

Logičko mišljenje u početnoj nastavi matematike

Bušković, Elena

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:049323>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Elena Bušković

LOGIČKO MIŠLJENJE U POČETNOJ NASTAVI
MATEMATIKE

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Elena Bušković

LOGIČKO MIŠLJENJE U POČETNOJ NASTAVI
MATEMATIKE

Diplomski rad

Mentor rada:
izv. prof. dr. sc. Tin Perkov

Zagreb, srpanj 2022.

SADRŽAJ

UVOD	1
1. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika	2
1.1. Matematički procesi kurikuluma nastavnog predmeta Matematika	3
1.2. Domene nastavnog predmeta Matematika	5
2. Osnovne znanstvene metode mišljenja	7
1.1. Konkretizacija i apstrakcija	8
2.2. Indukcija i dedukcija	10
2.3. Analiza i sinteza	12
2.4. Analogija	13
2.5. Generalizacija i specijalizacija	14
3. Analiza udžbenika	15
3.1. Zadaci induktivnog i deduktivnog zaključivanja	15
3.2. Analiza i sinteza u rješavanju problemskih zadataka	22
3.3. Zaključivanje po analogiji	24
3.4. Generalizacija i specijalizacija u udžbenicima	26
3.5. Konkretizacija i apstrakcija u udžbenicima	29
Zaključak	33
Izjava o izvornosti diplomskog rada	34
Literatura	35

SAŽETAK

Kurikulum za nastavni predmet Matematike donesen 2019. godine temeljni je dokument za izvođenje nastave Matematike u osnovnim i srednjim školama. Za razvijanje matematičkih kompetencija bitne su domene i matematički procesi koji se neprestano isprepliću i nadopunjuju, a navedeni su u Kurikulumu. Matematički procesi uključuju proces *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*, koji je polazište za ovaj rad. Aspekti logičkog mišljenja (metode razvijanja mišljenja i istraživanja) koji se spominju u ovom procesu su generalizacija i specijalizacija, indukcija i dedukcija, analiza i sinteza, konkretizacija i apstrakcija te analogija. Cilj ovoga rada bio je analizirati u kojoj mjeri i na koji način se aspekti logičkog mišljenja koriste u udžbenicima za niže razrede osnovne škole. Analizom je utvrđeno da se svi spomenuti aspekti koriste u analiziranim udžbenicima, no na različite načine. Udžbenici bi trebali služiti samo kao pomoć, a učitelji su ti koji bi pri planiranju nastave trebali svakodnevno koristiti metode razvijanja mišljenja i istraživanja u svojoj nastavi.

KLJUČNE RIJEČI: logičko mišljenje, metodika nastave matematike, kurikulum, matematički udžbenici

SUMMARY

Curriculum for the subject of Mathematics, adopted in 2019, is a basic document for teaching Mathematics in Croatian elementary and high schools. Domains and mathematical processes that are constantly intertwined and complementary are important for the development of mathematical competencies, and are listed in the Curriculum. Mathematical processes include the process of *Logical thinking, argumentation and conclusion*, which is the starting point for this work. Aspects of logical thinking (methods of developing opinions and research) mentioned in this process are generalization and specialization, induction and deduction, analysis and synthesis, concretization and abstraction, and analogy. The aim of this thesis was to analyze to what extent and how the aspects of logical thinking are used in textbooks for lower classes of elementary school. The analysis found that all mentioned aspects are used in analyzed textbooks, but in different ways. Textbooks should only serve as help, and teachers are the ones who should use methods of developing thinking and research on a daily base in their classes.

KEYWORDS: logical thinking, research in mathematics education, curriculum, mathematics textbooks

UVOD

Sposobnost logičkog mišljenja i zaključivanja te iznošenje argumenata u današnjem svijetu postaje sve važnije. Od malih nogu djecu treba poticati na razvijanje tih sposobnosti kako bi mogli donositi ispravne odluke u svakoj fazi svog odrastanja. Matematika je znanost o dobro definiranim objektima i idejama koje se mogu analizirati i transformirati na različite načine primjenom matematičkog zaključivanja kako bismo došli do zaključaka u koje smo sigurni, pa tako kroz matematiku učenici uče da ispravnim zaključivanjem mogu doći do rezultata i zaključaka koje smatraju točnima. Takvi zaključci su logični i objektivni, a samim time i nepristrani, bez potrebe za potvrđivanjem od strane vanjskog autoriteta. Ovakva vrsta zaključivanja može se učinkovito poučavati i uvježbavati u sklopu matematike, a korisna je i izvan matematičkih okvira (PISA, 2021). Nastava matematike u velikoj mjeri potiče i razvija mišljenje učenika, stoga od njih zahtijeva i stalno promišljanje, zaključivanje i generaliziranje. S obzirom da je većina matematičkih koncepata jako apstraktna, nije ih moguće učiti bez razumijevanja i uključivanja procesa logičkog mišljenja. „Čovjek svojim razvijenim logičkim i kritičkim mišljenjem, spreman je stupiti u svijet rada, a i postaje sposoban stupati u komunikaciju i razmjenjivanje ideja u različitim odnosima koje razvije tijekom života.“ (Delija Colić, 2019, str. 6). Aspekti logičkog mišljenja koji se spominju u Kurikulumu za nastavni predmet Matematike (Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO], 2019) u matematičkom procesu *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* su generalizacija i specijalizacija, indukcija i dedukcija, analiza i sinteza, konkretizacija i apstrakcija te analogija. Kurnik (2009) navodi ove aspekte kao znanstvene metode mišljenja i istraživanja. Također, navodi da bez obzira hoće li se kasnije u životu baviti matematikom i znanošću, učenike od početka treba postupno naučiti analizirati, apstrahirati, sintetizirati, specijalizirati, generalizirati, inducirati, deducirati te uočavati analogije.

Kurikulum (MZO, 2019) te udžbenici koje je odobrilo Ministarstvo znanosti i obrazovanja temeljni su dokumenti za izvođenje nastave Matematike. Iako se aspekti logičkog mišljenja nedovoljno spominju u Kurikulumu za niže razrede osnovne škole, oni bi u nastavi trebali biti zastupljeni svakodnevno. Učitelji se prilikom pripreme nastave najviše oslanjaju na udžbenike i najčešće koriste one metode koje su korištene u njima. Stoga je cilj ovog diplomskog rada analizirati i istražiti koliko se znanstvene metode, koje su ujedno i aspekti logičkog mišljenja, koriste u udžbenicima za niže razrede osnovne škole.

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada govori se o samom Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika te su opisani matematički procesi i domene, a naglasak je stavljen na matematički proces Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje.

U drugom poglavlju navedeni su aspekti logičkog mišljenja (konkretizacija i apstrakcija, indukcija i dedukcija, analiza i sinteza, analogija, generalizacija i specijalizacija), odnosno osnovne znanstvene metode razvijanja mišljenja i usvajanja pojmova te je opisana svaka od tih metoda s primjerima.

U trećem poglavlju analizirani su udžbenici iz Matematike kako bi se vidjelo u kojoj mjeri i na koji način udžbenici koriste spomenute znanstvene metode razvijanja mišljenja i usvajanja pojmova.

1. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

Na temelju nacionalnog kurikulumu, školskog kurikulumu te na temelju nastavnih planova i programa ostvaruje se odgoj i obrazovanje u osnovnim i srednjim školama. Kurikulumom nastavnih predmeta određuju se svrha i ciljevi učenja i poučavanja nastavnog predmeta, struktura pojedinog predmeta u cijeloj odgojno-obrazovnoj vertikali, odgojno-obrazovni ishodi i sadržaji, pripadajuća razrada i opisi razina usvojenosti ishoda, učenje i poučavanje te vrednovanje u pojedinom nastavnom predmetu, a može se utvrditi i popis potrebnih kvalifikacija učitelja i nastavnika za izvođenje kurikulumu (MZO, 2022). Kao što se i navodi u samom Kurikulumu nastavnog predmeta matematika (MZO, 2019), zbog brzog razvoja suvremenog društva važnost učenja matematike postaje sve veća, a brzom razvoju doprinosi i primjena matematike u svim područjima suvremenog društva. Prema tome, jedan od čimbenika tehnološkog napretka društva te bitan element poboljšanja kvalitete življenja je zasigurno matematika. Učenje i poučavanje matematike omogućuje razvoj suvremenog društva u cjelini. Jedan od bitnih preduvjeta za pripremljenost mladih ljudi za život u modernome društvu, odnosno za razvoj životnih vještina pojedinca, primjenu matematičkih strategija, cjeloživotno učenje, otvorenost za uporabu novih tehnologija te ostvarivanje vlastitih potencijala matematička je pismenost. *Programme for International Student Assessment* (PISA, 2021) definira matematičku pismenost kao sposobnost pojedinca da matematički zaključuje te formulira, primjenjuje i tumači matematiku prilikom rješavanja problema u različitim stvarnim životnim kontekstima. Ona obuhvaća koncepte, procedure, činjenice i alate potrebne za opisivanje, objašnjavanje i predviđanje pojava te pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, angažiranom i promišljajućem građaninu 21. stoljeća. Važan aspekt

matematičke pismenosti je induktivno i deduktivno matematičko zaključivanje koje obuhvaća procjenjivanje situacija, odabir strategija, izvođenje logičkih zaključaka, razvoj i opisivanje rješenja te prepoznavanje načina na koji se takva rješenja mogu primijeniti. Stoga učenici matematički zaključuju kada identificiraju, prepoznaju, organiziraju i prikazuju, konstruiraju, apstrahiraju, vrednuju, zaključuju, opravdavaju, objašnjavaju i brane te tumače, prosuđuju, kritički procjenjuju, osporavaju i kvalificiraju.

Pojedinac koji je svjestan da posjeduje kompetencije kojima može riješiti i osobne i problemske situacije u zajednici u kojoj živi ima mogućnost djelovanja. Sama svjesnost o posjedovanju kompetencija poticaj je da bude koristan i odgovoran za napredak osobnog, radnog i socijalnog okruženja. Kako bi učenik mogao razumjeti matematičke pojmove, procese i koncepte te kako bi se kod učenika razvila kreativnost i sposobnost shvaćanja apstraktnih pojmova, poučavanje je potrebno započeti uporabom što više konkretnih i njima bliskih situacija, a zatim prijeći na apstraktnije modeliranje i opisivanje. Matematički način razmišljanja zapravo i jest proizašao od proučavanja prirodnih pojava, ljudskog djelovanja u arhitekturi, umjetnosti, tehnologiji i slično. Još u davnoj prošlosti ljudi su imali potrebu objasniti ta djelovanja. U poučavanju matematike tijekom školovanja velika se pozornost posvećuje postupnosti u prihvaćanju i usvajanju matematičkih znanja te uspostavljanju veza među njima. Takvim strukturiranim pristupom svakom učeniku se omogućuje individualizirani put prema razvoju i primjeni matematičkog razmišljanja. Učenje i poučavanje matematike u učenicima budi svijest o vlastitim matematičkim kompetencijama te ih motivira da se i dalje aktivno razvijaju, izgrađuju i primjenjuju, ne samo u matematici, nego i u ostalim životnim područjima (MZO, 2019). Povezivanjem matematičkih procesa i domena ostvaruje se učenje i poučavanje nastavnog predmeta Matematika, a očituje se u ishodima te tako doprinosi stjecanju matematičkih kompetencija. „Matematičke se kompetencije neprestano razvijaju putem uravnoteženog preplitanja matematičkih procesa i domena predmeta Matematika, ali i putem drugih područja odgoja i obrazovanja te tijekom svih faza školovanja.“ (MZO, 2019).

