Metodički pristupi množenju višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem

Topić, Anđela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

UČITELJSKI FAKULTET

ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

ANĐELA TOPIĆ

METODIČKI PRISTUPI MNOŽENJU VIŠEZNAMENKASTIH BROJEVA DVOZNAMENKASTIM BROJEM

DIPLOMSKI RAD

Petrinja, rujan 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

ANĐELA TOPIĆ

METODIČKI PRISTUPI MNOŽENJU VIŠEZNAMENKASTIH BROJEVA DVOZNAMENKASTIM BROJEM

DIPLOMSKI RAD

Mentor rada: doc. dr. sc. Goran Trupčević

Petrinja, rujan 2023.

SAŽETAK

Matematika kao i ostali nastavni predmeti nastoji uvesti promjene u pristup učenju matematičkih sadržaja, a kako ljudi nisu skloni mijenjanju navika, pojavljuju se krive pretpostavke. Kako bi učenici mogli riješiti određeni matematički problem, potrebne su im upute, pravila ili algoritmi. Posebno je važno naglasiti da korištenje algoritama ne smije biti svedeno na učenje pravila napamet bez razumijevanja jer tako učenici ne znaju objasniti zašto rabe određeni postupak u rješavanju problema. Sve se više govori o učenju s osjećajem za brojeve koje se nastoji maksimalno primijeniti u nastavi matematike. Učenje s osjećajem za brojeve ne potiče učenike na izbjegavanje algoritama, koji su iznimno važni za matematiku, no potiče učenike da ih istražuju i koriste s razumijevanjem te da, ako mogu, osmisle i neke vlastite strategije. Kao i za svaki matematički sadržaj, poželjno je da učitelj poznaje načela početne nastave matematike te da uz njihovu pomoć prilagodi sadržaje učenicima kako bi ih oni što uspješnije svladali. Nakon što su učenici savladali osnovno množenje, prelazi se na množenje višeznamenkastih brojeva. Postoje različite metode i pristupi množenju višeznamenkastih brojeva. Ovaj diplomski rad donosi prikaz pojmova potrebnih za razumijevanje metodičkog pristupa množenju te raznolike primjere u kojima se prikazuju pristupi množenju višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem iz hrvatskih, ali i stranih matematičkih udžbenika i priručnika.

Ključne riječi: množenje, algoritmi, učenje s razumijevanjem, metodički pristupi množenju višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem

SUMMARY

Mathematics, like other subjects, tries to introduce changes in the approach to learning mathematical content, and since people are not inclined to change their habits, wrong assumptions appear. In order for students to be able to solve a certain mathematical problem, they need instructions, rules or algorithms. It is especially important to emphasize that the use of algorithms should not be reduced to learning the rules by heart without understanding, because in this way students do not know how to explain why they use a certain procedure in solving problems. There is more and more talk about learning with a sense of numbers, which is tried to be maximally applied in mathematics lessons. Learning with number sense does not encourage students to avoid algorithms, which are extremely important to mathematics, but it does encourage students to explore and use them with understanding, and to devise some strategies of their own if they can. As with any mathematical content, it is desirable that the teacher knows the principles of elementary mathematics teaching and with their help adapts the contents to the students so that they can master them as successfully as possible. After students have mastered basic multiplication, they move on to multiplying multi-digit numbers. There are different methods and approaches to multiplying multi-digit numbers. This diploma thesis presents the concepts necessary for understanding the methodical approach to multiplication and various examples in which approaches to multiplying multi-digit numbers by two-digit numbers from Croatian and foreign mathematics textbooks and manuals are presented.

Keywords: multiplication, algorithms, learning with understanding, methodical approaches to multiplying multi-digit numbers by a two-digit number

