda trebali biti osposobljeni za:

- Orijentiranje u prostoru i određivanje položaja objekata.
- Poznavanje, prikazivanje, opisivanje, uspoređivanje trodimenzionalnih geometrijskih oblika, njihovih dijelova i svojstava, različitih ploha te oblika iz svakodnevice.

- Prepoznavanje i opisivanje transformacija, prvenstveno simetrije na prostornim oblicima.
- Sastavljanje i rastavljanje prostornih oblika te predviđanje rezultata.
- Određivanje zapremnina pomoću jednakih kocaka i mjerenjem.
- Poznavanje i upotreba standardnih mjernih jedinica za volumen.

Prijedlog kurikuluma koncipiran je na način da za određen razred pretpostavlja određene ishode, a nastava geometrije prostora trebala bi poticati njihovo ostvarivanje. S obzirom na to da prelazak učenika iz jedne razine geometrijskog mišljenja u drugu ovisi o njihovim individualnim mogućnostima i napretku, nije strogo određeno da svaki učenik dosegne svaki ishod u točno određenom razredu. Važno je da ih dosegnu na kraju obrazovnog ciklusa, što je u ovom slučaju kraj četvrtog razreda osnovne škole.

5.1.1. Prvi razred

1. Ishod: Učenik prepoznaje invarijantnost te položaj i odnose među predmetima u prostoru.

- Učenici uspoređuju jednake objekte drugačijih perceptivnih struktura te identificiraju njihovu jednakost.
- Učenici određuju prostorne odnose lijevo – desno, ispred – iza, gore – dolje, ispod – iznad, između te uspoređuju predmete na osnovi odnosa poput dulji – kraći i drugih.
- Učenici razlikuju vodoravan, uspravan i kosi položaj tijela u prostoru.

Preporuke za ostvarivanje ishoda: Učenici invarijantnost mogu upoznati pomoću dviju kugli načinjenih od plastelina (ili nekog drugog materijala kojeg je moguće oblikovati), tako da ih promatraju prvo u izvornom stanju, zatim u stanju kada se struktura jedne mijenja valjanjem te ponovo vraća u prvobitni oblik. Odnose među predmetima u prostoru usvajaju na temelju promatranja neposredne okoline. Lijevo – desno mogu upoznati pomoću dijelova vlastitog tijela, zatim promatrajući predmete u odnosu na vlastito tijelo, a preporuka je mijenjati i kut promatranja, odnosno stajalište učenika.

2. Ishod: Učenik klasificira objekte na temelju oblika i drugih svojstava.

- Učenici prepoznaju oble i uglate oblike u okolini te izdvajaju oble i uglate predmete koji se u njoj nalaze.

- Učenici vizualno opisuju, uspoređuju, identificiraju, imenuju i sortiraju različita geometrijska tijela (kocku, kvadar, piramidu, kuglu, valjak, stožac) te argumentiraju klasifikaciju. Tijela promatraju u različitim položajima i iz različitih perspektiva.
- Učenici proučavaju zakrivljene i ravne plohe geometrijskih tijela i na tijelima pronalaze geometrijske likove koji ih omeđuju.
- Učenici povezuju modele tijela s njihovim dvodimenzionalnim prikazima (mrežama).

Preporuke za ostvarivanje ishoda: Učenici razliku između oblog i uglatog mogu uvidjeti usporedbom svakodnevnih predmeta, na primjer, kuhinjskog valjka i kutije za cipele (valjak je moguće kotrljati po podlozi). Potrebno je uključiti i taktilni osjet (uglatima je moguće opipati ravne bridove). Različita geometrijska tijela učenici prvo pronalaze i prepoznaju u okolini pa zatim na modelima tih tijela kada se uvode i njihovi nazivi. Važno je koristiti raznolike oblike kako učenici ne bi pridavali veliku važnost kvalitativnim svojstvima objekata, kao što je boja. Potrebno je mijenjati *standardne* položaje tijela ili kut njihovog promatranja. Promatrane objekte u okolini mogu prikazivati prostoručnim crtanjem, što je moguće povezati i s nastavom Likovne kulture. Učenici trebaju argumentirati razloge svrstavanja oblika u određene klase, odnosno ukazati na njihove specifične osobine ili svojstva, što će doprinijeti generalizaciji oblika kao općeg i zajedničkog svojstva. Ravne i zakrivljene plohe identificiraju se na predmetima iz okoline te modelima geometrijskih tijela, uz taktilni osjet. Preporučuje se izrada razrednih plakata s crtežima geometrijskih tijela.

3. Ishod: Učenik sastavlja i opisuje prostorne oblike.

- Učenici sastavljaju i rastavljaju različite trodimenzionalne oblike.
- Učenici opisuju izgrađene objekte.
- Učenici prepoznaju i opisuju dvodimenzionalne oblike kao sastavne dijelove trodimenzionalnih.

Preporuke za ostvarivanje ishoda: Različita tijela moguće je izrađivati pomoću konkretnih materijala, primjerice, kombiniranjem i slaganjem jednakih kockica. Učenici mogu i procjenjivati te potom prebrojavati broj upotrijebljenih elemenata u izgradnji tijela.

5.1.2. Drugi razred

1. Ishod: Učenik klasificira geometrijska tijela na temelju njihovih geometrijskih svojstava.

- Učenici prepoznaju i izdvajaju svojstva kao karakteristike klasa tijela.
- Učenici opisuju geometrijska tijela navođenjem njihovih bitnih svojstava.
- Učenici pronalaze zajednička obilježja pojedinih klasa.

Preporuke za ostvarivanje ishoda: Svojstva geometrijskih tijela učenici trebaju uočiti analizom različitih klasa tijela. Pritom je potrebno koristiti konkretne materijale, modele geometrijskih tijela te programe dinamične geometrije. Učenici mogu promatrati kocku i kvadar te identificirati njihova zajednička obilježja i njihovu povezanost (kocka kao vrsta kvadra).

2. Ishod: Učenik sastavlja prostorne oblike te identificira i zaključuje o njihovim svojstvima.

- Učenici sastavljaju modele trodimenzionalnih oblika (kocku, kvadar, tetraedar, trostranu i četverostranu prizmu) iz mreža geometrijskih tijela.
- Učenici određuju, pokazuju i prebrojavaju strane, bridove i vrhove pojedinih geometrijskih tijela.
- Učenici identificiraju mogućnost različitih načina povezivanja tijela tako da nastaju određeni geometrijski uzorci. Zaključuju da je stvarne objekte i operacije među njima moguće geometrijski opisati.
- Učenici određuju i argumentiraju broj elemenata od kojih je trodimenzionalni uzorak sastavljen.
- Učenici promatraju i određuju poglede na geometrijske figure (zdesna, slijeva, sprijeda, straga, odozgo) te promatraju simetriju i geometrijsku operaciju rotiranje.

Preporuke za ostvarivanje ishoda: Potrebno je koristiti mreže geometrijskih tijela od papira te uključiti modeliranje tijela od materijala kojima je moguće manipulirati. Prilikom određivanja strana, bridova i vrhova tijela učenici se trebaju koristiti vizualnim i taktilnim percipiranjem. U nastavi je moguće uključiti zadatke u kojima su prikazane samo određene plohe, a potrebno je odrediti kojemu tijelu pripadaju (omeđuju ga). Učenici mogu *popločavati* ravninu ili ispunjavati prostor, primjerice, korištenjem jednakih kockica. Broj elemenata određenog uzorka mogu odrediti prebrojavanjem vidljivih te identificiranjem *nevidljivih*

kockica u prostoru. Preporučuje se korištenje programa dinamične geometrije koji sadrže interaktivne izometrijske mreže.

3. Ishod: Učenik određuje i opisuje položaje objekata u ravnini i prostoru.

- Učenici opisuju položaje objekata upotrebom orijentacije i termina prostornih odnosa.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Učenici se u ravnini mogu orijentirati pomoću i bez kvadratne mreže. Mogu rješavati različite labirinte te ih samostalno stvarati i dati drugima na rješavanje. Nakon pronalaska odgovarajućeg puta trebaju opisati i objasniti kako su do cilja došli. Slično je moguće provoditi i u prostoru, kada opisuju svoje kretanje, primjerice, put od kuće do škole.

5.1.3. Treći razred

1. Ishod: Učenik sastavlja prostorne oblike te identificira standardne projekcije.

- Učenici na temelju ravninskih prikaza (trodimenzionalnih crteža tijela građenih od jednakih kocaka) vizualiziraju tijela te ih sastavljaju u prostoru.
- Učenici iz geometrijskih mreža zamišljaju objekte koji od njih nastaju. Sastavljanjem tijela od mreža provjeravaju povezanost određene mreže s određenim tijelom.
- Učenici razmatraju i razumiju geometrijske operacije, konkretno rotaciju, te simetriju.
- Učenici promatraju i zaključuju o mogućnostima i načinima prevođenja objekata, svojstava i problema iz okruženja u jezik geometrije. Promatraju, identificiraju, razlikuju i imenuju standardne projekcije tlocrt, nacrt i bokocrt.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Učenici tijela grade na temelju crteža prikazanih u izometrijskim mrežama. U nastavi je potrebno ponuditi različite mreže geometrijskih tijela koje će učenici povezivati s odgovarajućim tijelima. Kako bi mogli mentalno predočiti rotirane dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike, preporučuje se upotreba programa dinamične geometrije te rotiranje stvarnih predmeta u prostoru. Prilikom promatranja projekcija tijela na ravninu prijedlog je koristiti kocku načinjenu od prozirnog materijala te povezati sadržaj geometrije prostora sa sadržajima Prirode i društva (plan i maketa).