1.1. Matematički procesi kurikulumu nastavnog predmeta Matematika

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika (MZO, 2019) navodi da su matematički procesi važni na svim razinama obrazovanja te tako prožimaju sve domene kurikulumu nastavnog predmeta Matematika. Metodama aktivne nastave potrebno je razvijati matematičke procese te ih povezivati s konceptima i integrirati ih u rješavanje problema otkrivajući nove matematičke sadržaje. Pavleković (2009) navodi vođeno učenje otkrivanjem kao jednu od nastavnih strategija koja se može koristiti prilikom razvijanja matematičkih procesa. Tom

strategijom učitelj vodi učenika kroz zadatak, ali mu ostavlja mogućnost samostalnog zaključivanja. Ova strategija pogodna je za početnu nastavu matematike gdje većina učenika još uvijek nema sposobnost samostalnog istraživanja.

Matematički procesi u Kurikulumu organizirani su u pet skupina: *Prikazivanje i komunikacija, Povezivanje, Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, Rješavanje problema i matematičko modeliranje* te *Primjena tehnologije*.

Prikazivanje i komunikacija: Učenici smisleno prikazuju matematičke objekte, obrazlažu rezultate, objašnjavaju svoje ideje i bilježe postupke koje provode koristeći se pritom različitim prikazima (riječima, crtežima, grafovima, tablicama...). Odabiru prikaz koji je prikladan određenoj situaciji te povezuju različite prikaze. Prikupljaju i tumače informacije iz različitih izvora, koriste se matematičkim jezikom te razumiju matematičke opise i objašnjenja drugih. Razmjenjuju svoje ideje, mišljenja i stavove. Uspješno razvijanje komunikacije vodi prema lakšem i bržem usvajanju novih sadržaja i kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika, ali i kurikuluma ostalih nastavnih predmeta.

Povezivanje: Učenici uspostavljaju i razumiju veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikuju cjeline njihovim nadovezivanjem. Uspoređuju, grupiraju i klasificiraju objekte i pojave prema zadanome ili izabranome kriteriju. Povezuju matematiku s vlastitim iskustvom, prepoznaju je u primjerima iz okoline i primjenjuju u drugim područjima kurikuluma. Tako ostvaruju jasnoću, pozitivan stav i otvorenost prema matematici te povezuju matematiku sa sadržajima ostalih predmeta i životom tijekom procesa cjeloživotnoga učenja.

Rješavanje problema i matematičko modeliranje: Učenici analiziraju problemsku situaciju, prepoznaju elemente koji se mogu matematički prikazati i planiraju pristup za njezino rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka. Odabiru, osmišljavaju i primjenjuju razne strategije, rješavaju problem, promišljaju i vrednuju rješenje te ga prikazuju na prikladan način. Razvojem ovoga procesa, osim primjene matematičkih znanja, učenici razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost u suočavanju s novim i nepoznatim situacijama.

Primjena tehnologije: Korištenje alatima i tehnologijom pomaže učenicima u matematičkim aktivnostima u kojima su u središtu zanimanja matematičke ideje, pri provjeravanju pretpostavki, pri obradi i razmjeni podataka i informacija te za rješavanje problema i modeliranje. Učenici uočavaju i razumiju prednosti i nedostatke tehnologije. Na taj se način prirodno otvaraju mogućnosti za nove ideje, za dublja i drukčija matematička promišljanja, kao i za nove oblike učenja i poučavanja.

Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje: Učenje matematike karakterizira razvoj i njegovanje logičkoga i apstraktnoga mišljenja. Poučavanjem i učenjem nastavnoga predmeta Matematika učenici se suočavaju s izazovnim problemima koji ih potiču na promišljanje, argumentiranje i dokazivanje te donošenje samostalnih zaključaka. Učenici postavljaju matematički svojstvena pitanja te stvaraju i istražuju na njima zasnovane matematičke pretpostavke, uočene pravilnosti i odnose. Stvaraju i vrednuju lance matematičkih argumenata, zaključuju indukcijom i dedukcijom, analiziraju te primjenjuju analogiju, generalizaciju i specijalizaciju. Primjenjuju poznato u nepoznatim situacijama i prenose učenje iz jednoga konteksta u drugi. Razvijaju kritičko mišljenje te prepoznaju utjecaj ljudskih čimbenika i vlastitih uvjerenja na zaključivanje. Proces mišljenja razvijen nastavom matematike učinkovito primjenjuju u svome svakodnevnom životu. U ovom radu, najviše pažnje posvetit će se upravo ovom procesu.

1.2. Domene nastavnog predmeta Matematika

Broj, oblik, struktura i promjena velike su matematičke ideje na kojima se temelji početak i razvoj matematike. Upravo oko tih ideja razvijaju se grane matematike te se grade matematički koncepti. Da bismo mogli razumjeti informacije, procese i pojave u svijetu koji nas okružuje, potrebno je usvojiti spomenute koncepte. Srodni koncepti u Kurikulumu grupirani su u domene *Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podaci, statistika i vjerojatnost* (MZO, 2019). Premda domene povezuju srodne koncepte, njihova se nedjeljivost stalno primjećuje jer je usvojenost koncepata jedne domene često pretpostavka usvajanju koncepata u drugim domenama. S obzirom da je matematika jedna logična i zaokružena cjelina, usvajanju koncepata potrebno je pristupiti cjelovitim pristupom kako bi se stekla matematička znanja i vještine te kako bi se razvile matematičke kompetencije koje podrazumijevaju prikazivanje i komuniciranje matematičkim jezikom, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, matematičko modeliranje i rješavanje problema te uporabu tehnologije. U svim domenama matematika se povezuje sa stvarnim situacijama, a njezina svakodnevna primjena čini je važnom i nezamjenjivom za razvoj društva u cjelini. (MZO, 2019).

Brojevi: Učenici postupno usvajaju apstraktne pojmove broja, brojevnog sustava i skupa te se razvija vještina izvođenja aritmetičkih postupaka. Počinje se u skupu prirodnih brojeva s nulom te se postupno upoznaju skupovi cijelih, racionalnih, iracionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Učenici razvijaju predodžbu o brojevima, a koristeći osnovna svojstva i međusobne veze računskih operacija usvajaju vještinu računanja. Koncepti iz domene Brojevi osnova su svim ostalim matematičkim konceptima i na njima se gradi daljnje učenje

matematike, a učenici će te koncepte u budućnosti svakodnevno upotrebljavati u osobnome, radnome i društvenome okružju.

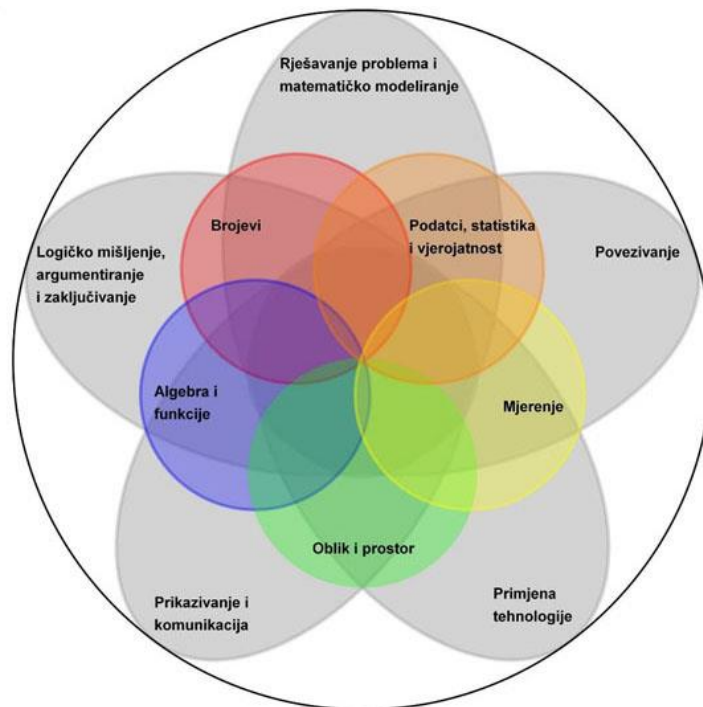
Algebra i funkcije: Učenici koriste različite vrste prikaza: grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija. Koristeći se odgovarajućim algebarskim procedurama rješavaju jednadžbe i nejednadžbe, primjenjuju formule i provjeravaju pretpostavke. Jezikom algebre definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Algebarski opisuju situacije koje modeliraju, analiziraju ih i tako rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života.

Oblik i prostor: Ova domena bavi se proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Proučavajući oblike uspoređuju se njihova svojstva, uspostavljaju se veze među njima, te se iz uočenih svojstava i odnosa izvode pretpostavke i tvrdnje koje se dokazuju crtežima i odgovarajućim algebarskim izrazima. Učenici izvode geometrijske transformacije koristeći se geometrijskim priborom i tehnologijom te razvijaju koncepte sukladnosti i sličnosti. Pronalaze primjenu matematičkih rješenja u različitim situacijama u interakciji s ostalim domenama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okružju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.

Mjerenje: Učenici usvajaju standardne mjerne jedinice za novac, duljinu, površinu, volumen, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu. Mjeri se odgovarajućim mjernim uređajima. Procjenjivanjem, mjerenjem, preračunavanjem i izračunavanjem veličina određuju se mjeriva obilježja oblika i pojava uz razložnu i učinkovitu upotrebu alata i tehnologije. Rezultati se interpretiraju i izražavaju u jedinici mjere koja odgovara situaciji. Učenici mjerenjem povezuju matematiku sa ostalim odgojno-obrazovnim područjima, s vlastitim iskustvom te sa svakodnevnim životom.

Podatci, statistika i vjerojatnost: ova domena bavi se prikupljanjem, razvrstavanjem, obradom, analizom i prikazivanjem podataka u odgovarajućem obliku. Podatke dane grafičkim ili nekim drugim prikazom treba znati očitati te ih ispravno protumačiti i upotrijebiti. Sve se to postiže koristeći se jezikom statistike. Ona podrazumijeva uporabu matematičkoga aparata kojim se računaju mjere srednje vrijednosti, mjere raspršenja, mjere položaja i korelacije podataka. Nakon prepoznavanja veza među podacima i promatrajući frekvencije pojavljivanja, dolazi se do pojma vjerojatnosti. Određuje se broj povoljnih i svih mogućih ishoda, procjenjuje se i izračunava vjerojatnost što nam omogućuje predviđanje događaja. (MZO, 2019).

Slika 1. Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika, (MZO, 2019).