SADRŽAJ

1. UVOD 1

2. POČETNO MATEMATIČKO OBRAZOVANJE 2

2.1. Ciljevi nastave matematike 2

2.2. Načela metodike početne nastave matematike 5

2.2.1. Načelo primjerenosti 6

2.2.2. Načelo zornosti 6

2.2.3. Načelo vlastite aktivnosti 8

2.2.4. Načelo individualizacije 9

2.2.5. Načelo postupnosti 9

2.2.6. Načelo objektivne realnosti 10

3. MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI 10

3.1. Kurikulum – pregled hrvatskog, singapurskog, japanskog i engleskog kurikuluma 10

3.1.1. Množenje u kurikulumu Hrvatske 10

3.1.2. Množenje u kurikulumu Japana 12

3.1.3. Množenje u kurikulumu Singapura 12

3.1.4. Množenje u kurikulumu Engleske 14

3.1.5. Zaključak – množenje u hrvatskom, japanskom, singapurskom i engleskom kurikulumu . 16

3.2. Modeli množenja 16

3.2.1 Model uzastopnog zbrajanja jednakih pribrojnika 17

3.2.2. Model površine pravokutnika 18

3.2.3. Kombinatorni model 19

3.2.4. Model skaliranja 20

3.3. Svojstva množenja 21

4. UČENJE MATEMATIČKIH PRAVILA 22

4.1. Strategije računanja 24

4.2. Algoritmi i osjećaj za brojeve 26

5. METODIČKI PRISTUPI MNOŽENJU VIŠEZNAMENKASTIH BROJEVA DVOZNAMENKASTIM BROJEM U MATEMATIČKIM UDŽBENICIMA I PRIRUČNICIMA 27

5.1. Pristup u hrvatskim udžbenicima 28

5.2. Pristup u singapurskim udžbenicima 34

5.3. Pristup u japanskim udžbenicima 38

5.4. Pristup u engleskim udžbenicima 44

5.5. Zaključak istraživanja 58

ZAKLJUČAK 61

LITERATURA 62
IZJAVA O IZVORNOSTI DIPLOMSKOG RADA 64

1. UVOD

U ranim se fazama razvoja množenje najčešće definira kao ponovljeno dodavanje, a može se objasniti uz pomoć grupe u kojoj svaki član grupe sadrži isti broj elemenata, a zanima nas koliko ukupno elemenata sadrži grupa ako je poznato od koliko članova se grupa sastoji. Naprimjer, pogodno je zamisliti vreće jabuka od kojih svaka sadrži šest jabuka, a rješenje koje se traži ukupan je broj jabuka ako se u trgovini uzmu tri takve vreće ($3 \cdot 6$). Zaključit će se kako je u trima vrećama ukupno 18 jabuka. U računskoj operaciji množenja, prvi se broj naziva prvi faktor i označava broj kojim množimo drugi broj, a drugi se broj naziva drugi faktor i označava broj kojeg množimo prvim brojem. U primjeru $3 \cdot 6$, broj 3 je prvi faktor, a broj 6 drugi faktor (Rickard, 2013).

Algoritmi se mogu definirati kao postupci koji detaljno objašnjavaju kako zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti. Algoritmima se ističe korisna značajka matematike: struktura problema izdvaja se iz konteksta te se provodi usporedba kako bi se otkrilo mogu li se naizgled različiti problemi riješiti na slične načine stoga su algoritmi koristan alat jer zahvaljujući njima nema potrebe za tim da se za svaki problem pronađe različit postupak rješavanja. Za svaki se algoritam mogu navesti prednosti i nedostaci, stoga je važno razmotriti koji se algoritmi uče i zašto se uče. Za razvoj numeričkih vještina, ključno je učenje korištenja algoritama za računanje s višeznamenkastim brojevima (Kilpatrick, Swafford i Findell, 2001).

Neki od osnovnih matematičkih algoritama, koje usvajaju učenici četvrtoga razreda osnovne škole, vezani su uz množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem. Cilj je ovoga diplomskog rada analizirati hrvatske i strane kurikulume te udžbenike i metodičke priručnike kako bi se istražili metodički pristupi množenju brojeva dvoznamenkastim brojem.

Drugo poglavlje rada bavi se položajem nastavnog predmeta *Matematika*, ciljevima Matematike prema kurikulumima Hrvatske, Japana, Singapura i Engleske te načelima metodike početne nastave matematike. U trećemu se poglavlju proučava množenje u navedenim kurikulumima te modeli množenja. U četvrtome poglavlju riječ je o učenju matematičkih pravila, važnosti njihova razumijevanja te o sve većoj primjeni učenja s osjećajem za brojeve. Peto poglavlje nudi pregled hrvatskog, singapurskog i engleskog udžbenika te japanskog priručnika te se na kraju navode zaključci analize navedenih izvora.