2. Ishod: Učenik određuje i opisuje položaje objekata u ravnini i prostoru.

- Učenici opisuju položaje objekata upotrebom orijentacije i termina prostornih odnosa iz tuđe perspektive.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Učenici mogu usmjeravati kretanje jedni drugima, odnosno jedni druge usmjeravati u prostoru. Potrebno je provoditi aktivnosti u kojima učenici opisuju što drugi vide i koji prostorni odnosi vladaju među objektima koje vide.

1. Ishod: Učenik identificira mjerenje na kvalitativnoj i kvantitativnoj razini.

- Učenici uspoređuju i procjenjuju istovrsne veličine (zapremnine).
- Učenici određuju broj koji pokazuje koliko se puta jedinična veličina našla u mjerenoj veličini te definiraju pojam zapremnine i određuju svrhu mjerenja.
- Učenici identificiraju različite jedinične veličine koje se pri mjerenju koriste (ml, cl, dl, l, hl) te ih stavljaju u odnose preračunavanjem.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Uspoređivanje veličina moguće je provoditi pomoću različitih konkretnih materijala, primjerice, proučavanjem različitih oblika posuda, proučavanjem istih posuda s različitom količinom tekućine koja se u njima nalazi, proučavanjem broja jednakih kockica koji zauzimaju prostor kutije i slično. Nužnost mjerenja učenici mogu upoznati promatranjem i uspoređivanjem različitih posuda u kojima se nalazi količina tekućine koju teško mogu procijeniti. Za dočaravanje mjernih jedinica preporučuje se uspoređivanje različitih zapremnina, kao što su epruveta (ml), čaša (cl), vrč (dl), bačva (l) i bazen (hl).

5.1.4. Četvrti razred

1. Ishod: Učenik promatra, zamišlja, uspoređuje, povezuje i kreira trodimenzionalne i dvodimenzionalne prikaze prostornih oblika.

- Učenici sastavljaju tijela na temelju njihovog dvodimenzionalnog prikaza (trodimenzionalnih crteža tijela građenih od jednakih kocaka) ili plana gradnje.
- Učenici misaono sastavljaju tijela na temelju geometrijskih mreža. Povezuju pojedino tijelo s odgovarajućom geometrijskom mrežom.
- Učenici uspoređuju tijela u prostoru s njihovim projekcijama u ravnini te provjeravaju i razmatraju njihovu ispravnost uz argumentiranje.

- Učenici prikazuju trodimenzionalne crteže tijela i njihove standardne projekcije u izometrijskim mrežama (trokutastim i kvadratnim mrežama točaka) na temelju promatranja tijela i planova gradnje, uz interpretaciju i objašnjenje. Kreiraju plan gradnje tijela u kvadratnoj mreži na temelju njegovog dvodimenzionalnog ili trodimenzionalnog prikaza. Određuju broj elemenata korištenih u gradnji tijela. Prostoručno crtaju.
- Učenici tijela prikazuju, promatraju i analiziraju korištenjem programa dinamične geometrije.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Različita tijela učenici mogu sastavljati od konkretnih materijala poput jednakih kockica te kombiniranjem različitih ponuđenih mnogokuta (izrada različitih prizmi i piramida). Prijedlog je da učenici rade u skupinama. Dvodimenzionalne prikaze tijela te planove gradnje i standardne projekcije (tlocrt, nacrt, bokocrt) učenici mogu kreirati u kvadratnim i trokutastim mrežama točaka, bilo na papiru ili korištenjem programa dinamične geometrije. Kod prikazivanja tlocrta tijela preporučuje se zapisivanje *visina* stupaca, odnosno broja kocaka koji se nalazi u svakom stupcu, radi lakšeg određivanja cjelokupnog broja kocaka korištenih u gradnji tijela. Preporuka je koristiti i kocke čije su strane obojene ili se na njima nalaze različite oznake kako bi učenici uvidjeli da ponekad projekcije izgledaju identično, iako je riječ o različitim stranama kocke.

2. Ishod: Učenik prepoznaje, određuje i opisuje položaje objekata u koordinatnoj ravnini.
 - Učenici pronalaze, određuju i opisuju poziciju različitih objekata pomoću jednostavnih koordinata u kvadratnoj mreži.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Učenici jednostavne koordinate u kvadratnoj mreži mogu identificirati i razumjeti pomoću igara kao što su potapanje brodova ili šah.

3. Ishod: Učenik procjenjuje i određuje zapremnine pojedinih tijela te objašnjava postupak mjerenja.
 - Učenici odabiru odgovarajuće jedinične veličine te određuju zapremnine.
 - Učenici primjenjuju mjerenje zapremnina u svakodnevnim situacijama.

Preporuke za ostvarenje ishoda: Učenici mogu mjeriti zapremnine korištenjem odgovarajućih mjernih uređaja.

5.2. Prijedlog radnih aktivnosti za geometriju prostora

Ovaj rad donosi i prijedlog aktivnosti koje se mogu provoditi na satu matematike prilikom učenja i poučavanja geometrije prostora. Aktivnosti imaju za cilj omogućiti ostvarenje ishoda navedenih u prijedlogu kurikuluma. Kod opisa svake aktivnosti naznačeni su i ishodi koji bi se njome trebali ostvariti.

Aktivnost 1: Isto ili različito?

Aktivnost je organizirana u postajama. Riječ je o četiri postaje i na svakoj od njih nalaze se određeni materijali za rad. Učenici su raspoređeni u skupine i svaka od njih treba proći svaku postaju. Na prvoj postaji nalaze se tijela načinjena od plastelina. Jedno je kugla, a drugo tijelo ima isti volumen kao kugla, ali je drugačijeg oblika (npr. kugla spljoštena valjkom za tijesto). Na drugoj postaji nalaze se dvije skupine kugli od plastelina, jednu čine dvije kugle, a drugu 3. Kugle su različitih veličina. Na trećoj postaji su 2 posude s vodom, jedna šira i plića, a druga uža i duboka. Na četvrtoj postaji smještena su dva tijela građena od jednakog broja jednakih kocaka, ali drugačije raspoređenih kod jednog tijela u odnosu na drugo. Svaki učenik dobiva papir na kojem su naznačene 4 postaje i uz njih nazivi „isto“ i „različito“ s kvadratom ispod. U kvadrate za svaku postaju trebaju naznačiti je li riječ o istoj ili različitoj količini materijala, tekućine ili kocaka. Učenicima su dostupni i dodatni materijali koji im mogu pomoći pri određivanju (valjak, mjerna posuda, dvije obične jednake posude). Nakon što sve skupine prođu svaku postaju, učenici i učiteljica provjeravaju točnost njihovih zaključaka. Kod prve postaje potrebno je izvaljanu kuglu preoblikovati u kuglu i zaključiti da je riječ o jednakim kuglama. Kod druge postaje potrebno je povezati posebno prve dvije kugle, a posebno druge tri, valjanjem ili oblikovanjem u veće kugle, te također usporediti. Vodu iz posuda kod treće postaje moguće je preliti u jednake posude i vidjeti da je količina tekućine jednaka. Moguće je poslužiti se i mjernom posudom. Kod četvrte postaje potrebno je presložiti kocke jednog tijela tako da tijela budu jednaka ili prebrojiti elemente od kojih su sastavljena oba tijela.

Aktivnost 2: Stolac iznenađenja

Učenici su raspoređeni u krug. Unutar kruga nalazi se stolac kojeg je moguće okretati. Jedan od učenika sjeda na stolac i okreće se sve dok ne stane. Kada stane treba reći imena učenika koji se nalaze ispred i iza te lijevo i desno od njega. Ostali prate je li učenik naveo točna imena. Ako je, na stolac sjeda novi učenik.

Aktivnost 3: Pogodi što gledam

Aktivnost se provodi u grupi. Jedan od učenika promatra učionicu i opredjeljuje se za jedan predmet. Ostali ne smiju znati o kojem je predmetu riječ. Učenik pomoću odnosa gore – dolje, ispred – iza, ispod – iznad i drugih opisuje položaj predmeta. Drugi trebaju odgonetnuti o kojem je predmetu riječ. Učenik koji prvi otkrije predmet bit će odabran za biranje i opisivanje novog predmeta. Aktivnost je moguće provoditi i radom u paru.

Prethodne aktivnosti predviđene su za provedbu u prvom razredu i ostvarivanje prvog ishoda (učenik prepoznaje invarijantnost te položaj i odnose među predmetima u prostoru).

Aktivnost 4: Selidba učionice

Učiteljica učenicima govori kako će se razred možda preseliti u drugu učionicu. Ako će seliti, morat će premjestiti i sve predmete iz učionice u kojoj trenutno borave. Predmeti će se odvajati na dvije skupine kako bi njihov prijenos bio lakši. Riječ je o predmetima koji se ne kotrljaju (uglati) i koji se kotrljaju (obli). Svaki učenik dobiva papir s tablicom od dva stupca. Stupci su naslovljeni kao „obli predmeti“ i „uglati predmeti“. Trebaju prošetati učionicom, promotrit sve predmete u njoj te samostalno izraditi popis predmeta u tablici. Po završetku aktivnosti učenici s učiteljicom stvaraju zajednički popis na ploči te provjeravaju odgovara li on njihovim pojedinačnim popisima.