2. Osnovne znanstvene metode mišljenja

Nastava matematike je zahtjevan i složen proces, a stručnost nastavnika i učitelja je nužan preduvjet da bi nastava bila uspješna. No to nije jedini preduvjet. Povezivanjem s drugim znanostima razrješuje se problem složenosti matematike kao znanosti. Proces koji se dobije tim povezivanjem treba skladno ostvarivati unutar nekoliko okvira. Prema Kurniku (2009.) glavni okviri su jezični, stručni, metodički, znanstveni, pedagoški i psihološki. Za suvremenu nastavu matematike važna je povezanost s matematikom kao znanostu. Načelo znanstvenosti uspostavlja tu povezanost, no primjenom znanstvenih metoda u nastavi matematike ta veza se produbljuje. „Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne strane i zahtjeva i zakonitosti matematike kao znanosti s druge strane. To znači da nastavnik matematike treba učenike upoznavati s onim činjenicama i u njihovom mišljenju formirati one matematičke pojmove koji su danas znanstveno potvrđeni. Nastava matematike mora biti takva da omogućuje daljnja produblivanja i proširivanja gradiva i prirodan nastavak matematičkog obrazovanja na višoj razini.“ (Kurnik, 2008, str. 319). Kurnik (2009) navodi znanstvene metode mišljenja i istraživanja: analiza, analogija, apstrakcija, dedukcija, generalizacija, indukcija, konkretizacija, sinteza i specijalizacija. Bez obzira hoće li se učenici kasnije u životu baviti matematikom ili ne, učitelj ih treba postupno i primjereno dobiti naučiti analizirati, apstrahirati, sintetizirati, specijalizirati, generalizirati, inducirati, deducirati

te uočavati analogije. U osnovnoj školi nastava matematike uglavnom je konkretna i induktivna. Učitelj pred učenike prvo postavlja konkretne primjere te se induktivnim zaključivanjem dolazi do generalizacije i usvajanja apstraktnih pojmova. Takav način je primjeren učenicima osnovne škole, a posebice učenicima nižih razreda osnovne škole. Te metode su spomenute i u procesu *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* (MZO, 2019) što je i polazište za ovaj rad. Sve navedene metode koriste se u svim znanostima, a u matematici su važne za dobivanje novih tvrdnji, za dokazivanje dobivenih tvrdnji te za njihovo povezivanje s već poznatim činjenicama i teorijama. Osnovne metode dolaze u parovima, a analogija je iznimka. U nastavku će biti riječi o svakoj od njih.

1.1. Konkretizacija i apstrakcija

Dječji intelektualni razvoj polazi od konkretnog prema apstraktnom, od Piagetove faze konkretnih operacija do naprednije faze formalnih operacija. Upravo se u fazi konkretnih operacija počinje razvijati logičko mišljenje te su djeca sposobna za konzervaciju poznatih sadržaja kao što je stvaranje pojmova, uviđanje odnosa i rješavanje problema. (Piaget, Inhelder, 1982). Ovčar (1990) prema Piagetu (1967) navodi više vrsta operacija kao što su logičke, aritmetičke, vremenske, mehaničke i sl. te da je dijete u ovoj fazi sposobno za izvođenje konkretnih intelektualnih operacija. Jedna od osnovnih metoda mišljenja u znanosti je upravo konkretizacija. Sama riječ *konkretizacija* potječe od latinske riječi *concretus* što znači *stvaran, predmetan*, pa je, prema tome, značenje riječi *ostvarenje, popredmećenje*. Konkretizacija, dakle, ima važnu ulogu u nastavi matematike, a osobito u početnoj nastavi matematike jer učenici nižih razreda osnovne škole spadaju upravo u Piagetovu fazu konkretnih operacija (7.-11. god.). „U stadiju konkretnih operacija (II – V raz. osnovne škole) dijete je sposobno za manipuliranje, stvarno ili zamišljeno. Učenik usvaja matematičke sadržaje tako da manipulira skupovima konkretnih predmeta, skupovima didaktičkog materijala, grafičkim prikazima skupova itd.“ (Ovčar, 1990, str. 39). Kurnik (2009) opisuje konkretizaciju kao misaonu aktivnost pri kojoj se jednostrano pogled usredotočuje na jednu stranu promatranog objekta izvan veze s njegovim drugim stranama. Već je spomenuto da je matematika od samih početaka konkretna i induktivna znanost. No ipak, s druge strane matematika je i vrlo apstraktna. Apstrakcija zauzima važnu ulogu, kako u matematičkim istraživanjima, tako i u nastavi matematike. Apstrakcija potječe od latinske riječi *abstractio* što znači *izdvajanje, izvlačenje, odvajanje, odvlačenje*. Iako postoje mnoge različite definicije apstrakcije, Kurnik (2009) navodi da je apstrakcija misaono odvlačenje općeg bitnog svojstva promatranog objekta ili pojave od ostalih svojstava, nebitnih za određeno proučavanje i odbacivanje tih nebitnih

svojstava. Iz navedenog je vidljivo da je apstrakcija u uskoj vezi s generalizacijom. Upravo metodom generalizacije izdvajaju se bitna svojstva nekog skupa objekata, pa se tako apstrahiranje ne može ostvariti bez generalizacije. Da bi učenici došli do apstraktnih pojmova i da bi mogli generalizirati, u osnovnoj školi se kreće od konkretnih objekata i konkretnih primjera te od induktivnog zaključivanja. „Poopćavanje i apstrahiranje stalno se primjenjuju u procesu formiranja pojma pri prijelazu od predodžbi k pojmovima. Pritom konkretni objekti, potrebni za formiranje novog pojma, moraju biti odabrani tako da omogućuju poopćavanje, izdvajanje bitnih svojstava koja tvore sadržaj pojma.“ Kurnik (2009, str. 135). Apstrakcijom, odnosno izdvajanjem općih i bitnih svojstava, učenici mogu matematički opisati promatrani konkretni objekt.

Svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti usvajaju se već u nižim razredima osnovne škole, a najlakše se usvajaju putem konkretizacije. Pogledajmo to na primjeru svojstva komutativnosti. Kako bi učenici usvojili komutativnost zbrajanja potrebno im je prikazati velik broj konkretnih primjera:

$$\begin{aligned}
 4 + 5 &= 9 & 5 + 4 &= 9 \\
 4 + 5 &= 5 + 4 \\
 12 + 6 &= 18 & 6 + 12 &= 18 \\
 12 + 6 &= 6 + 12
 \end{aligned}$$

Promatranjem više ovakvih konkretnih primjera, učenici induktivnim zaključivanjem mogu otkriti opća svojstva i odvojiti ih od konkretnog sadržaja. Učenici uočavaju da smo brojeve zbrajali različitim redom a da se suma nije promijenila. Kada učenici zaključe što je opće, izvodi se generalizacija konkretnih jednakosti. Umjesto konkretnih brojeva uvodimo nešto što je učenicima apstraktno, a to su varijable (slova kao oznake za brojeve). Npr.:

$$a + b = b + a \quad \text{za sve } a, b \in \mathbb{N}$$

Kurnik (2009) također navodi metodičke napomene za primjenu konkretizacije u nižim razredima osnovne škole.

- Potrebno je koristiti primjeren broj konkretnih slučajeva. Učitelji često koriste premali broj konkretnih predmeta i slučajeva ili ne uključe dovoljan broj učenika.
- Treba pripaziti i posebnu pažnju posvetiti prijelazu sa konkretizacije na apstrakciju, odnosno na dio gdje učenici počinju apstrahirati.
- Učenici teško savladavaju prijelaz s konkretnog i pojedinačnog prema općem, odnosno teško generaliziraju pa je potrebno odabrati prikladan metodički pristup.

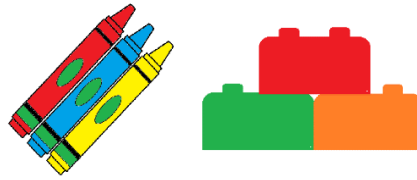
U nižim razredima osnovne škole do apstrakcije se dolazi korištenjem konkretnih primjera. Dakle, iz konkretnih primjera dolazi se do apstraktnih pojmova i zaključaka.

Primjer:

Pojam broja 3

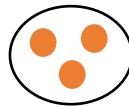
1. Učenici osjetilima opažaju skupove po tri objekta.

Slika 2. *Skupovi od tri konkretna objekta.*



2. Zatim se uočava i izdvaja zajedničko bitno svojstvo promatranih skupova, tj. učenici imaju predodžbu o broju 3.

Slika 3. *Skup od tri objekta.*



3. Na kraju se formira apstraktni pojam broja 3.

2.2. Indukcija i dedukcija

Indukcija i njena suprotnost dedukcija zauzimaju važno mjesto u matematici, posebno među načinima zaključivanja i metodama znanstvene spoznaje. Navedene metode razlikuju se po svojim ciljevima. Cilj indukcije je opće, dok je cilj dedukcije posebno i pojedinačno. Riječ *indukcija* dolazi od latinske riječi *inductio* što znači *uvođenje, navođenje, pobuđivanje*, dok riječ *dedukcija* potječe od riječi *deductio* što znači *izvođenje*.

Prema Kurniku (2009.) pojam indukcija ima tri osnovna značenja:

- Indukcija je jedan od načina zaključivanja kojim se iz dvaju ili više pojedinačnih ili posebnih sudova dobiva novi opći sud. Odnosno, indukcija je rasuđivanje od pojedinačnog k općem. To je misaoni proces kojim se stvaraju generalizacije.
- Indukcija je jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja kojom se pri proučavanju nekog skupa objekata promatraju posebni objekti iz tog skupa i utvrđuju kod njih zajednička svojstva koja se zatim pripisuju čitavom skupu.
- Indukcija je način izlaganja u literarnom izvoru, u razgovoru, u nastavnom procesu kada se od manje općih tvrdnji dolazi do općih tvrdnji.

U nastavi matematike u osnovnoj školi indukcija bi se trebala koristiti u velikoj mjeri jer učenici induktivnim zaključivanjem dolaze do shvaćanja apstraktnih pojmova. Upravo taj induktivni postupak sastoji se od niza induktivnih koraka kako bi se došlo do shvaćanja nekog

općenitijeg pojma. Prema tome, induktivni postupak zaključivanja usko je vezan i sa ostalim metodama mišljenja i istraživanja. „Počinje se konkretnim objektima i specijalnim slučajevima, induktivni zaključci nižu se analogijom, a promatrane činjenice nastoje se generalizirati. Uočavamo tijesnu povezanost indukcije s konkretizacijom, specijalizacijom, analogijom i generalizacijom.“ (Kurnik, 2009, str. 7). Kurnik (2009) također navodi prednosti primjene indukcije, a to su: ostvarenje načela od lakšeg ka težem, od jednostavnog ka složenom, proučavanje novih apstraktnih pojmova i izreka preko promatranja i provjeravanja, navođenje učenika na nove pojmove, iskazivanje novih tvrdnji i slično. Kada se općeniti zaključci donose na temelju pojedinačnih tvrdnji te zaključke treba i dokazati, a dokazujemo ih matematičkom indukcijom ili potpunom indukcijom. Dokazivanje matematičkom indukcijom koristi se tek u srednjoj školi. Ipak, induktivno zaključivanje koristi se od 1. razreda osnovne škole, ali se koristi tzv. nepotpuna indukcija. Nepotpuna indukcija je oblik zaključivanja koji se zasniva na razmatranju nekoliko posebnih slučajeva te se na temelju toga dolazi do općih zaključaka. Dakle, zaključak dobiven nepotpunom indukcijom se ne dokazuje, no nepotpuna indukcija nezaobilazna je metoda za stjecanje novih spoznaja. (Petrović, 1964).