2. POČETNO MATEMATIČKO OBRAZOVANJE

Prema *Odluci o donošenju nastavnog plana za osnovnu školu*, nastavni predmet Matematika ima značajan položaj u školstvu i obrazovanju, a to potvrđuje broj nastavnih sati koji upućuje na to da je nastava matematike važna koliko i nastava materinskoga jezika (Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MOZ], 2019a). Početno se matematičko obrazovanje opisuje najčešće uz pomoć triju pojmova koji imaju zajedničke, ali i različite elemente. Ti su pojmovi *matematika*, *nastava matematike* i *metodika matematike* (Markovac, 1990). „Matematika je znanstveno razvijen logički sustav koji proučava idealne objekte i pojmove nastale apstrakcijom brojenja i mjerenja te povezuje varijable (npr. promjenjive veličine), apstraktne strukture (npr. brojeve, skupove, vektore) i prostorne (npr. euklidski, vektorski, metrički, normirani).“ (Leksikografski zavod Miroslav Krleža [LZMK], 2021). Matematika je nastavni predmet u kojemu se uz pomoć matematičkih sadržaja ostvaruju odgoj i obrazovanje. Znanstvena disciplina koja proučava odgoj i obrazovanje u nastavi matematike na svim stupnjevima školovanja naziva se *Metodika nastave matematike*. Može se zaključiti da sva tri termina (*matematika, nastava matematike* i *metodika nastave matematike*) određuju i oblikuju matematički sadržaj i načine prenošenja sadržaja kojima se ostvaruje matematički odgoj i obrazovanje, i to na svim razinama školovanja (Markovac, 1990).

2.1. Ciljevi nastave matematike

Kilpatrick i suradnici (2001) odabiru pojam *matematička vičnost* kako bi objasnili što za svakoga znači „uspješno naučiti matematiku“, pritom ističući da nijedan pojam ne može u cijelosti obuhvatiti aspekte stručnosti, kompetencije, znanja i mogućnosti u matematici. Matematička vičnost može se podijeliti na pet područja: konceptualno razumijevanje (razumijevanje matematičkih koncepata, operacija i odnosa), proceduralna tečnost (vještina fleksibilnog, točnog, učinkovitog i primjerenog provođenja postupaka), strateška kompetencija (sposobnost formuliranja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema), adaptivno zaključivanje (sposobnost logičnog mišljenja, rasuđivanja, objašnjavanja i opravdanja) i produktivna dispozicija (sklonost da se matematiku promatra kao razumnu, korisnu i vrijednu, uz vjeru u vlastitu sposobnost i učinkovitost). Svi navedeni dijelovi međusobno se isprepliću i ovise jedan o drugome. Polazišta za poučavanje i učenje školske matematike trebali bi biti ujednačeni razvoj i međusobno ispreplitanje svih pet grana matematičke vičnosti. Naravno, važni su i učitelji i njihovo usavršavanje koje je ključno za uspješno podučavanje učenika i razvijanje njihove matematičke vičnosti. Kako bi se ti ciljevi ostvarili, neophodni su integrirani i koordinirani napori svih dijelova obrazovne zajednice. Koordinacija kurikuluma, nastavnih materijala, ocjenjivanja, podučavanja, profesionalnoga razvoja i organizacije škole, koja je usmjerena ka razvijanju matematičke vičnosti, trebala bi pridonijeti razvoju škole (Kilpatrick i suradnici, 2001).

U nastavku donosimo pregled ciljeva Matematike prema kurikulumima Hrvatske, Japana, Singapura i Engleske.

Hrvatski kurikulum za nastavni predmet Matematika podijeljen je u pet domena: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost. Svaka se od domena sastoji od odgojno-obrazovnih ishoda koji se nastoje ostvariti kroz matematičke procese prikazivanja i komunikacije, povezivanja, logičkoga mišljenja, argumentiranja i zaključivanja, rješavanja problema i matematičkog modeliranja te primjene tehnologije (MOZ, 2019b).

Prema MOZ (2019b) kao glavni ciljevi nastave matematike, koji se stječu povezivanjem matematičkih procesa i domena, mogu se izdvojiti:

- osposobljavanje učenika za korištenje matematičkih kompetencija u matematičkome kontekstu i u stvarnom životu

- osposobljavanje učenika za korištenje logičkoga, kreativnog i kritičkog mišljenja

- osposobljavanje učenika za rješavanje problemskih situacija korištenjem matematičkoga znanja

- stjecanje temeljnih matematičkih znanja i vještina i razvoj svijesti o njima

- razvoj svijesti o povijesnoj, kulturnoj i estetskoj vrijednosti matematike te njezinoj ulozi u društvu.

Nadalje, japanski je kurikulum za nastavni premet Matematika podijeljen u četiri domene: Brojevi i izračuni, Količine i mjerenja, Geometrijski likovi i Matematički odnosi (Center for Research on International Cooperation in Educational Development [CRICED], 2012).

Prema japanskome kurikulumu ciljevi matematičkog obrazovanja su:

- stjecanje osnovnih i temeljnih matematičkih znanja i vještina

- osposobljavanje učenika za korištenje kritičkoga, kreativnog i logičkog mišljenja

- razvoj svijesti o važnosti matematičkih aktivnosti, matematičkih pristupa, odnosno važnosti korištenja matematike u svakodnevnome životu (CRICED, 2012).