Aktivnost 5: Kojoj skupini pripadamo?

Aktivnost je organizirana u postajama. Riječ je o četiri postaje i na svakoj od njih nalaze se nekoliko predmeta iz svakodnevice koji su drugačijeg oblika (npr. lopta, kornet, kutija za CD-e). Učenici su raspoređeni u skupine i svaka od njih treba proći svaku postaju. Svaki učenik dobiva papir na kojem je ucrtano šest kvadrata. Svaki kvadrat trebao bi predstavljati „spremište“ za predmete istog oblika. Učenici kod svake postaje trebaju promotriti predmete te ih nacrtati u određenom kvadratu. Zatim učiteljica stavlja šest kutija na pod učionice. Svaka skupina diskutira o popisima, dogovara o jednom zajedničkom popisu te posprema jednu klasu predmeta u jednu kutiju. Po završetku aktivnosti učenici na kutije upisuju naziv geometrijskog tijela koje predstavlja oblik predmeta u kutiji.

Aktivnost 6: Koje likove krijem?

Aktivnost je organizirana u postajama. Na svakoj se postaji nalazi jedno geometrijsko tijelo (kocka, kvadar, valjak, stožac, kugla i piramida) i posude s temperom. Učenici su raspoređeni u skupine i svaka od njih treba proći svaku postaju. Svaki učenik dobiva šest papira koji su naslovljeni nazivima spomenutih geometrijskih tijela. Zadatak je da na svakoj postaji učenici na papire naprave otiske strana geometrijskih tijela bojama i ispod otisaka napišu naziv geometrijskih likova koji se na tijelu nalaze ili, u slučaju kugle, točku.

Navedene aktivnosti također su predviđene za provedbu u prvom razredu te ostvarivanje drugog ishoda u prijedlogu kurikuluma (učenik klasificira objekte na temelju oblika i drugih svojstava).

Aktivnost 7: Moja utvrda

Učenici samostalno i proizvoljno slažu svoje „utvrde“ pomoću modela geometrijskih tijela. Zatim rade u paru na način da opisuju „utvrdu“ svoga para navođenjem geometrijskih tijela upotrijebljenih u gradnji (npr. na kvadru je valjak i na valjku piramida, desno od kvadra je kocka i na kocki stožac i slično). Također, navode i geometrijske likove koji se na tim tijelima nalaze.

Aktivnost je namijenjena učenicima prvog razreda i ostvarenju trećeg ishoda prijedloga kurikuluma (učenici sastavljaju i opisuju prostorne oblike).

Aktivnost 8: Pronađi zajedničko

Aktivnost je organizirana u postajama. Na svakoj se postaji nalazi određena klasa tijela (predmeti iz okoline određenog oblika). Učenici rade u grupama na način da svaka grupa dolazi do svake postaje i za određenu klasu tijela navodi karakteristike, odnosno što je zajedničko tijelima na postaji. Svoja zapažanja bilježe. Na kraju aktivnosti svaka grupa prezentira svoja zapažanja i pobjeđuje ona koja je navela najviše točnih zajedničkih karakteristika pojedinih klasa. Jedan od opisa može se odnositi na klasu kocaka (npr. Tijela imaju ravne plohe, uglata su. Imaju šest strana, osam vrhova itd.).

Ova aktivnost predviđena je za drugi razred i ostvarivanje prvog ishoda prijedloga kurikuluma (učenik klasificira geometrijska tijela na temelju njihovih geometrijskih svojstava).

Aktivnost 9: Mreže

Učenici samostalno izrađuju modele geometrijskih tijela od mreža izrezanih iz papira. Potrebno je prethodno pripremiti materijale iz kojih će učenici sami izrezivati mreže po naznačenim linijama. Također, bilo bi dobro prvo demonstrirati sastavljanje tijela.

Aktivnost 10: Leteća tijela

Svaki učenik dobiva papir na kojem se nalazi tablica sa šest stupaca. Sa stropa učionice vise modeli geometrijskih tijela u razini očiju učenika. Učenici za zadatak imaju promotriti tijela sa svih strana i odrediti obilježja svakog pojedinog tijela (u tablicu zapisuju broj strana, bridova, vrhova za svako tijelo). Na kraju aktivnosti dobivaju papir na kojem se nalaze Vennovi dijagrami. U dijagrame zapisuju zajednička obilježja određenih tijela, primjerice, kocke i kvadra.

Aktivnost 11: Pogodi tko sam

Jedan učenik dolazi pred ploču i izvlači karticu s nazivom određenog geometrijskog tijela. Opisuje tijelo iznoseći njegove karakteristike. Primjerice, ako je učenik izvukao kocku, govori kako je riječ o tijelu koje ima šest strana, dvanaest bridova, osam vrhova i svi su mu bridovi jednakih duljina. Ostali učenici trebaju otkriti o kojem je tijelu riječ. Učenik koji prvi otkrije naziv opisanog geometrijskog tijela dolazi pred ploču, izvlači karticu s nazivom novog tijela te ga opisuje.

Aktivnost 12: Jednake kocke

Učenici rade u parovima. Najprije svaki učenik samostalno i proizvoljno gradi tijelo pomoću modela jednakih kocaka. Potom učenici promatraju tijelo koje je izgradio njihov par iz klupe te određuju broj elemenata od kojih je tijelo izgrađeno. Učenici provjeravaju je li njihov par točno odredio broj elemenata koji čine tijelo koje su oni sastavili.

Aktivnost 13: Posude koje žele biti pune

Učenici su raspoređeni u parove. Svaki učenik dobiva posudu i određen broj jednakih kockica. Zadatak je da ispune svoju posudu kockama, a zatim promotre posudu svoga para. Trebaju zaključiti koliko je kocaka potrebno u posudi njihovog para da bi posuda bila ispunjena.

Učenici provjeravaju je li njihov par točno odredio broj kocaka koje su potrebne da bi posuda bila ispunjena.

Aktivnost 14: Okreni me!

Učenici su raspoređeni u trojke. Aktivnost uključuje korištenje različitih modela geometrijskih tijela. Zadatak je da dvoje učenika iz trojke odabire dva tijela, primjerice, dvije kocke koje mogu biti jednake ili različite. Jedan učenik drži jedno tijelo u određenom položaju, a drugi drugo u drugačijem. Treći učenik treba prepoznati je li riječ o jednakim tijelima bez obzira na njihov položaj u prostoru. Konkretno kocke mogu sadržavati i obojene plohe kako bi učenici više promišljali o pozicijama ploha na tijelu. Ova aktivnost može se provoditi i pomoću otprije spomenutog alata Isometric Drawing Tool, u kojem na ekranu mogu prikazivati različita tijela sastavljena od jednakih kocaka te ih okretati.

Aktivnost 15: Moja najdraža igračka

Učenici na nastavu geometrije trebaju donijeti svoju najdražu igračku (ili predmet). Na početku aktivnosti učenici promatraju igračke koje su donijeli iz različitih kutova. Zadatak je da uđu u ulogu „fotografa“ te „fotografiraju“ igračku sprijeda, odostraga, slijeva, zdesna i odozgora. Zatim zamišljene fotografije trebaju prikazati na papirima prostoručnim crtanjem.

Prethodnih sedam aktivnosti predviđeno je za provođenje u drugom razredu i ostvarenje drugog ishoda (učenik sastavlja prostorne oblike te identificira i zaključuje o njihovim svojstvima).

Aktivnost 16: Od mjesta do ploče

Na podu učionice naznačeni su kvadrati (ukoliko pod nije načinjen od kvadrata, moguće ih je naznačiti ljepljivom trakom). Zadatak je da učenici opišu put od mjesta na kojem sjede do ploče. Svaki kvadrat predstavlja jedan korak. Pri opisivanju je potrebno koristiti formulacije poput „Okrećem se ulijevo, idem dva koraka naprijed...“. Moguće je aktivnost provoditi zadavanjem drugih točaka polazišta i odredišta.

Provedba aktivnosti 16 također je predviđena za drugi razred te ostvarenje trećeg ishoda prijedloga kurikuluma (učenik određuje i opisuje položaje objekata u ravnini i prostoru).

Aktivnost 17: Sastavljanje tijela

Učenici promatraju dvodimenzionalne prikaze (trodimenzionalne crteže) tijela sastavljenih od jednakih kocaka. Zatim ista tijela sastavljaju u prostoru, također koristeći modele jednakih kocaka. Aktivnost je moguće provoditi kao individualan rad učenika, rad u paru ili grupni rad. Dvodimenzionalni prikazi različitih tijela mogu biti učenicima dostupni u matematičkom kutku učionice tako da u aktivnosti mogu sudjelovati i van nastave matematike, odnosno geometrije prostora.