Kao što je već spomenuto, dedukcija je suprotnost indukciji, odnosno obrnuti postupak od indukcije. „Dedukcija je oblik zaključivanja pri kojemu se od jednog općeg suda i jednog posebnog ili pojedinačnog suda dobiva novi, manje općenit, poseban ili pojedinačan sud.“ (Kurnik, 2009, str. 168).

Prema Kurniku (2009) deduktivno zaključivanje ima tri oblika:

- a) Zaključivanje od općenite tvrdnje na manje općenitu ili pojedinačnu tvrdnju. Odnosno iz dvaju sudova izvodi se pojedinačna tvrdnja.
- b) Zaključivanje od pojedinačnog prema posebnom.
- c) Zaključivanje od opće tvrdnje prema općoj tvrdnji.

U nastavi matematike dedukcija je metoda dokazivanja zasnovana na logici, odnosno na logičkom mišljenju. Prema Ovčaru (1990) u nastavi matematike od 1. do 4. razreda osnovne škole treba se primjenjivati induktivno-deduktivni postupak, a primjenjuje se tako da učenici induktivno usvajaju određene matematičke generalizacije, a nakon toga ih deduktivno primjenjuju u rješavanju pojedinačnih matematičkih zadataka. Nastava matematike u nižim razredima osnovne škole je u najvećoj mjeri induktivna što znači da se u nastavi najviše koriste konkretni primjeri koji od učenika ne zahtijevaju dokazivanje. Takvi konkretni primjeri služe kako bi učenike uvjerali u istinitost tvrdnji, dok se u višim razredima matematički sadržaji usvajaju deduktivno. U Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika (MZO, 2019) za razrednu nastavu indukcija se spominje samo jednom, dok se dedukcija spominje samo za srednju školu.

Ipak, iako se eksplicitno ne spominje, dedukcija se koristi i u osnovnoj školi, što ćemo i vidjeti kasnije u primjerima. Kao preporuku za ostvarivanje ishoda MAT OŠ A.3.1. Kurikulum navodi da je pri usvajanju uspoređivanja brojeva potrebno koristiti indukciju kako bi učenici sami zaključili koja su pravila za uspoređivanje višeznamenastih brojeva.

2.3. Analiza i sinteza

Analiza i njena suprotnost sinteza, predstavljaju jedne od osnovnih misaonih operacija i znanstvenih metoda istraživanja te su najranije primjenjivane metode u matematici. Ove metode različito pristupaju problemu koji je potrebno riješiti, no jedna bez druge ne mogu funkcionirati. Preciznije, analiza i sinteza se međusobno nadopunjuju te tako čine tzv. analitičko-sintetičku metodu. Iako postoji mnogo različitih definicija analize i sinteze, analizu možemo definirati kao misaonu operaciju u kojoj cjelinu raščlanjujemo na dijelove te proučavajući te dijelove izvodimo zaključke o njima (Kurnik, 2009). Pri tome je cjelina najčešće neki problem čije rješenje tražimo. Analizom problem raščlanjujemo na jednostavnije probleme koji se jednostavnije i rješavaju. Kao što je već spomenuto, sinteza je metoda suprotna analizi. Kurnik (2009) sintezu definira kao znanstvenu metodu istraživanja koja se zasniva na povezivanju proučenih dijelova u cjelinu koje rješava postavljeni problem. Dakle, sintezom pojedinačne dijelove (jednostavne tvrdnje i činjenice) sastavljamo u cjelinu, odnosno neku složeniju tvrdnju. Kurnik (2009) također navodi definicije analize i sinteze prema Descartesu koji pojam analize predstavlja kao oblik mišljenja kod kojeg se od posljedice dolazi do uzroka, dok pojam sinteze definira kao oblik mišljenja kod kojeg se od uzroka dolazi do posljedice. Analiza i sinteza temelje se na razumijevanju strukture nekog problema, odnosno na raščlanjivanju problema te sintetiziranje problema u neku novu cjelinu. U nižim razredima osnovne škole najbolji primjer za analizu i sintezu jesu problemski zadaci. Rješavanje svakog problemskog (tekstualnog) zadatka zahtijeva analizu teksta zadatka, odnosno raščlanjivanje zadaka na dijelove kako bismo utvrdili što se u njemu traži te koji postupci će nam biti potrebni da bismo došli do rješenja zadatka. U nižim razredima osnovne škole analiza se najčešće provodi pitanjima: *Što je u zadatku poznato? Što nepoznato? Što ćemo najprije izračunati? Koju računsku radnju ćemo koristiti?* Nakon analize slijedi rješavanje zadatka te se na kraju dolazi do sinteze. Sintezom spajamo sve dijelove koje smo prethodno analizirali, odnosno interpretirajući sve što smo izračunali dobivamo sintezu. Sinteza je zapravo rečenica koja predstavlja rješenje zadatka, odnosno, kod tekstualnih zadataka sinteza je odgovor.

Primjer:

Lasta je u jednom danu preletjela 15 kilometara, u drugom 6 manje nego u prvom, u trećem danu 2 km više nego u drugom danu, a u četvrtom danu 2 km manje nego u drugom i trećem danu zajedno. Koliko je kilometara lasta preletjela u sva četiri dana?

Analiza:	1. dan: 15 km	Sinteza:	$15 + 9 + 11 + 18 = 53$ km
	2. dan: $15 - 6 = 9$ km		Lasta je ukupno preletjela 53 km.
	3. dan: $9 + 2 = 11$ km		
	4. dan: $(9 + 11) - 2 = 18$ km		

Iz ovog može se vidjeti da analiza predstavlja raščlanjenje problema na pojedinačne slučajeve (dane), dok sinteza daje odgovor na temelju analize.

2.4. Analogija

Analogija je jedan od oblika zaključivanja. Sama riječ analogija potječe od grčke riječi *analogia* što znači *razmjer, sklad, pravilnost, odnos, podudarnost, srodnost*. Prema Kurniku (2009) analogija je misaoni postupak pri kojem se iz činjenice da se dva objekta podudaraju u nekim svojstvima, izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima. Ovčar (1990) prema Arandžević (1963) navodi da je analogija misaona radnja kojom se otkrivaju i upoznaju određena obilježja nekog predmeta. U početnoj nastavi matematike zaključivanje po analogiji se koristi u velikoj mjeri te je razvijanje ovakvog načina razmišljanja kod djece vrlo bitno u matematici. Analogijom se učenike uvodi u uočavanje zakonitosti u sličnim pojavama ili sličnim situacijama. Da bi učenici došli do novih spoznaja primjenom analogije prvo trebaju usvojiti određena matematička obilježja, zatim uočiti ista obilježja u analognoj situaciji, a na kraju se izvedena spoznaja do koje se došlo analogijom treba i provjeriti.

Ovčar (1990) kao primjer analogije navodi usvajanje ovisnosti zbroja o promjeni pribrojnika. Učenici prvo promatraju promjenu zbroja ovisno o promjeni prvog pribrojnika:

$$2 + 4 = 6$$

$$(2 + 1) + 4 = 3 + 4 = 7$$

Učenici utvrđuju da se prvi pribrojnik uvećao za jedan te da se i zbroj uvećao za jedan. Zatim uvećamo prvi pribrojnik za dva:

$$(2 + 2) + 4 = 4 + 4 = 8$$

Učenici uspoređuju prvu i zadnju jednakost te zaključuju da se prvi pribrojnik uvećao za dva pa se tako i zbroj uvećao za dva.

Zaključivanjem nepotpunom indukcijom učenici mogu generalizirati: Ako prvi pribrojnik uvećamo za neki broj i zbroj će se uvećati za isti broj.

Zatim se analogijom dolazi do zaključaka:

- Ako drugi pribrojnik uvećamo za neki broj i zbroj će se uvećati za isti broj.
- Ako prvi pribrojnik umanjimo za neki broj i zbroj će se umanjiti za isti broj.
- Ako drugi pribrojnik umanjimo za neki broj i zbroj će se umanjiti za isti broj.

Primjenom drugih misaonih radnji kao što su indukcija, analiziranje i sintetiziranje, dedukcija i dr. na temelju ovih analognih zaključaka učenici mogu samostalno doći do generalizacije:

- Ako neki pribrojnik uvećamo/umanjimo za određeni broj i zbroj će se uvećati/umanjiti za isti broj.

2.5. Generalizacija i specijalizacija

Generalizacija i specijalizacija jedne su od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja. Riječ generalizacija nastala je od latinske riječi *generalisatio*, što znači *poopćavanje, uopćivanje, uopćenost* te prema riječi *generalis* što znači *općenit, opći, sveopći, sveobuhvatan*. Prema Kurniku (2000) generalizacija ili poopćavanje je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa. Dakle, kreće se od polaznog pojma kojemu je pridružen neki skup objekata te se ustanovi zajedničko svojstvo svih elemenata tog skupa. Zatim se gleda općenitiji pojam te se promatra hoće li se to svojstvo prenijeti i na novi općenitiji skup ili će se izgraditi neko općenitije svojstvo. Stoga je generalizacija metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje. S obzirom da je generalizacija složeni misaoni proces koji učenici teško savladavaju, učitelj je taj koji će metodičkim pristupom učiniti prijelaz s konkretnog i pojedinačnog prema općem što lakšim. Već je spomenuto kako se sve spomenute metode međusobno nadopunjuju i vežu jedna uz drugu, pa je tako generalizacija u uskoj vezi s analogijom i indukcijom. Analogija u pravilu prethodi generalizaciji, a induktivni način zaključivanja (od pojedinačnog k općem) je osnova generalizacije. Nastava matematike u nižim razredima osnovne škole pretežno je induktivna, pa tako učitelj pomoću konkretnih objekata uvodi nove pojmove, zatim se opisuju njihova svojstva, te se na temelju njih mogu izvoditi generalizacije. Pa je tako poopćenje pojma kvadrata, pojam pravokutnika ili pojam romba, a poopćenje pojma pravokutnika je pojam paralelograma. Iz ovoga se može zaključiti da se prijelaz od pojedinačnog k općem najčešće vrši u „najbliži“ skup.

Specijalizacija je metoda suprotna generalizaciji, stoga Kurnik (2009) specijalizaciju definira kao prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova

podskupa. Prema Petroviću (1964) specijalizacija je postupak kojim se dodavanjem oznaka nekom pojmu dobiva pojam bogatiji po sadržaju, ali uži po opsegu (npr. od pojma *umjetnost* specijalizacijom možemo dobiti pojam *likovna umjetnost*). Specijalizacija je jako česta u nastavi matematike i ima vrlo široku primjenu. Za razliku od generalizacije koja prelazi s konkretnog i pojedinačnog prema općem, metoda specijalizacije vodi prema jednostavnijim matematičkim činjenicama te tako omogućuje učenicima lakše i bolje razumijevanje školskih sadržaja. Kao primjer specijalizacije može se navesti izvođenje formule za opseg kvadrata koja je specijalizirana formula za opseg pravokutnika:

Opseg pravokutnika:	⇒	Opseg kvadrata:
$o = 2a + 2b$		$o = 2a + 2b$
		$o = 2a + 2a$
		$o = 4a$

3. Analiza udžbenika

Matematički udžbenik može se definirati kao službena autorizirana i pedagoški oblikovana matematička knjiga, a napisana je s ciljem da učenicima ponudi matematičke sadržaje. (Glasnović Gracin, 2014). U nastavi Matematike, udžbenike u velikoj mjeri koriste i učenici i učitelji. Učitelji za pripremu nastave, a učenici za rješavanje zadataka na satu ili za domaću zadaću. Učitelj ima ulogu posrednika između teksta u udžbeniku i učenika. (Glasnović Gracin i Domović, 2009). Logičko mišljenje i metode koje razvijaju logičko mišljenje kao što su indukcija, dedukcija, analogija, analiza, sinteza i sl. u Kurikulumu (MZO, 2019) se ne spominju u velikoj mjeri za niže razrede osnovne škole. Unatoč tome, te metode bi u početnoj nastavi Matematike trebale biti zastupljene svakodnevno. S obzirom da se učitelji prilikom pripreme nastave najviše oslanjaju na udžbenike i najčešće koriste one metode koje su korištene u njima, analizirani su udžbenici na temelju primjera za svaku od ranije spomenutih metoda kako bi se vidjelo u kojoj mjeri i na koji način su te metode zapravo zastupljene u udžbenicima.

3.1. Zadaci induktivnog i deduktivnog zaključivanja

Za primjer induktivnog zaključivanja izdvojili smo zadatke oblika *nastavi niz* i zadatke uspoređivanja brojeva.

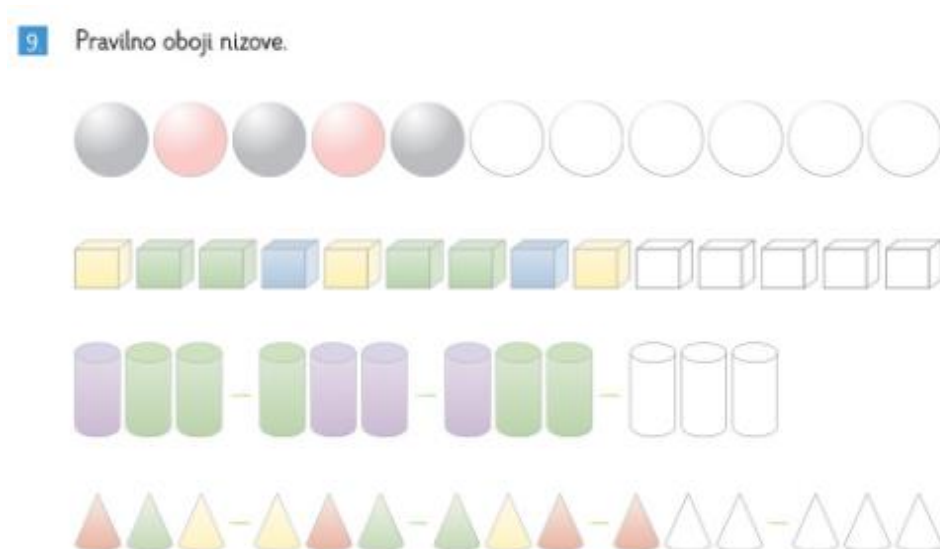
Krenut ćemo od ishoda za 1. razred osnovne škole: MAT OŠ B.1.2. *Prepoznaje uzorak i nastavlja niz* (MZO, 2019)., gdje se navodi da zadaci koji zahtijevaju da se *nastavi niz* potiču logičko mišljenje kod učenika. Zadaci u kojima je potrebno nastaviti niz mogu biti različito

postavljeni, pa tako zadaci u kojima se traži da se na osnovu prvih nekoliko članova niza odredi opće pravilo kako će se niz dalje nastaviti potiču induktivno zaključivanje. Za spomenuti ishod MAT OŠ B.1.2. Kurikulum (MZO, 2019) također navodi da je u osmišljavanju zadatka *nastavi niz* potrebno pripaziti da je ponuđeno dovoljno objekata u nizu kako bi se tražena pravilnost zaista mogla jedinstveno zaključiti. Odnosno, od učenika 1. razreda osnovne škole u ovakvim zadacima bi se trebalo tražiti da induktivno zaključuju. Za ovaj primjer analizirani su udžbenici za 1. razred osnovne škole:

- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 1: radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 1: udžbenik matematike u 1. razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.

U udžbeniku *Super matematika za prave tragače 1* zadaci *nastavi niz* prvi put se pojavljuju uz geometrijska tijela gdje učenici najčešće nastavljaju niz tako da pravilno oboje geometrijska tijela, a kasnije i geometrijske likove. Također, nekoliko je zadataka gdje učenici trebaju nadopuniti što u nizu nedostaje ili prepoznati što je u nizu pogrešno.

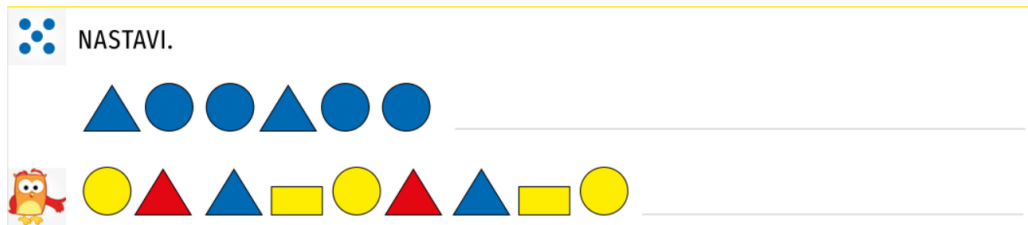
Slika 4. Primjer zadatka *nastavi niz* u udžbeniku *Super matematika za prave tragače 1*



Udžbenik *Otkrivamo matematiku 1* u zadacima *nastavi niz* najčešće koristi geometrijske likove, no ovakvi zadaci su česti i kod usvajanja brojeva gdje učenici trebaju nastaviti brojevni

niz. U ovom udžbeniku učenici sami trebaju i nacrtati i obojiti likove koji slijede u nizu. S obzirom da učenicima nije već nacrtano koji lik slijedi, učenici moraju obratiti pažnju i na likove i na boje koje slijede u nizu, a na takav se način potiče svjesnost o likovima koje crtaju.

Slika 5. *Primjer zadatka nastavi niz u udžbeniku Otkrivamo matematiku 1*



Udžbenik *Moj sretni broj 1* ima ponešto drugačiji pristup zadacima *nastavi niz*. Na samom početku ovog udžbenika nalazi se nastavna jedinica pod nazivom *Niz* koja učenike uvodi u zadatke u kojima treba nastaviti niz. Prvo je prikazano nekoliko nizova, zatim slijedi nekoliko zadataka gdje treba uočiti što u nizu nedostaje, a zatim slijede zadaci gdje je potrebno nastaviti niz. Ovakvi zadaci nastavljaju se i kroz ostale nastavne jedinice u udžbeniku povezujući nizove s nastavnim jedinicama (geometrijska tijela, likovi, brojevi...).

Slika 6. *Nastavna jedinica Niz iz udžbenika Moj sretni broj 1*



U svim analiziranim udžbenicima zadovoljeni su zahtjevi Kurikuluma te je u svim zadacima oblika *nastavi niz* ponuđeno dovoljno objekata u nizu kako bi učenici mogli zaključiti koji je logičan slijed niza.

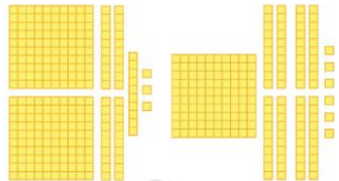
Ranije u ovom radu spomenuto je da se u Kurikulumu (MZO, 2019) indukcija za razrednu nastavu spominje samo jednom, a to je u ishodu MAT OŠ A.3.1. gdje se kao preporuka za ostvarivanje ishoda navodi da je pri usvajanju uspoređivanja brojeva potrebno koristiti indukciju kako bi učenici sami zaključili koja su pravila za uspoređivanje višeznamenkastih brojeva. U nastavku će biti prikazano kako koji udžbenik uvodi uspoređivanje višeznamenkastih brojeva te koriste li indukciju. Analizirani su sljedeći udžbenici:

- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 3: radni udžbenik iz matematike za treći razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 3: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
- Cindrić, M., Mišurac, I. (2021). Matematička mreža 3: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.

Udžbenik *Otkrivamo matematiku 3* kod nastavne jedinice *Uspoređivanje brojeva do 10 000* polazi od uspoređivanja troznamenkastih brojeva. Na temelju primjera izveden je i zaključak kao što se može vidjeti iz slike 7. Nakon nekoliko zadataka uspoređivanja isključivo troznamenkastih brojeva, u zadacima se počinju pojavljivati i četveroznamenkasti brojevi. Dakle, učenicima je iznesen zaključak za uspoređivanje brojeva do 1 000, no učenici sami, induktivnim putem, mogu zaključiti koja su pravila uspoređivanja četveroznamenkastih brojeva.

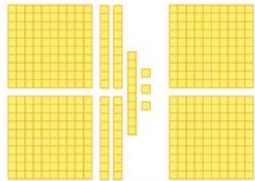
Slika 7. Uvođenje uspoređivanja brojeva u udžbeniku *Otkrivamo matematiku 3*

2. Usporedi i dopuni. Koje su znamenke jednake, a koje različite?



$253 > 186$

Broj 253 veći je od 186 jer ima veću znamenku stotica.



$253 > 223$

Broj 253 veći je od 223 jer ima jednaku znamenku stotica i veću znamenku desetica od one broja 223.

Prikaži brojeve pomoću kartica i usporedi.

432	<input type="radio"/>	156	988	<input type="radio"/>	399
18	<input type="radio"/>	35	718	<input type="radio"/>	735
519	<input type="radio"/>	617	444	<input type="radio"/>	22
890	<input type="radio"/>	889	389	<input type="radio"/>	390

Broj 253 veći je od _____ jer ima jednake znamenke stotica i desetice te veću znamenku jedinica.

$253 > \underline{\hspace{2cm}}$

U udžbeniku *Matematička mreža 3* uspoređivanje brojeva započinje nastavnom jedinicom *Uspoređivanje brojeva do 1 000*. U ovom udžbeniku se također na temelju primjera iznose pravila za uspoređivanje troznamenkastih brojeva (slika 8), no u cijelom udžbeniku nema zadataka uspoređivanja četveroznamenkastih brojeva.

Slika 8. Uspoređivanje brojeva u udžbeniku *Matematička mreža 3*



I bez brojevnice lako je uspoređivati brojeve do 1000.

Marko promatra izlog s odjećom. Hlače stoje 297 kuna, a cipele 342 kune.

$297 < 342$ Hlače su jeftinije od cipela.
 $342 > 297$ Cipele su skuplje od hlača.

Od dva troznamenkasta broja veći je onaj koji ima veći broj stotica.

Ela promatra izlog trgovine sportske opreme. Košarkaška lopta stoji 198 kuna. Nogometna lopta stoji 158 kuna.

$198 > 158$ Košarkaška lopta skuplja je od nogometne lopte.
 $158 < 198$ Nogometna lopta jeftinija je od košarkaške lopte.

Ako dva troznamenkasta broja imaju jednak broj stotica, manji je onaj koji ima manji broj desetica.