Aktivnost 18: Staklena kocka

Aktivnost pretpostavlja korištenje staklene kocke čija je unutrašnjost prazna. Moguće je otvoriti jednu stranu kocke i u nju umetnuti tijelo. Učenici kroz kocku mogu promatrati tijelo koje se u njoj nalazi sa svih strana te upoznati tlocrt, nacrt i bokocrt. Moguće je na kocki ili paus papiru naznačiti promatrane projekcije.

Aktivnost 19: Tlocrt, nacrt, bokocrt

Aktivnost je organizirana u postajama. Učenici su raspoređeni u grupe. Svaka se grupa nalazi na jednoj postaji i za zadatak ima pomoću jednakih kocaka izgraditi zamišljenu građevinu. Kada grupe završe s gradnjom, odlaze na iduću postaju. Ondje trebaju proučiti građevinu druge grupe te u kvadratnoj izometrijskoj mreži prikazati njene projekcije (tlocrt, nacrt i bokocrt). Pritom se mogu služiti staklenom kockom. Svaka grupa treba proći svaku postaju.

Aktivnosti 17, 18 i 19 predviđene su za provedbu u trećem razredu i za ostvarenje prvog ishoda prijedloga kurikuluma (učenik sastavlja prostorne oblike te identificira standardne projekcije).

Aktivnost 20: Navigacija

Aktivnost je osmišljena kao natjecateljska. Učenici su raspoređeni u grupe. Iz svake grupe odabire se po jedan učenik. Odabrani učenici ne mogu se kretati bez prethodnih uputa svoje grupe. Na kraju učionice (ili dvorane) nalaze se ciljevi do kojih oni trebaju doći slušajući upute svoje grupe. Na podu su naznačeni kvadrati (vidi aktivnost 16) i grupe pomoću njih usmjeravaju odabrane učenike dajući im upute za kretanje. Na putu do cilja nalaze se razne prepreke, jednak broj kod svake grupe, ali drugačije raspoređene kako učenici ne bi oponašali

upute drugih grupa. Pobjeđuje ona grupa čiji odabrani učenik prvi dođe do cilja. Preporuka je da grupe ne sadrže više od pet sudionika kako bi upute bile jasnije.

Aktivnost 21: Životinje idu na spavanje

Za ovu aktivnost potrebno je izraditi maketu koja prikazuje seosko domaćinstvo. Maketa treba biti smještena na podlozi s kvadratnom mrežom. Osim igraće ploče, za aktivnost su potrebne i figure domaćih životinja i vlasnika seoskog domaćinstva. Na početku aktivnosti figure su smještene proizvoljno u poljima ploče. Svaka figura treba dospjeti do određenog dijela makete, primjerice, kokoš u kokošinjac (uz ploču su dane upute o tome gdje koja figura pripada). U aktivnosti učenici sudjeluju u paru, sjede jedan nasuprot drugog, a ploča se nalazi između njih. Zadatak je da jedan učenik drugome daje upute o načinu pomicanja figura tako da one dopiju na odgovarajuće odredište. Svaki kvadrat predstavlja jedan korak figure. Prilikom davanja uputa učenik se treba služiti formulacijama poput „pomakni kokoš dva koraka naprijed pa jedan korak desno“. Drugi učenik može pomicati figure isključivo na temelju danih uputa. Igra završava kada sve figure dopiju na mjesto kojem pripadaju.

Navedene dvije aktivnosti također su predviđene za provedbu u trećem razredu te ostvarenje drugog ishoda prijedloga kurikulumu (učenik određuje i opisuje položaje objekata u ravnini i prostoru).

Aktivnost 22: Više – manje

Aktivnost je organizirana u postajama. Učenici su raspoređeni u skupine. Na jednoj postaji su kutije u kojima se nalaze jednake kocke. Kocke su u svakoj kutiji drugačije raspoređene. Učenici promatraju svaku kutiju, uspoređuju te zaključuju o tome kojim redoslijedom se zapremnine kreću od najmanje do najveće (od najmanjeg broja kocaka u kutiji do najvećeg). Na drugoj postaji nalaze se različite posude s tekućinama. Učenici određuju raspored posuda na temelju količina tekućina koje se u njima nalaze, od najmanje do najveće. Pritom mogu koristiti i mjerne posude. Na trećoj postaji nalaze se jednake posude s različitom količinom žitarica u njima. Učenici također određuju raspored posuda na temelju veličine prostora kojeg žitarice u pojedinoj posudi zauzimaju, od najmanje do najveće. Svaka skupina treba proći svaku postaju.

Aktivnost 23: Pretakanje

Za aktivnost su potrebne boce različitih zapremnina (2 l, 1 l, 5 dl, 2 dl). Potreban je i veći broj boca jednakih zapremnina. U bocama se nalazi voda ili druga tekućina. Učenici pretaču tekućinu iz jedne boce u druge ili iz više boca u jednu i proučavaju te zaključuju o tome koliko se puta jedna zapremnina nalazi u drugoj. Primjerice, tekućinu iz boce zapremnine 1 l pretaču u boce od 2 dl te zaključuju da se zapremnina od 2 dl u 1 l nalazi pet puta.

I ove dvije aktivnosti predviđene su za treći razred te ostvarenje trećeg ishoda (učenik identificira mjerenje na kvalitativnoj i kvantitativnoj razini).

Aktivnost 24: Graditelji

Aktivnost je organizirana u postajama. Učenici su raspoređeni u skupine. Svaka skupina treba proći svaku postaju. Na prvoj postaji učenike čekaju dvodimenzionalni prikazi tijela i planovi gradnje na temelju kojih učenici od jednakih kocaka trebaju sastaviti tijela. Na drugoj postaji učenici na temelju već sastavljenog tijela trebaju u kvadratnoj izometrijskoj mreži prikazati plan gradnje tijela. Na trećoj postaji učenici trebaju proučiti već sastavljeno tijelo te na papiru što vjerodostojnije prostoručnim crtežom isto tijelo prikazati.

Aktivnost 25: Živi šah

Ovu aktivnost moguće je provoditi u suradnji s drugim razredima s obzirom na to da su za nju potrebna trideset i četiri učenika. Potrebno je na podu dvorane naznačiti kvadratna polja po uzoru na šahovsku ploču. Šesnaest učenika predstavlja jedan tim (bijeke figure), a drugih šesnaest drugi tim (crne figure). Preostala dva učenika „upravljaju“ svojim timovima, odnosno usmjeravaju njihovo kretanje po polju. Upute i pravila aktivnosti trebaju odgovarati uobičajenoj igri šaha. Vođe timova daju upute poput „skoči dva polja ravno, zatim jedno polje bočno lijevo“ ili „pomakni se na polje A3“.

Aktivnost 26: Kuhajmo i pecimo!

Za ovu aktivnost potrebni su kuhinjski recepti. Primjerice, učenici proučavaju recept za čokoladne muffine. U receptu pišu namirnice potrebne za njihovu izradu te njihova količina. Također, naveden je i broj osoba za koje je recept predviđen (na primjer, osam osoba). Učenici rade smjesu za muffine raspoređeni u četvorke. Stoga recept trebaju prilagoditi za 4 osobe.

Trebaju smanjiti količinu sastojaka navedenih u tekstu pa tako i tekućina (mlijeko, ulje). Pri izradi smjese učenici se koriste mjernim posudama. Osim mjerenja volumena tekućina, u ovoj aktivnosti uključeno je i mjerenje masa.

Navedene aktivnosti predviđene su za provedbu u četvrtom razredu. Aktivnost 24 pretpostavljena je za ostvarenje prvog ishoda prijedloga kurikuluma (učenik promatra, zamišlja, uspoređuje, povezuje i kreira trodimenzionalne i dvodimenzionalne prikaze prostornih oblika), aktivnost 25 za ostvarivanje drugog (učenik prepoznaje, određuje i opisuje položaje objekata u koordinatnoj geometriji), a aktivnost 26 za ostvarivanje trećeg ishoda (učenik procjenjuje i određuje zapremnine pojedinih tijela te objašnjava postupak mjerenja).

U sklopu ovog rada izrađeni su i radni listići predviđeni za rješavanje u razrednoj nastavi i ostvarivanje ishoda navedenih u prijedlogu kurikuluma geometrije prostora za razrednu nastavu. Radni listići koncipirani su u četiri seta zadataka za svaki pojedini razred. Listići se nalaze u prilogima ovoga rada (Prilog 1, Prilog 2, Prilog 3, Prilog 4). Tablica 20 prikazuje koji se ishodi predloženog kurikuluma ostvaruju kojim zadatkom radnih listića.

Tablica 20

Zadaci radnih listića i ishodi koji se njima ostvaruju

| Radni listić | Zadatak | Ishod | |
|----------------|----------------------------------|----------------|----------|
| Prvi razred | 1., 2. | Prvi razred | 1. ishod |
| | 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10. | | 2. ishod |
| | 11. | | 3. ishod |
| Drugi razred | 9. | Drugi razred | 1. ishod |
| | 1., 2., 5., 6., 7., 8., 10., 11. | | 2. ishod |
| | 3.,4. | | 3. ishod |
| Treći razred | 1., 2., 3., 4., 5. | Treći razred | 1. ishod |
| | 8. | | 2. ishod |
| | 6., 7. | | 3. ishod |
| Četvrti razred | 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 9. | Četvrti razred | 1. ishod |
| | 8. | | 2. ishod |

6. ZAKLJUČAK

Ljudi su od davnina bili skloni proučavanju i percipiranju prostornih oblika koji su ih okruživali. Svakodnevne situacije iziskivale su razumijevanje geometrijskih koncepata povezanih s tim istim oblicima. Razvoj geometrije započeo je još u pretpovijesno doba i trajao stoljećima. Na tom putu razvoja velik su značaj imala brojna matematička djela i otkrića. Među njima je i Euklidovo djelo *Elementi* u kojem je geometrija izložena kao deduktivna znanost.

Stereometrija se, kao grana geometrije, bavi proučavanjem geometrijskih tijela i odnosa u trodimenzionalnom prostoru. Uz nju su usko vezane i projekтивna geometrija, koja se bavi problemom perspektive, te nacrtna geometrija, koja se bavi grafičkim predočavanjem prostornih oblika. Život u trodimenzionalnoj svakodnevici zahtijeva uporabu prostornih vještina, sposobnosti i prostorne kompetencije općenito. Među njima su i prostorni zor te prostorno mišljenje čiji razvoj geometrija prostora omogućuje.

Prostorni zor odnosi se na intuitivni osjećaj pojedinca za prostorne oblike, njihove položaje i odnose. Prostorno mišljenje podrazumijeva percipiranje okoline i svakodnevne na matematički način. Nastava geometrije prostora za cilj treba imati razvoj navedenih sposobnosti kod učenika. Pri organiziranju i poučavanju sadržaja geometrije prostora u obzir je potrebno uzeti kognitivni razvoj učenika pojedine dobi. Prema Piagetu, učenici razredne nastave najvećim dijelom pripadaju takozvanom razdoblju konkretnih operacija. Stoga njihovo razmišljanje treba biti temeljeno na radnjama koje uključuju njihova osjetila i konkretne objekte. Prema van Hieleovoj teoriji o razvoju geometrijskog mišljenja, učenici spomenute dobi uglavnom se nalaze na razini vizualizacije ili razini analize. Teorija omogućuje razumijevanje karakteristika svake pojedine razine geometrijskog mišljenja učenika. Potrebno je teoriju imati na umu prilikom organizacije kurikuluma i poučavanja geometrije prostora kako bi učenici mogli napredovati i uspješno prelaziti s jedne razine na drugu. Organizacija koherentnog kurikuluma geometrije prostora temelje bi trebala pronalaziti u Wittmannovim fundamentalnim idejama. One, između ostalog, podrazumijevaju duboku povezanost matematičkih koncepata s realnošću te se odnose na skup strategija koji je zastupljen u povijesnom razvoju matematike, koji se proteže čitavom obrazovnom vertikalom te čini nastavu matematike fleksibilnijom i transparentnijom. Uz navedeno, u obzir treba uzeti i načela kontinuiranosti i postupnosti u poučavanju te ideju Felixa Kleina o pojavi matematičkog jezika kao vrhunca procesa poučavanja. Funkcionalna nastava geometrije prostora očituje se i u poznavanju i razumijevanju primjerenih aktivnosti i zadataka usmjerenih na razvoj prostornog mišljenja i prostornog zora. Riječ je o učenju i poučavanju koje uključuje aktivnosti poput formiranja pojmova o oblicima

u prostoru te odnosima među njima i njihovim svojstvima. Nadalje, aktivnosti koje uključuju orijentaciju u ravnini i prostoru, manipulaciju objektima te pronalaženje veza između dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog. Nastava treba uključivati i upoznavanje standardnih projekcija, rotacije i simetrije, procjenu i mjerenje zapremnina te primjenu računalnih programa dinamične geometrije.

Udio geometrijskih sadržaja, a time i sadržaja geometrije prostora, posljednjih se desetljeća znatno smanjio unutar kurikulumu mnogih zemalja. Trenutan bi pristup geometriji prostora mogao ostaviti trajne negativne posljedice po pitanju razvoja geometrijskog mišljenja učenika. U Hrvatskoj je *Odlukom o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj* iz 2019. godine, udio sadržaja povezanih s geometrijom prostora znatno smanjen u odnosu na sadržaje *Nastavnog plana i programa* iz 2006. godine i *Nacionalnog okvirnog kurikulumu* iz 2011. Donesen kurikulum će od školske godine 2021./2022. biti jedini važeći dokument za razrednu nastavu od sva tri navedena. To znači da će se od prvog do četvrtog razreda osnovne škole geometrija prostora poučavati isključivo u prvom razredu. Za preostala tri razreda pretpostavljeni su sadržaji koji se uglavnom odnose na geometriju ravnine i svode na uporabu trodimenzionalnih objekata kao predložaka za razmatranje ravninskih koncepata. Drugi je problem općenit diskontinuitet u poučavanju geometrije prostora, što se očituje u činjenici da njene sadržaje nije moguće pronaći na svim razinama obrazovne vertikale. *Nacionalni okvirni kurikulum* sadržavao je kontinuitet i bio usmjeren na razvoj prostornog mišljenja i prostornog zora u sklopu nastave geometrije prostora, što je trenutno važećim kurikulumom potpuno zanemareno. U *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*, kao i TIMSS-ovom kurikulumu te nacionalnim kurikulumima europskih zemalja Slovenije, Njemačke i Škotske, vidljivo je prisustvo većine fundamentalnih ideja. Stoga je potrebno intervenirati u trenutno važeći hrvatski kurikulum za matematiku, proširiti, produbiti i povezati sadržaje geometrije prostora na svim obrazovnim razinama i time njeno poučavanje učiniti svrhovitijim i učinkovitijim.

Kako geometrija prostora ne bi bila zanemarena u razrednoj nastavi, u ovom je radu dan prijedlog kurikulumu geometrije prostora za prva četiri razreda osnovne škole. Koncipiran je na temelju teorijskih i praktičnih spoznaja te analize drugih već spomenutih kurikulumu. Njegova struktura obuhvaća generalne ishode za razrednu nastavu povezane s geometrijom prostora te ishode i preporuke za njihovo ostvarivanje za svaki razred pojedinačno. Uz kurikulum su osmišljene aktivnosti i radni listići namijenjeni učiteljima i učenicima razredne nastave te ostvarenju ishoda pretpostavljenih prijedlogom kurikulumu.

7. LITERATURA

- Andrilović, V. i Čudina, M. (1990). *Osnove opće i razvojne psihologije*. Zagreb: Školska knjiga.
- Andrilović, V. i Čudina, M. (1988). *Psihologija učenja i nastave*. Zagreb: Školska knjiga.
- Baranová, L. i Katreničová, I. (2018). Role of Descriptive geometry course in development of students' spatial visualization skills. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 49, 21–32. <https://doi.org/10.33039/ami.2018.04.001>
- Bognar, L. i Matijević, M. (1993). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.
- Čižmešija, A. (2006). Nacionalni matematički kurikulum za obavezno obrazovanje – europska iskustva i trendovi. *Matematika i škola*, 37, 57–61. <http://mis.element.hr/fajli/449/37-03.pdf>
- Čižmešija, A., Milin Šipuš, Ž. i Glasnović Gracin, D. (2013). Istraživanja matematičkog obrazovanja u Hrvatskoj. U Milanović, D., Bežen, A. i Domović, V. (Ur.) *Metodike u suvremenom odgojno-obrazovnom sustavu* (str. 195–208). Zagreb: Akademija odgojno-obrazovnih znanosti Hrvatske. <http://aoozh.hr/wp-content/uploads/2020/01/Methodike-u-suvremenom-odgojno-obrazovnom-sustavu.pdf>
- Čižmešija, A., Milin Šipuš, Ž., Svedrec, R. i Špalj, E. (2014). Okrugli stol – vertikalno povezivanje. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 60, 73–75. <https://hrcak.srce.hr/140128>
- Čižmešija, A., Svedrec, R., Radović, N. i Soucie, T. (2010). Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. U P. Mladnić i R. Svedrec (Ur.) *Zbornik radova IV. kongresa nastavnika matematike RH* (str. 143–162). Zagreb: Školska knjiga, Hrvatsko matematičko društvo. http://pubweb.carnet.hr/smd/wp-content/uploads/sites/294/2014/10/prostorni_zor.pdf
- Dadić, Ž. (1992). *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Zagreb: Školska knjiga.
- Education Scotland. (2021a). [Curriculum areas]. Preuzeto 27.6.2021.: <https://education.gov.scot/education-scotland/scottish-education-system/policy-for-scottish-education/policy-drivers/cfe-building-from-the-statement-appendix-incl-btc1-5/curriculum-areas/>
- Education Scotland. (2021b). [Curriculum for Excellence]. Preuzeto 27.6.2021.: <https://education.gov.scot/education-scotland/scottish-education-system/policy-for-scottish-education/policy-drivers/cfe-building-from-the-statement-appendix-incl-btc1-5/what-is-curriculum-for-excellence>