Udžbenik *Moj sretni broj 3* kod nastavne jedinice *Uspoređivanje brojeva do 10 000* polazi od uspoređivanja brojeva sa različitim brojem znamenaka, zatim se uspoređuju troznamenkasti brojevi koji su prikazani u tablici mjesnih vrijednosti. Iznosi se pravilo da se najprije uspoređuje znamenka stotica, a učenici sami trebaju zaključiti što ako brojevi imaju jednaku znamenku stotica ili jednaku znamenku i stotica i desetica. Nakon troznamenkastih brojeva uspoređuju se

i četveroznamenasti brojevi, a zatim se navodi pravilo koje glasi: „Višeznamenaste brojeve počinjemo uspoređivati od najveće mjesne vrijednosti, a zatim slijeva nadesno sve do prve različite znamenke.“ (Jakovljević Rogić i dr., 2021, str. 18).

Slika 9. Uspoređivanje brojeva u udžbeniku *Moj sretni broj 3*.

Usporedi brojeve s različitim brojem znamenaka.
 $11 < 111$ $586 > 92$ $329 < 1265$
 Veći je onaj broj koji ima _____ znamenaka.

Usporedi troznamenaste brojeve.

Najprije uspoređujemo znamenku stotica.	Ako brojevi imaju jednaku znamenku stotica, uspoređujemo	Ako brojevi imaju jednaku znamenku stotica i desetica, uspoređujemo																											
<table border="1"> <tr><th>S</th><th>D</th><th>J</th></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table> <p>$538 > 276$</p>	S	D	J	5	3	8	2	7	6	<table border="1"> <tr><th>S</th><th>D</th><th>J</th></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td><td>4</td></tr> </table> <p>$748 < 794$</p>	S	D	J	7	4	9	7	9	4	<table border="1"> <tr><th>S</th><th>D</th><th>J</th></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table> <p>$383 < 381$</p>	S	D	J	3	8	3	3	8	1
S	D	J																											
5	3	8																											
2	7	6																											
S	D	J																											
7	4	9																											
7	9	4																											
S	D	J																											
3	8	3																											
3	8	1																											

Usporedi četveroznamenaste brojeve.
 $7349 < 2984$ $5347 < 5175$ $2142 < 2168$ $7385 < 7387$

Iz ove analize vidljivo je da se u svim udžbenicima kod uspoređivanja brojeva na temelju jednog do dva primjera iznose zaključci. U udžbeniku *Moj sretni broj 3* učenici sami trebaju dovršiti zaključak na temelju primjera što svakako potiče induktivno zaključivanje i logičko razmišljanje. Ipak, induktivno se ne može zaključivati na temelju jednog primjera, pa bi udžbenici trebali prikazati nekoliko primjera prije nego iznesu zaključak. No, na satu Matematike u nižim razredima osnovne škole učitelji bi trebali biti ti koji će učenicima prikazati puno više primjera nego što je u udžbeniku ponuđeno te potaknuti učenike da sami donesu zaključak o uspoređivanju višeznamenastih brojeva, a tek nakon što učenici zaključče pravilo otvoriti udžbenik i potvrditi poklapa li se učenički zaključak s udžbenikom.

Matematika je deduktivna znanost, a dedukcija je najvažnija metoda zaključivanja u matematici. Iako se u kurikulumu ne spominje, u razrednoj nastavi dedukcija se stalno koristi, najčešće naizmjenice s indukcijom (induktivno-deduktivna metoda). U ovom diplomskom radu analizirano je primjenjuje li se induktivno-deduktivna metoda u udžbenicima kod usvajanja veze zbrajanja i oduzimanja u 1. razredu osnovne škole. Analizirani su udžbenici:

- Markovac, J., Lović Štenc, I. (2021). Matematika 1: radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.

- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 1: udžbenik matematike u 1. razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.

U svim analiziranim udžbenicima nastavna jedinica *Veza zbrajanja i oduzimanja* usvaja se induktivno-deduktivnim putem. Na primjer, u udžbeniku *Moj sretni broj 1* veza zbrajanja i oduzimanja prikazana je na primjeru s pikulama uz pomoć brojevnice, a zatim je prikazan zaključak što veza zbrajanja i oduzimanja zapravo jest. Zatim slijede zadaci gdje učenici rješavaju i primjenjuju usvojenu vezu zbrajanja i oduzimanja (slika 10).

Slika 10. Nastavna jedinica *Veza zbrajanja i oduzimanja* u udžbeniku *Moj sretni broj 1*

Slično je i u drugim analiziranim udžbenicima. Dakle, učenicima su prvo prikazani konkretni primjeri, a zatim se iznosi zaključak. No da bi učenici induktivno usvojili zaključak, učitelji bi trebali pokazati više primjera nego što je prikazano u samim udžbenicima, a zatim, na temelju induktivno usvojenog općeg iskaza (generalizacije), dedukcijom se mogu rješavati pojedinačni zadaci koji u udžbenicima slijede. Dakle, indukcija se primjenjuje prilikom usvajanja novih nastavnih sadržaja, a dedukcija se primjenjuje prilikom ponavljanja i uvježbavanja usvojenih novih sadržaja.

3.2. Analiza i sinteza u rješavanju problemskih zadataka

Analiza i sinteza misaone su operacije koje se međusobno nadopunjuju i čine analitičko-sintetičku metodu. Problemski zadatak potrebno je prvenstveno analizirati, odnosno raščlaniti na ono što je poznato i ono što je nepoznato te što se traži. Nakon analize zadatak se rješava dio po dio, a zatim se sintetizira u odgovor na pitanje zadatka. Zadaci riječima koji sadrže neki problem pojavljuju se već od 1. razreda osnovne škole, a analizom udžbenika provjereno je koriste li se i na koji način analiza i sinteza prilikom uvođenja zadataka riječima. Analizirani su udžbenici:

- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 1: udžbenik matematike u 1. razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
- Cindrić, M., Mišurac, I. (2021). *Matematička mreža 1: udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). *Otkrivamo matematiku 1: radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole*. Zagreb: Alfa.

U udžbeniku *Moj sretni broj 1* kod uvođenja zadataka riječima prvo je napisan tekstualni zadatak te se ispod njega nalazi tablica koja sadrži sljedeće: Što smo doznali u zadatku?, Što ne znamo?, Kako ćemo to saznati?, račun i odgovor. Zatim je prikazan sažetak te tablice (poznato, nepoznato, računsku radnju, račun i odgovor). Dakle, udžbenik koristi pet koraka kojima se prvo analizira što je u zadatku poznato, što je nepoznato te koju računsku radnju treba koristiti kako bismo došli do tog što ne znamo, zatim se rješava zadatak (račun) te se na kraju sintetizira, odnosno piše se odgovor. Ono što je u ovom udžbeniku zanimljivo je prikaz ovih pet koraka pomoću pet prstiju gdje svaki prst predstavlja jedan korak (slika 11). Učenici na ovaj način mogu lakše zapamtiti koji su im koraci potrebni prilikom rješavanja zadataka riječima.

Slika 11. Prikaz koraka za rješavanje zadataka riječima pomoću dlana u udžbeniku *Moj sretni broj 1*



Udžbenik *Otkrivamo matematiku 1* također prvo prikazuje zadatak pomoću slika i teksta, a zatim je prikazana tablica koju učenici trebaju dopuniti, a u tablicu je potrebno napisati: Što

nam je poznato?, Što se traži?, Kako do rješenja?, račun i odgovor. Za razliku od prethodno spomenutog udžbenika gdje je navedeno pet koraka, u ovom udžbeniku navedena su četiri koraka za rješavanje zadataka riječima (slika 13), a korak koji nije naveden je zapravo račun. Ipak, navedenim koracima zadatak se analizira, a zadnji korak je pisanje odgovora, odnosno sinteza zadatka.

Slika 12. Koraci rješavanja zadataka riječima u udžbeniku *Otkrivamo matematiku 1*

ZADATCI RIJEČIMA.

1. KORAK: PAŽLJIVO PROČITAJ ZADATAK.

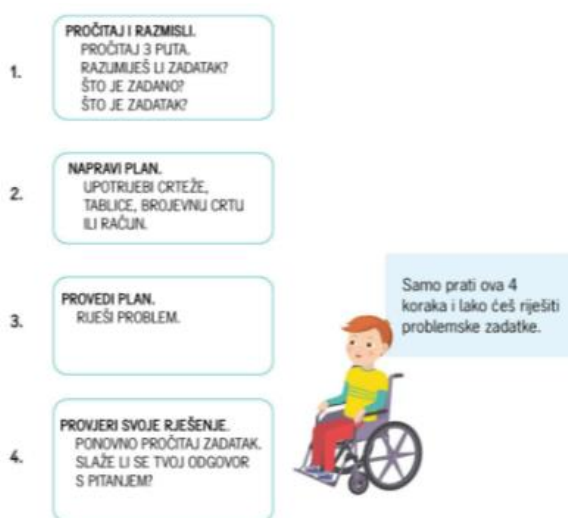
2. KORAK: ŠTO NAM JE POZNATO IZ ZADATKA?

3. KORAK: KAKO DOĆI DO RJEŠENJA? (ZBRAJANJEM? ODUZIMANJEM? USPOREĐIVANJEM?)

4. KORAK: JOŠ JEDNOM PAŽLJIVO PROČITAJ PITANJE. ODGOVORI.

U prethodna dva spomenuta udžbenika nastavna jedinica koja uvodi tekstualne zadatke naziva se *Zadaci riječima*, dok je u udžbeniku *Matematička mreža 1* naziv nastavne jedinice *Problemski zadaci*. U udžbeniku su prvo navedena četiri koraka za rješavanje problemskih zadataka (slika 13) koja se razlikuju od prethodnih, ali također zahtijevaju analizu zadatka, zatim rješenje zadatka i na kraju sintezu. Ono što je različito od koraka u prethodnim udžbenicima je što ovaj udžbenik od učenika zahtjeva izradu plana za rješavanje problemskih zadataka pomoću crteža, tablica, brojevine crte i/ili računa. U udžbeniku je prikazan primjer rješenja jednog zadatka pomoću ova četiri koraka (Slika 14).

Slika 13. Koraci rješavanja problemskih zadataka u udžbeniku *Matematička mreža 1*



Slika 14. Primjer rješavanja problemskog zadatka u udžbeniku Matematička mreža 1

▶ 1. U sportskoj se dvorani nalazi košara s 18 lopti. Nogometnih je lopti 12, a ostale su košarkaške. Koliko je košarkaških lopti?

NAPRAVI PLAN:
Nacrtat ću 18 lopti.
12 ću označiti kao nogometne.

Prebrojit ću ostale.
Napisat ću račun uz sliku.

PROVEDI PLAN:

○	○	○	○	○	○
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

$18 - 12 = 6$
Košarkaških je lopti 6.

Iako se koraci rješavanja zadataka riječima razlikuju u svakom od analiziranih udžbenika, svaki udžbenik od učenika traži da se zadatak analizira kako bi se saznalo što je u zadatku poznato, a što nepoznato. Zatim se zadatak rješava te se na kraju sintetizira, odnosno piše se odgovor. Dakle, u svim analiziranim udžbenicima vidljiva je analitičko-sintetička metoda kod rješavanja tekstualnih (problemskih) zadataka.