- Education Scotland. (2021c). [Curriculum levels]. Preuzeto 27.6.2021.:
<https://education.gov.scot/parentzone/learning-in-scotland/curriculum-levels/>
- Education Scotland. (2021d). [Role and status]. Preuzeto 27.6.2021.:
<https://education.gov.scot/education-scotland/who-we-are/role-and-status/what-is-our-role-and-status/>
- Education Scotland. (2017). [Numeracy and Mathematics Benchmarks]. Preuzeto 27.6.2021.:
<https://education.gov.scot/nih/Documents/NumeracyandMathematicsBenchmarks.pdf>
- Furlan, I. (1985). *Čovjekov psihički razvoj*. Zagreb: Školska knjiga.
- Glasnović Gracin, D. (2016). Više prostora za geometriju prostora!. *Matematika i škola*, 85, 194–195. <http://mis.element.hr/fajli/1319/85-01.pdf>
- Glasnović Gracin, D. (2010). Meranski nastavni plan iz 1905. godine. *Matematika i škola*, 56, 8–12. <http://mis.element.hr/fajli/997/56-04.pdf>
- Glasnović Gracin, D. i Kuzle, A. (2019). Fundamentalne ideje za nastavu geometrije. *Matematika i škola*, 99, 147–151. <https://mis.element.hr/fajli/1713/99-02.pdf>
- Gleizer, G. I. (2003). *Povijest matematike za školu*. Zagreb: Školske novine i Hrvatsko matematičko društvo.
- Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
- Kaushish, M. (2019). *Geometry education*. Preuzeto 2.7.2021. s
https://www.academia.edu/42040272/Geometry_education?email_work_card=view-paper
- Kelly, D.L., Centurino, V.A.S., Martin, M.O. i Mullis, I.V.S. (Ur.) (2020). *TIMSS 2019 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. Preuzeto 26.6.2021.: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/encyclopedia/>
- Kovačević, N. (2016). Prostorno mišljenje i geometrija prostora. *Matematika i škola*, 85, 196–204. <https://mis.element.hr/fajli/1499/85-02.pdf>
- Kovačević, N. i Jurkin, E. (2013). Geometrija u svijetu 3D modeliranja. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 55, 39–46. <https://hrcak.srce.hr/125704>
- Kurilj, P., Sudeta, N. i Šimić, M. (2005). *Perspektiva*. Zagreb: Golden marketing - Tehnička knjiga.
- Markovac, J. (1992). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO]. (2019). Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Preuzeto 26.6.2021.: <https://narodne-novine.nn.hr/eli/sluzbeni/2019/7/146>

- Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa [MZOŠ]. (2011). Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje. Preuzeto 26.6.2021.: http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf
- Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa [MZOŠ]. (2006). Nastavni plan i program za osnovnu školu. Preuzeto 26.6.2021.: <https://narodne-novine.nn.hr/eli/sluzbeni/2006/102/2319>
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden Württemberg [KM]. (2016). Bildungsplan der Grundschule. Preuzeto 26.6.2021.: <https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GS/M>
- Ministrstvo RS za šolstvo in šport [MZŠŠ]. (2011). Učni načrt Matematika. Preuzeto 26.6.2021.: https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_matematika.pdf
- Mlodinow, L. (2007). *Euklidov prozor*. Zagreb: Izvori.
- Mullis, I.V.S. i Martin, M.O. (Ur.) (2017). *TIMSS 2019 Okviri istraživanja*. Preuzeto 26.6.2021.: <https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2020/12/T19-Okvir-istrazivanja-finale-web.pdf>
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Goh, S. i Cotter, K. (Ur.) (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. Preuzeto 26.6.2021.: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/slovenia/the-mathematics-curriculum-in-primary-and-lower-secondary-grades/>
- Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja [NCVVO]. (2021). [TIMSS]. Preuzeto 26.6.2021.: <https://www.ncvvo.hr/medunarodna-istrazivanja/timss/>
- Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja [NCVVO]. (n.d.). Rezultati TIMSS 2019 istraživanja. Preuzeto 26.6.2021.: https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2020/12/NCVVO_TIMSS-2019_Objava-za-medije.pdf
- Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja [NCVVO]. (2017). Priručnik za unapređivanje nastave matematike s primjerima zadataka iz međunarodnoga istraživanja TIMSS 2015. Preuzeto 26.6.2021.: <https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2018/06/Prirucnik-TIMSS-matematika-FINALE-web.pdf>

- Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja [NCVVO]. (2012). TIMSS 2011. Izvješće o postignutim rezultatima iz matematike. Preuzeto 26.6.2021.:
<https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2016/01/TIMSS-2011.-Izve%C5%A1%C4%87e-o-postignutim-rezultatima-iz-matematike.pdf>
- Radović, N., Svedrec, R., Soucie, T. i Kokić, I. (2012). Vizualizacija prostora. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 49, 49–68. <https://hrcak.srce.hr/103878>
- Scottish Government. (n.d.). [School curriculum]. Preuzeto 27.6.2021.:
<https://www.gov.scot/policies/schools/school-curriculum/>
- Stedall, J. (2014). *Povijest matematike: kratki uvod*. Zagreb: Element.
- Vlasnović, H. i Cindrić, M. (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van Hieleovoj teoriji. *Školski vjesnik: časopis za pedagošku teoriju i praksu*, 63(1-2), 37–51.
<https://hrcak.srce.hr/123229>

PRILOZI I DODATCI

Prilog 1

PRVI RAZRED

1. PROMOTRI SLIKU I ODGOVORI NA PITANJA.



A. GDJE SE NALAZI LOPTA?

B. TKO SJEDI IZA HELENE?

C. U KOJOJ RUCI MARTIN DRŽI OLOVKU?

D. IZMEĐU KOJIH UČENIKA SJEDI DAVID?

E. KOJU JE RUKU PODIGNULA SARA?

2. KRISTINA JE SLAGALA KNJIGE PRIKAZANE NA SLICI. POVEŽI BOJE KNJIGA S POLOŽAJEM U KOJEMU SE KNJIGE NALAZE.



• CRVENE KNJIGE

• NARANČASTE KNJIGE

• PLAVE KNJIGE

• ŽUTE KNJIGE

• ZELENE KNJIGE

• LJUBIČASTE KNJIGE

VODORAVAN

USPRAVAN

KOSI

3. KOJI SE OD PRIKAZANIH PREDMETA MOGU KOTRLJATI? ZAOKRUŽI.



4. NACRTAJ JEDAN TEBI NAJDRAŽI PREDMET UGLATOG OBLIKA I JEDAN OBLI.

5. POVEŽI PREDMETE S KUTIJOM U KOJU IH TREBA POSPREMITI.

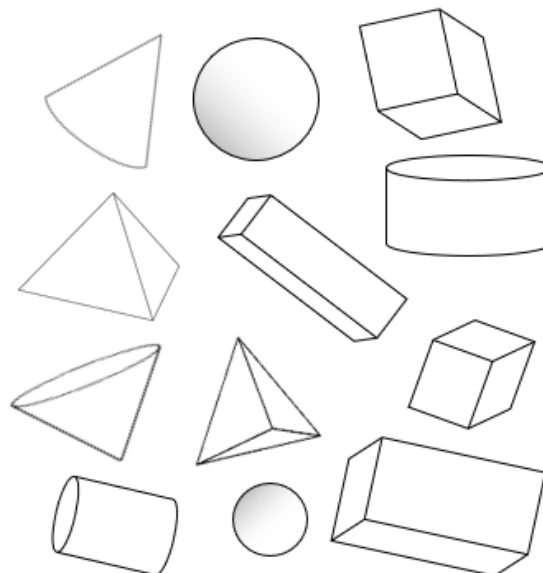


6. SLIKE PREDMETA POVEŽI S NJIHOVIM OBLIKOM.



7. GEOMETRIJSKA TIJELA OBOJI PREMA UPUTAMA:

- a. KOCKA (ZELENA)
- b. VALJAK (NARANČASTA)
- c. PIRAMIDA (PLAVA)
- d. KUGLA (CRVENA)
- e. STOŽAC (LJUBIČASTA)



8. KOJA JE GEOMETRIJSKA TIJELA ANA KORISTILA U GRADNJI DVORCA PRIKAZANOG NA SLIKAMA? ZAOKRUŽI.

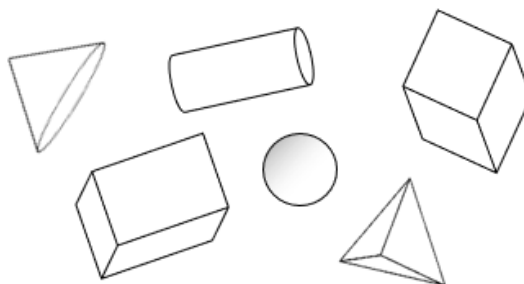


- KUGLU KOCKU PIRAMIDU
 STOŽAC VALJAK KVADAR

9. ZAOKRUŽI ONE PREDMETE KOJI IMAJU RAVNU PLOHU.



10. TIJELA KOJA IMAJU SAMO RAVNE PLOHE OBOJI CRVENOM BOJOM, TIJELA KOJA IMAJU SAMO ZAKRIVLJENU PLOHU PLAVOM, A KOJA IMAJU I RAVNU I ZAKRIVLJENU OBOJI NARANČASTOM.



11. ZAOKRUŽI TIJELA NA KOJIMA UOČAVAŠ GEOMETRIJSKE LIKOVE.



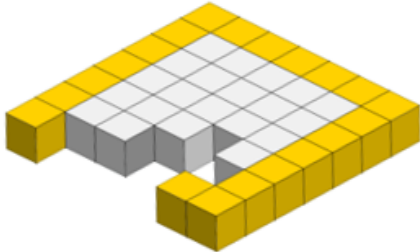
NA TIJELIMA OBOJI:

- TROKUTE (ŽUTA),
- KVADRATE (ZELENA),
- KRUGOVE (LJUBIČASTA).