3.3. Zaključivanje po analogiji

U razrednoj nastavi matematike učenici često zaključuju po analogiji. Na temelju već usvojenih i poznatih svojstava i postupaka, učenici analogijom rješavaju nove zadatke. Kao primjer analogije izdvojeno je usvajanje množenja brojevima 10 i 100 u trećem razredu osnovne škole. Kada učenici usvoje množenje brojevima 10 i 100 po analogiji mogu zaključiti kako se množi brojem 1 000. Analizirajući udžbenike provjereno je koristi li se analogija prilikom usvajanja tih nastavnih sadržaja. Analizirani su udžbenici:

- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 3: radni udžbenik iz matematike za treći razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače 3: radni udžbenik za 3. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 3: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.

Udžbenik *Otkrivamo matematiku 3* kod nastavne jedinice *Množenje brojevima 10 i 100* od učenika prvo zahtijeva da ponove koji su to višekratnici broja 10, a koji broja 100 te se od učenika traži da zaključe što je zajedničko svim višekratnicima broja 10, a što višekratnicima broja 100. Zatim slijedi nekoliko riješenih primjera množenja brojem 10 te nekoliko zadataka koje učenici trebaju nadopuniti. Učenici induktivnim zaključivanjem i generaliziranjem mogu zaključiti kako se množi brojem 10, što ovaj udžbenik od učenika i traži. Slično se ponavlja i

kod množenja brojem 100. Zaključivanje po analogiji je vidljivo u 5. zadatku, gdje se učenicima postavlja pitanje: Ako znaš množiti s 10 i sa 100, znaš li množiti i s 1000? (slika 15). Upravo u tom primjeru zadatka ističe se analogija.

Slika 15. Zadatak zaključivanja po analogiji u udžbeniku *Otkrivamo matematiku 3*

5.	Ako znaš množiti s 10 i sa 100, znaš li množiti i s 1 000?	Broj množimo s 1000 tako da mu zdesna dopišemo tri
	$2 \cdot 1\,000 = 1\,000 + 1\,000 = 2\,000$	$5 \cdot 1\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$3 \cdot 1\,000 = 1\,000 + 1\,000 + 1\,000 = 3\,000$	$7 \cdot 1\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$4 \cdot 1\,000 = 4\,000$	$10 \cdot 1\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$
	$8 \cdot 1\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$	
	$9 \cdot 1\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$	

U udžbeniku *Super matematika za prave tragače 3* množenje brojevima 10 i 100 prikazano je prvo pomoću blokova, a zatim i pomoću tablice mjesnih vrijednosti. Riješeno je nekoliko primjera množenja brojem 10 i 100 te je na kraju iznesen zaključak da se broj množi s 10 tako da mu s desna pripišemo jednu nulu te da se broj množi s 100 tako da mu s desna pripišemo dvije nule. I ovdje učenici induktivnim zaključivanjem i generaliziranjem mogu doći do spoznaja kako množiti brojevima 10 i 100. Analogija se može primijetiti u 4. zadatku gdje se učenici, kao i u prethodno analiziranom udžbeniku, potiču na zaključivanje po analogiji, odnosno da pravila za množenje brojevima 10 i 100 analogno primijene pri množenju brojem 1000.

Slika 16. Analogija u zadatku u udžbeniku *Super matematika za prave tragače 3*.

4. Pravilo o množenju brojevima 10 i 100 primijeni u množenju brojem 1 000 i reci koliko je:

$3 \cdot 1\,000 =$	$1\,000 \cdot 5 =$	$1\,000 \cdot 8 =$	$6 \cdot 1\,000 =$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

U udžbeniku *Moj sretni broj 3*, prilikom usvajanja množenja brojevima 10 i 100 prvo se ponavljaju višekratnici broja 10 te se pokazuje nekoliko primjera množenja brojem 10 na kvadratnoj mreži, a zatim se iznosi pravilo množenja brojem 10. Isto se ponavlja kod množenja brojem 100. Dakle učenici induktivnim putem, na temelju nekoliko primjera, mogu zaključiti kako se množi brojevima 10 i 100, no u ovom udžbeniku kod ove nastavne jedinice nema zadataka koji učenike potiče na zaključivanje po analogiji.

3.4. Generalizacija i specijalizacija u udžbenicima


Iako su generalizacija i specijalizacija metode formiranja pojmova, povezane su s metodama logičkog zaključivanja te spadaju u aspekte logičkog mišljenja. Generalizacija je usko povezana s analogijom i indukcijom jer se od nekog polaznog pojma prelazi na razmatranje općenitijeg pojma. Kao primjer generalizacije može se izdvojiti postupno učenje zbrajanja, najprije na skupu brojeva do 10, pa 20, pa 100 itd. Kod tog prijelaza, ono što se naučilo na manjem skupu poopćuje se, odnosno generalizira na većem skupu. Analizirani su udžbenici kako bi se vidjelo koristi li se generalizacija u 4. razredu osnovne škole pri prijelazu sa pisanog zbrajanja troznamenkastih brojeva na pisano zbrajanje četveroznamenkastih brojeva. Analizirani su sljedeći udžbenici:

- Markovac, J. (2021). Matematika 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J. (2021). Super matematika za prave tragače 4: radni udžbenik za 4. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.

U udžbeniku *Matematika 4* zbrajanje četveroznamenkastih brojeva uvodi se pod nastavnom jedinicom *Pisano zbrajanje brojeva do milijun*. Prvi dio te nastavne jedinice je pisano zbrajanje troznamenkastih brojeva, a prvi zadatak u toj nastavnoj jedinici kreće od ponavljanja zbrajanja jednoznamenkastih brojeva. Zatim se pisano zbrajaju troznamenkasti brojevi te je navedeno pravilo da se najprije zbrajaju brojevi jedinica, pa brojevi desetica, a zatim brojevi stotica. Nakon pisanog zbrajanja troznamenkastih brojeva slijedi pisano zbrajanje četveroznamenkastih brojeva. Od učenika se prvo traži da napišu najmanji i najveći četveroznamenkasti broj, zatim da se odrede mjesne vrijednosti znamenaka u četveroznamenkastom broju. U trećem zadatku vidljivo je da se ono što se naučilo kod zbrajanja troznamenkastih brojeva poopćuje na većem skupu četveroznamenkastih brojeva (slika 17).

Slika 17. *Primjer generalizacije u udžbeniku Matematika 4.*

3. Ako znaš zbrajati troznamenkaste brojeve, brzo ćeš i lako naučiti zbrajati četveroznamenkaste brojeve. Provjeri to na ovom zadatku. Ivo je biciklom prešao **4 326** metara, a Željko **3 543** metra. Koliko su ukupno metara prešli svojim biciklima?



T	S	D	J
4	3	2	6
+ 3	5	4	3

Zbrajamo brojeve
 jedinica (**6 + 3**),
 brojeve desetica (**2 + 4**),
 brojeve stotica (**3 + 5**),
 brojeve tisućica (**4 + 3**).

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 2\ 6 \\ + 3\ 5\ 4\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Biciklima su prešli _____ metara.

Udžbenik *Super matematika za prave tragače 4* pisano zbrajanje četveroznamenkastih brojeva također uvodi generalizacijom, no u ovom udžbeniku prije samog pisanog zbrajanja četveroznamenkastih brojeva nema zadataka gdje se ponavlja pisano zbrajanje troznamenkastih brojeva kako bi se učenici mogli prisjetiti pravila. U ovom udžbeniku navedeno je da se četveroznamenkasti brojevi zbrajaju na isti način kao troznamenkasti brojevi te je pokazan primjer zbrajanja četveroznamenkastih brojeva u tablici mjesnih vrijednosti te primjer pisanog zbrajanja.

Slika 18. *Generalizacija kod zbrajanja četveroznamenkastih brojeva u udžbeniku Super matematika za prave tragače 4.*

Četveroznamenkaste brojeve pisano zbrajamo na jednak način kao i troznamenkaste brojeve.

1. način - tablica mjesnih vrijednosti

T	S	D	J
1	3	0	2
+ 2	4	4	1
	3	7	4

2. način - pisani

$$\begin{array}{r} 1302 \\ + 2441 \\ \hline 3743 \end{array}$$

Govorimo i pišemo:
 2 plus 1 je 3 (zapisujemo 3).
 0 plus 4 je 4 (zapisujemo 4).
 3 plus 4 je 7 (zapisujemo 7).
 1 plus 2 je 3 (zapisujemo 3).

Pribrojnik pišemo jedan ispod drugoga. Znamenke istih dekadskih jedinica moraju biti u istome stupcu. Znak računске operacije (+) pišemo ispred zadnjega pribrojnika. Zbrajanje počinjemo od jedinica (J).

U udžbeniku *Otkrivamo matematiku 4* kod nastavne jedinice *Zbrajanje četveroznamenkastih brojeva* u prvom zadatku se od učenika traži da se prisjete pisanog zbrajanja troznamenkastih brojeva, a zatim je prikazan primjer zbrajanja četveroznamenkastih brojeva u tablici mjesnih vrijednosti i primjer pisanog zbrajanja te je dana uputa gdje piše da se četveroznamenkasti brojevi zbrajaju istim postupkom kao i troznamenkasti brojevi. Upravo je tu vidljiva generalizacija.

Slika 19. Generalizacija kod zbrajanja četveroznamenkastih brojeva u udžbeniku

ZBRAJANJE ČETVEROZNAMENKASTIH BROJEVA

1. Prisjeti se pisanog zbrajanja. Izračunaj.

2 3 4	2 3 4	2 3 4
+ 2 3 4	+ 2 3 6	+ 2 8 6



Izračunaj zadatke. Reci, na što trebaš paziti pri pisanom zbrajanju?

Po čemu se razlikuju ova tri zadatka? _____

2. U tablici se nalaze podatci o broju stanovnika na nekim našim otocima.

otok	br. stanovnika
Vis	3 617
Cres	3 184
Pašman	2 711
Dugi otok	1 722
Šolta	1 479
Mljet	1 111

Koliko stanovnika zajedno imaju Vis i Mljet? Dopuni.

T	S	D	J	3 6 1 7
3	6	1	7	+ 1 1 1 1
+	1	1	1	3 6 1 7
3	7	2	8	+ 1 1 1 1

Četveroznamenkaste brojeve zbrajamo istim postupkom kao i troznamenkaste.

Vis i Mljet zajedno imaju _____ stanovnika.

Dakle, vidljivo je da se generalizacija koristi na ovom primjeru u svim analiziranim udžbenicima. S obzirom da se zbrajanje troznamenkastih brojeva uči u trećem razredu osnovne škole, prije samog usvajanja zbrajanja četveroznamenkastih brojeva u četvrtom razredu potrebno je ponoviti zbrajanje na manjem skupu, odnosno u skupu troznamenkastih brojeva, da bi se svojstvo tog manjeg skupa moglo poopćiti i prenijeti na veći skup što je u ovom slučaju skup četveroznamenkastih brojeva.

Metoda suprotna generalizaciji je specijalizacija gdje se od nekog šireg pojma dolazi do užeg pojma. Kao primjer specijalizacije izdvojen je primjer usvajanja pojmova raznostraničan trokut, jednakostraničan trokut i jednakokračan trokut. Učenici bi najprije trebali usvojiti pojam trokuta, a zatim bi se specijalizacijom trebali usvojiti spomenuti užji pojmovi. Analizirani su udžbenici:

- Cindrić, M., Mišurac, I., Dragičević, A., Pastuović, B. (2021). Matematička mreža 4: udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.

- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- A Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J. (2021). Super matematika za prave tragače 4: radni udžbenik za 4. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.

U udžbeniku *Matematička mreža 4* na početku nastavne jedinice *Vrste trokuta* prikazano je nekoliko trokuta te se od učenika traži da promotre kakve su stranice tih trokuta. Zatim se definiraju raznostraničan, jednakostraničan i jednakokračan trokut specijalizacijom preko šireg pojma trokuta.

U udžbeniku *Otkrivamo matematiku 4* pojmovi raznostraničan, jednakostraničan i jednakokračan trokut uvode se u odvojenim nastavnim jedinicama. Kod uvođenja jednakostraničnog trokuta na početku nastavne jedinice prikazano je nekoliko trokuta te se od učenika traži da pronađu trokut koji ima sve tri stranice jednakih duljina, a zatim je iznesena definicija jednakostraničnog trokuta. Kod uvođenja jednakokračnog trokuta prikazano je nekoliko trokuta, a učenici trebaju uočiti što im je zajedničko. Zatim je prikazan jednakokračni trokut te se od učenika traži da izmjere duljine njegovih stranica, a uz prikazani trokut napisana je i definicija jednakokračnog trokuta. Na sličan način se uvodi i jednakokračni trokut gdje se od učenika prvo traži da spoje točke kako bi dobili trokute te da dobivene trokute opišu s obzirom na duljine njihovih stranica. Zatim se definira pojam raznostraničnog trokuta. Sve definicije napisane su specijalizacijom pojma trokut.

U udžbeniku *Super matematika za prave tragače 4* nakon nastavne jedinice *Trokut* slijedi nastavna jedinica *Vrste trokuta* gdje je prikazana ilustracija, a od učenika se traži da navedu koji geometrijski lik uočavaju na ilustraciji te po čemu se uočeni trokuti razlikuju. Zatim se navodi da se trokuti prema duljinama stranica dijele na raznostranične, jednakostranične i jednakokračne te su prikazani primjeri svake od tih vrsta trokuta.

U svim analiziranim udžbenicima pojmovi raznostraničan trokut, jednakostraničan trokut i jednakokračan trokut uvode se specijalizacijom preko ranije usvojenog šireg pojma trokuta.

3.5. Konkretizacija i apstrakcija u udžbenicima

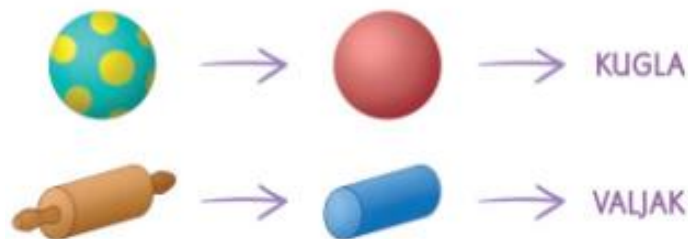
Konkretizacija i apstrakcija su također metode formiranja pojmova, no ove su metode jako važne u početnoj nastavi matematike i često se koriste. Apstrakcija polazi od konkretnih primjera, a zatim se odbacuju sva nebitna svojstva promatranih objekata kako bi se došlo do apstraktnih pojmova i zaključaka. Suprotnost apstrakciji je konkretizacija gdje se polazi od

nekog apstraktnog pojma koji se zatim konkretizira. Kao primjer apstrakcije i konkretizacije može se izdvojiti usvajanje pojma geometrijskih tijela. Apstrakcijom se dakle polazi od predmeta iz svakodnevnice koji imaju oblik nekog geometrijskog tijela (npr. kocka). S druge strane, konkretizacijom se polazi od apstraktnog pojma nekog geometrijskog tijela (npr. kocke) te se zatim nabrajaju stvarni predmeti koji su tog oblika (npr. kocka leda, poklon...). Analizirani su udžbenici kako bi se vidjelo koriste li se konkretizacija i apstrakcija kod usvajanja pojma kugle i pojma valjka. Analizirani su sljedeći udžbenici:

- Cindrić, M., Mišurac, I. (2021). Matematička mreža 1: udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Markovac, J., Lović Štenc, I. (2021). Matematika 1: radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.

U udžbeniku *Super matematika za prave tragače 1* pojmovi kugle i valjka usvajaju se zajedno. Oba pojma usvajaju se apstrakcijom što je vidljivo na slici 20. Dakle prvo je prikazan stvarni predmet, zatim geometrijsko tijelo te na kraju naziv tog geometrijskog tijela. U 3. i 4. zadatku u ovoj nastavnoj jedinici vidljiva je konkretizacija gdje se od učenika traže da zaokruže stvarne predmete koje su oblika kugle ili valjka (slika 21.).

Slika 2011. Apstrakcija kod usvajanja pojma kugle i valjka



Slika 21. Konkretizacija u zadacima kod usvajanja pojma kugle i valjka



U udžbeniku *Matematika 1* pojmovi kugle i valjka također se usvajaju apstrakcijom (slika 22), no u ovom udžbeniku prikazano je nekoliko konkretnih predmeta za razliku od prethodnog udžbenika gdje je prikazan samo jedan konkretni predmet. U 2. i 3. zadatku je zatim vidljiva konkretizacija gdje se slično kao i u prethodnom udžbeniku trebaju zaokružiti konkretni predmeti koji imaju oblik kugle ili valjka (slika 23).

Slika 22. Usvajanje pojmova kugle i valjka apstrakcijom.



Slika 23. Konkretizacija u zadacima



Za razliku od dva prethodno analizirana udžbenika, u udžbeniku *Matematička mreža 1* pojmovi kugle i valjka usvajaju se odvojeno te se ne polazi se od apstrakcije, već je prvo

prikazano nekoliko kugli i valjaka, a zatim su prikazani stvarni predmeti koji su oblika kugle i valjka. Dakle pojmovi kugle i valjka u ovom udžbeniku usvajaju se konkretizacijom pa je tako prvo prikazan apstraktni objekt a zatim su prikazani konkretni objekti.

Slika 24. Usvajanje pojma kugle konkretizacijom.



Slika 25. Usvajanje pojma valjka konkretizacijom.



Zaključak

Nastava matematike razvija logičko i apstraktno mišljenje te učenike osposobljava da razvijeno mišljenje primjenjuju u svakodnevnom životu. Logičko mišljenje koje Matematika razvija može učenicima pomoći u smislenom pristupu rješavanju mnogih drugih problema kasnije u životu. Provedena analiza udžbenika usmjerena je na propitkivanje zastupljenosti aspekata logičkog mišljenja koji se spominju u Kurikulumu, u matematičkom procesu *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* u udžbenicima od 1. do 4. razreda osnovne škole. S obzirom da se u Kurikulumu za nastavni predmet Matematika za niže razrede osnovne škole navedene metode gotovo i ne spominju eksplicitno, analizom je provjereno na koji način udžbenici koriste spomenute metode razvijanja logičkog mišljenja i uvođenja pojmova. Analizom je utvrđeno da se sve navedene metode koriste u udžbenicima, no ne na iste načine i ne u istoj mjeri.

Kod primjera induktivnog zaključivanja može se zaključiti da u udžbenicima nije ponuđeno dovoljno primjera kako bi učenici mogli zaključiti nepotpunom indukcijom. Također, indukcija se primjenjuje najčešće kod usvajanja novog nastavnog sadržaja, dok se dedukcija redovito primjenjuje kod uvježbavanja i ponavljanja već usvojenog nastavnog sadržaja. Analizom je također utvrđeno da se u svim analiziranim udžbenicima kod uvođenja problemskih zadataka koristi analitičko-sintetička metoda, a ono po čemu se udžbenici međusobno razlikuju su koraci rješavanja problemskih zadataka. Kod analiziranog primjera zaključivanja po analogiji, analogija se ne koristi u svim udžbenicima, a u onima u kojima se koristi, premalo je zadataka koji traže zaključivanje po analogiji. Iz analize se može vidjeti da su generalizacija i specijalizacija te apstrakcija i konkretizacija metode koje se u udžbenicima najviše koriste za usvajanje novih pojmova.

Iako udžbenici imaju različite pristupe usvajanju novih pojmova, važno je da se navedene metode svakodnevno koriste u nastavi kako bi se učenike poticalo na logičko mišljenje i zaključivanje. Stoga bi učitelji trebali biti ti koji će učenike poticati na samostalno donošenje zaključaka te im prikazivati više primjera nego što je ponuđeno u samim udžbenicima. Udžbenici bi trebali služiti učiteljima kao smjernica i pomoć pri pripremi i izvođenju nastave.

Izjava o izvornosti diplomskog rada

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istog nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

(vlastoručni potpis studenta)

Literatura

- Cindrić, M., Mišurac, I. (2021). Matematička mreža 3: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
- Cindrić, M., Mišurac, I., Dragičević, A., Pastuović, B. (2021). Matematička mreža 4: udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga
- Delija Colić, I. (2019). Teorija intelektualnog razvoja Jeana Piageta: Suvremene pedagoške implikacije. Diplomski rad, Sveučilište u Zadru. Preuzeto 13.5.2022.:
<https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:162:973131>.
- Glasnović Gracin, D. (2007). Matematička pismenost 2. dio. *Matematika i škola*, VIII (40), 202-210.
- Glasnović Gracin, D., Domović, V. (2009.), Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole. *Odgojne znanosti*, 11 (2), 45-65.
- Glasnović Gracin, D. (2014.), Matematički udžbenik kao predmet istraživanja. *Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, 16 (3), 211-237.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 3: radni udžbenik iz matematike za treći razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). Otkrivamo matematiku 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 1: udžbenik matematike u 1. razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). Moj sretni broj 3: udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
- Kurnik, Z. (2008). Znanstvenost u nastavi matematike. *Metodika*, 9 (17), 318-327.
- Kurnik, Z. (2009). Znanstveni okviri nastave matematike. Zagreb: Element.
- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače: radni udžbenik za 1. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2021). Super matematika za prave tragače 3: radni udžbenik za 3. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J. (2021). Super matematika za prave tragače 4: radni udžbenik za 4. razred osnovne škole. Zagreb: Profil Klett.
- Markovac, J., Lović Štenc, I. (2021). Matematika 1: radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.

Markovac, J. (2021). Matematika 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole. Zagreb: Alfa.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO] (2022). Nacionalni kurikulum. Posjećeno 20.4.2022.: <https://mzo.gov.hr/istaknute-teme/odgoj-i-obrazovanje/nacionalni-kurikulum/125>.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO] (2019). Kurikulum za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. *Narodne novine* 7/19.

OECD (2005). The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary, OECD, Paris. Preuzeto 19.4.2022.: <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>

Ovčar, S. (1990). Razvijanje mišljenja u nastavi matematike. Čakovec: TIZ Zrinski.

Pavleković, M. (2009). Matematika i nadareni učenici. Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika. Zagreb: Element.

Petrović, G. (1964). Logika: udžbenik za III razred gimnazije. Zagreb: Školska knjiga.

Piaget, J., Inhelder, B. (1982). Intelektualni razvoj deteta. Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika i nastavna sredstva.

PISA (2021). Konceptualni okvir matematičke pismenosti (radna verzija, studeni 2018). Zagreb: Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Pristupljeno 24.4.2022.: https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2021/04/PISA-2021-konceptualni-okvir_matematika.pdf