Prilog 2

DRUGI RAZRED

1. KOLIKO JOŠ KOCAKA JOSIPU TREBA DA BI MOGAO POPLOČATI CIJELO DVORIŠTE? ŽUTE KOCKE OZNAČAVAJU RUBOVE DVORIŠTA OBLIKA KVADRATA.



2. KOLIKO JE KOCAKA KORIŠTENI U IZGRADNJI TIJELA PRIKAZANIH NA SLIKAMA? UPIŠI NA CRTE PORED SLIKA.

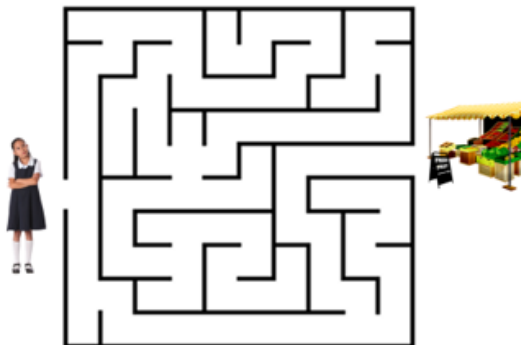






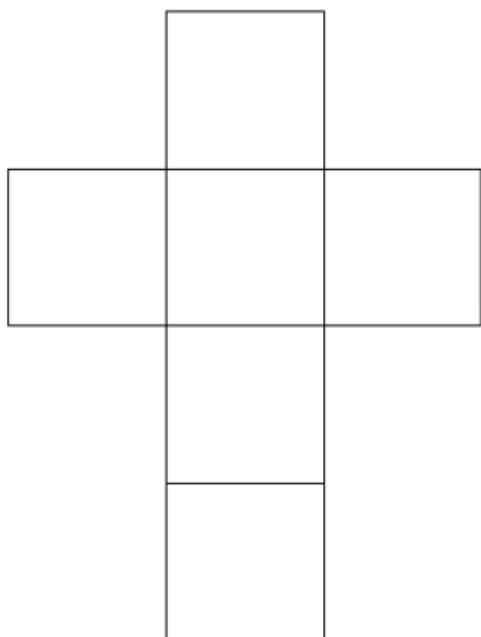
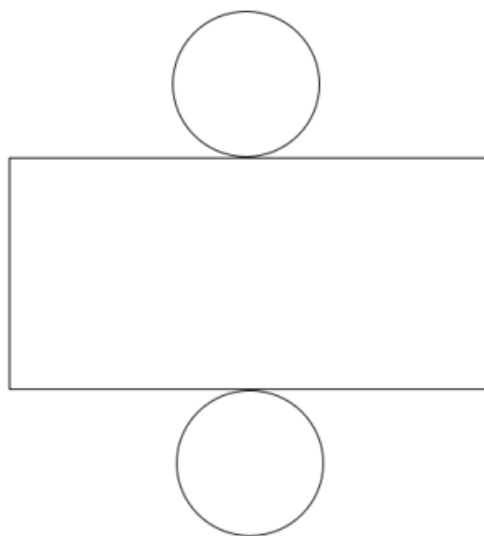
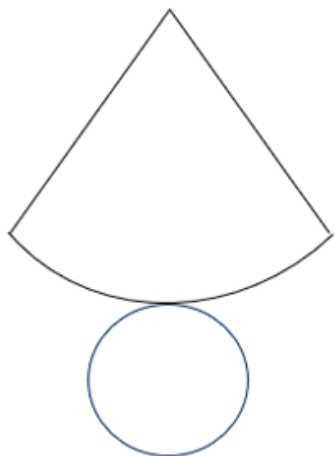


3. POMOZI BARBARI PRONAĆI PUT DO TRŽNICE.

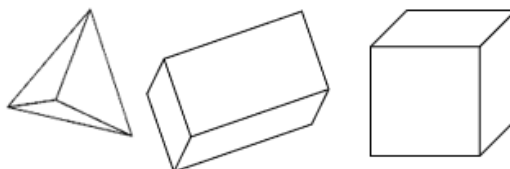


4. ANDRIJA TREBA DOĆI DO BAKINE KUĆE PRIKAZANE NA SLICI. NA CRTE NAPIŠI UPUTE KOJIMA BI POMOGAO/POMOGLA ANDRIJI DA PRONAĐE KUĆU (SVAKI KVADRAT OZNAČAVA JEDAN KORAK).

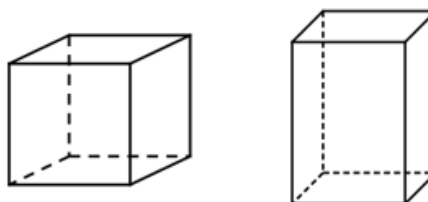




8. KVADRU OBOJI STRANE (CRVENA), PIRAMIDI OZNAČI VRHOVE (ZELENA), A KOCKI BRIDOVE (PLAVA).



9. PROMOTRI KOCKU I KVADAR, A ZATIM ODGOVORI NA PITANJA.



KOLIKO STRANA IMA KOCKA? _____ .

KOLIKO STRANA IMA KVADAR? _____ .

KOLIKO BRIDOVA IMA KOCKA? _____ .

KOLIKO BRIDOVA IMA KVADAR? _____ .

KOLIKO VRHOVA IMA KOCKA? _____ .

KOLIKO VRHOVA IMA KVADAR? _____ .

PO ČEMU SE KOCKA I KVADAR RAZLIKUJU?

_____ .

JE LI KOCKA KVADAR? ZAOKRUŽI. DA NE

JE LI KVADAR KOCKA? ZAOKRUŽI. DA NE

10. ISKRA, BRANKO I DORIS PROMATRAJU MAKETU. POVEŽI IME SVAKOG UČENIKA SA SLIKOM KOJA PRIKAŽUJE ŠTO ON ILI ONA VIDI.



ISKRA



BRANKO



DORIS

11. NA CRTE UPIŠI ODGOVARAJUĆE NAZIVE POGLEDA NA TIJELO PRIKAZANO NA SLICI (ZDESNA, SLIJEVA, SPRIJEDA, STRAGA I ODOZGO).











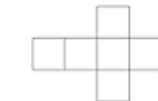
Prilog 3

TREĆI RAZRED

1. SASTAVI TIJELA PRIKAZANA NA SLIKAMA.



2. ŠTO MISLIŠ KOJA GEOMETRIJSKA MREŽA ODGOVARA KOJEM GEOMETRIJSKOM TIJELU? POVEŽI.



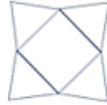
KVADAR



STOŽAC



KOCKA



VALJAK



PIRAMIDA















3. PROUČI SLIKE U ZADATCIMA. ZA SVAKI OD NJIH ODREDI PRIKAZUJU LI SLIKE ISTO TIJELO TAKO ŠTO ĆEŠ U ODGOVARAJUĆU KUĆICU UPISATI KRIŽIĆ.

| | | PRIKAZUJE | NE PRIKAZUJE |
|----|--|--------------------------|--------------------------|
| A. | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| B. | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| C. | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |




4. NA CRTE UPIŠI ODGOVARAJUĆE NAZIVE PRIKAZA TIJELA SA SLIKE: TLOCRT, NACRT I BOKOCRT.

| | | |
|-------|-------|-------|
| | | |
| | | |
| _____ | _____ | _____ |




5. OBOJI KVADRATE KOJI PRIKAZUJU TLOCRTE, NACRTE I BOKOCRTE TIJELA PRIKAZANIH NA SLIKAMA. U ZADNEM ZADATKU POTREBNO JE NA PRIKAZIMA OZNAČITI I CRTE.

| | | NACRT | TLOCRT | BOKOCRT |
|----|---|---|---|---|
| A. |  |  |  |  |
| B. |  |  |  |  |
| C. |  |  |  |  |

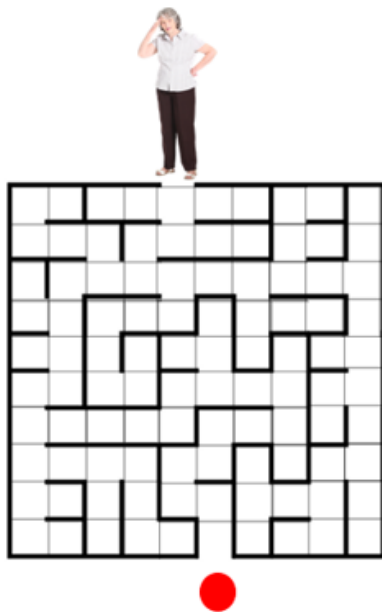
6. OD KOLIKO SU KOCAKA GRAĐENA TIJELA PRIKAZANA NA SLIKAMA?

| | | |
|--|---|---|
|  |  |  |
| _____ | _____ | _____ |

7. KOLIKO KOCAKA JE POTREBNO DODATI U KUTIJE NA SLIKAMA DA BI ONE BILE POTPUNO POPUNJENE?

| | | |
|--|---|---|
|  |  |  |
| _____ | _____ | _____ |

8. ZAMISLI DA SE NALAZIŠ NA MJESTU OZNAČENOM CRVENIM KRUGOM I TREBAŠ GOSPOĐI MARI OBJASNITI KAKO DA DOĐE DO TOG ISTOG KRUGA KROZ LABIRINT. KAKO ĆE GLASITI TVOJE UPUTE? NAPIŠI IH NA CRTE. (SVAKI KVADRAT OZNAČAVA JEDAN KORAK.)



Prilog 4

ČETVRTI RAZRED

1. SASTAVI TIJELA UZ POMOĆ PRIKAZANIH PLANOVA GRADNJE.

A.

POGLED STRAGA

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

POGLED SLIJEVA POGLED ZDESNA

POGLED SPRIJEDA

B.

POGLED STRAGA

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 2 | 1 |

POGLED SLIJEVA POGLED ZDESNA

POGLED SPRIJEDA

C.

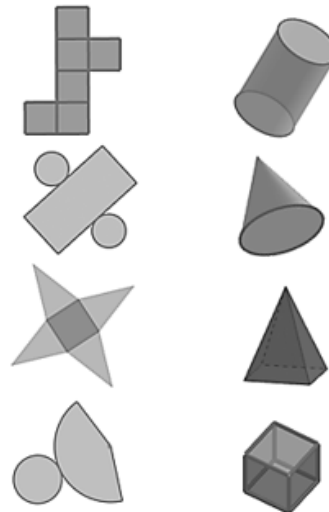
POGLED STRAGA

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | |
| 1 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | |

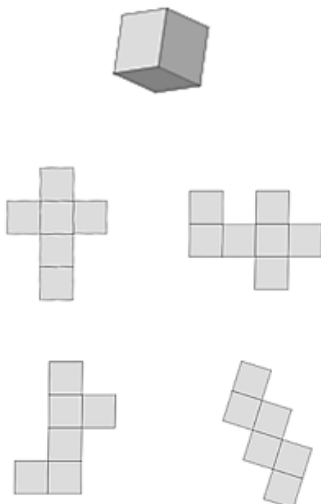
POGLED SLIJEVA POGLED ZDESNA

POGLED SPRIJEDA

2. POVEŽI TIJELA S NJIHOVIM ODGOVARAJUĆIM GEOMETRIJSKIM MREŽAMA.



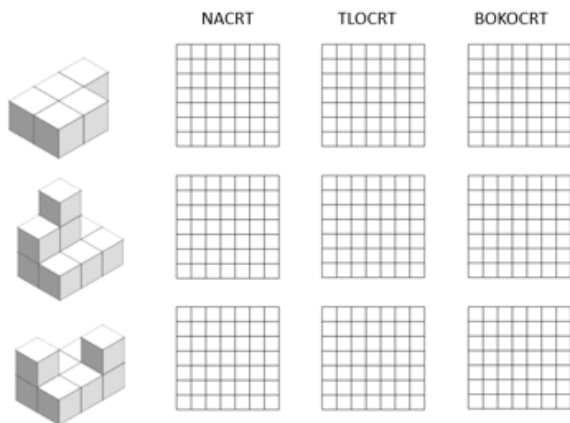
3. ZAOKRUŽI ONE MREŽE OD KOJIH JE MOGUĆE SASTAVITI TIJELO PRIKAZANO NA SLICI.



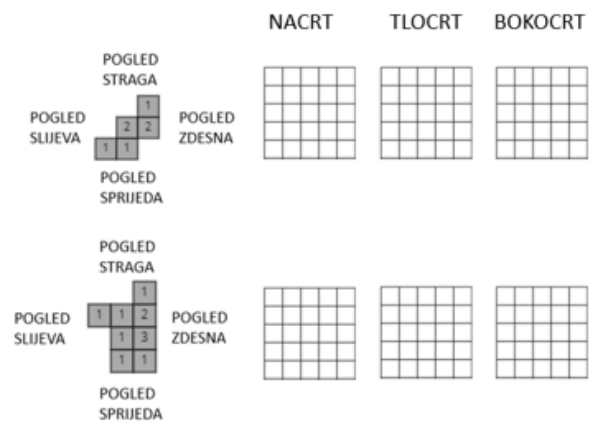
4. JESU LI PROJEKCIJE TIJELA PRIKAZANIH NA SLIKAMA TOČNE? U ODGOVARAJUĆU KUĆICU UPIŠI KRIŽIĆ (X).

| | NACRT | TLOCRT | BOKOCRT | TOČNO | NETOČNO |
|--|-------|--------|---------|--------------------------|--------------------------|
| | | | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

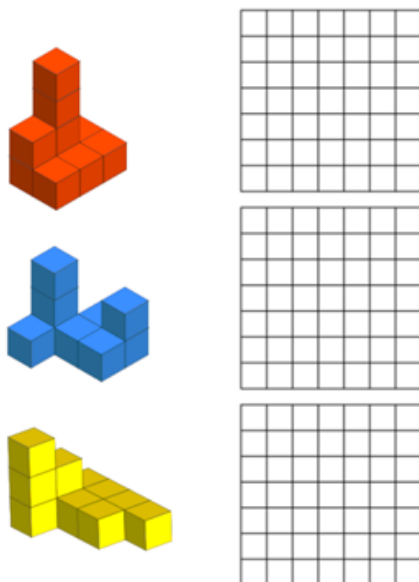
5. PROUČI TIJELA NA SLIKAMA PA U MREŽI PRIKAŽI NJIHOVE PROJEKCIJE.



6. PROUČI PLANOVE GRADNJE TIJELA, NA TEMELJU PLANOVA SLOŽI TIJELA OD JEDNAKIH KOCAKA PA U MREŽAMA PRIKAŽI PROJEKCIJE ISTIH TIJELA.



7. PROUČI TIJELA PRIKAZANA NA SLIKAMA PA NACRTAJ NJIHOVE PLANOVE GRADNJE.



8. TOMA I TONKA SVAKO POPODNE IGRAJU ŠAH. TOMINE ŠAHOVSKE FIGURE CRNE SU BOJE, A TONKINE BIJELE. PROUČI ŠAHOVSKU PLOČU I ODGOVORI NA PITANJA.

E5 JE PRIMJER NAZIVA JEDNOG POLJA.



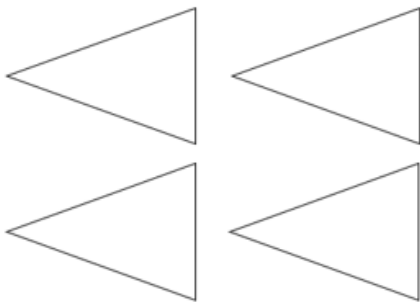


NA KOJIM SE POLJIMA NALAZE TONKINI LOVCI?

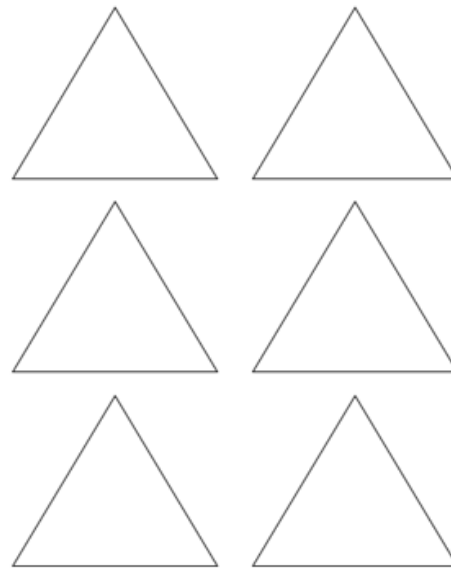
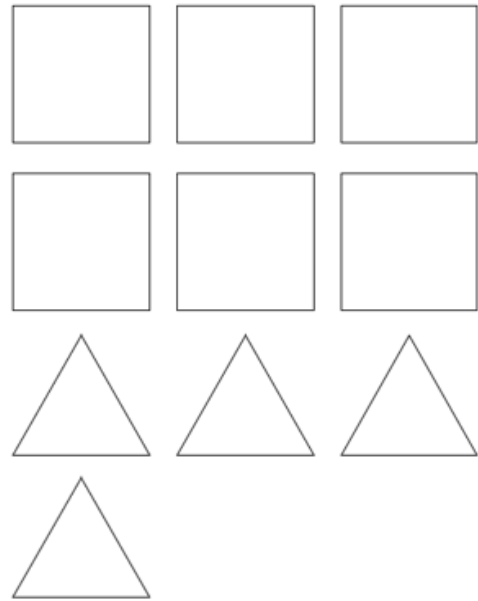
NA KOJIM SE POLJIMA NALAZE TOMINI TOPOVI?

NA KOJIM SE POLJIMA NALAZE NJIHOVE KRALJICE?

AKO TONKA POMAКNE SVOJE SKAKAČE DVA POLJA RAVNO I ZATIM JEDNO POLJE BOČNO DESNO, NA KOJIM ĆE SE POLJIMA ONI TADA NALAZITI?



9. IZ PAPIRA IZREŽI MNOGOKUTE I OD NJIH POKUŠAJ SASTAVITI ŠTO VIŠE GEOMETRIJSKIH TIJELA.



IZJAVA O IZVORNOSTI DIPLOMSKOG RADA

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

(vlastoručni potpis studenta)