Matematički singapurski kurikulum organiziran je u tri cjeline (*Brojevi i algebra, Mjerenje i geometrija te Statistika*), a sve tri cjeline presijecaju *matematički procesi*. Pojam *matematički procesi* se odnosi na vještine (rasuđivanje, komunikacija i veze, primjena te vještine mišljenja i heuristike) koje su uključene u proces stjecanja i primijene matematičkog znanja. U singapurskome kurikulumu spominje se pojam *matematički okvir* za kojega se navodi da je značajan za matematički kurikulum još od 1990. godine. Težište se stavlja na rješavanje problema pomoću matematike, a okvir se sastoji od konceptualnoga razumijevanja, vještina i kompetentnosti, matematičkih procesa, stavova te metakognicije (Ministry of Education [MOE], 2013).

Prema MOE (2013), singapurski kurikulum za nastavu matematike navodi da su glavni ciljevi matematičkog obrazovanja:

- osposobljavanje učenika za razumijevanje i korištenje matematičkih vještina i znanja

- razvoj kognitivnih i metakognitivnih vještina kroz matematički pristup rješavanju problema

- razvoj pozitivnog stava prema matematici.

Programi učenja matematike u Engleskoj donose se iz godine u godinu, i to za ključne stadije 1 i 2, ali škole imaju određenu fleksibilnost pa sadržaje mogu uvesti ranije ili kasnije od onoga što je predviđeno. Također, svaka je škola dužna izraditi školski kurikulum za matematiku za svaku školsku godinu te omogućiti njegovu javnu dostupnost (Department for Education [DFE], 2013).

Engleski kurikulum za matematiku među glavne ciljeve kurikuluma ubraja:

- osiguravanje razumijevanja temeljnih matematičkih znanja

- osposobljavanje učenika za lako prisjećanje i primjenjivanje stečenoga matematičkog znanja

-osposobljavanje učenika za matematičko zaključivanje, odnosno za korištenje matematike kod razvijanja argumenata, opravdanja ili dokaza

- osposobljavanje učenika za rješavanje problema uz pomoć matematike, uključujući rastavljanje problema na jednostavnije korake (DFE, 2013).

Može se konstatirati da *naučiti matematiku* znači ovladati područjima matematičke vičnosti uz podršku cijele obrazovne zajednice, a posebice učitelja. Ako se usporede navedeni ciljevi matematike iz različitih matematičkih kurikuluma, zaključuje se da su glavni ciljevi: razvoj svijesti o važnosti matematike, stjecanje matematičkih znanja i vještina te osposobljavanje učenika za korištenje matematike u svakodnevnim životnim situacijama kod rješavanja različitih problema.

2.2. Načela metodike početne nastave matematike

U početnoj nastavni matematike postoje subjektivni i objektivni uvjeti učenja koji se uređuju uz pomoć temeljnih ideja, odnosno metodičkih načela. Uz pomoć metodičkih načela uspostavlja se, procjenjuje i vrednuje sveukupni odgojno-obrazovni proces u nastavi. Metodička načela rezultat su proučavanja uspješne nastavne prakse, zakonitosti procesa učenja, stupnja psihičkog razvoja učenika te prirode nastavnih matematičkih sadržaja. Najjednostavnije rečeno, metodička su načela upute kojih se treba pridržavati svatko tko je zadužen za organizaciju i provođenje početne nastave matematike jer se uz njihovu pomoć matematičko odgajanje i obrazovanje odvija najefikasnije (Markovac, 1990).

Iako *Metodika nastave matematike* u matematička načela ubraja načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo aktivnosti, načelo postupnosti, načelo individualizacije te načelo objektivne realnosti, broj se načela razlikuje s obzirom na znanstvene spoznaje o odgojno-obrazovnom procesu. Sam pojam načela podrazumijeva da se ona međusobno uvjetuju i realiziraju, što znači da nijedno načelo nije izolirano. Organizatore nastavnog procesa potiče se na korištenje svih načela jer ona nisu hijerarhijski uređena te se samo njihovim zajedničkim korištenjem postiže dobar rezultat odgoja i obrazovanja (Markovac, 1990).

2.2.1. Načelo primjerenosti

Kako bi se načelo primjerenosti moglo uspješno primjenjivati, potrebna su dva glavna preduvjeta: poznavanje razvojnoga stupnja učenika te sposobnost učitelja za metodičko interpretiranje nastavnoga sadržaja. Načelo primjerenosti upućuje na važnost praćenja razvoja učenika tijekom školske godine jer se njihove mogućnosti mijenjaju na početku, tijekom i na kraju školske godine. Načelo primjerenosti neophodno je za uspješno odvijanje nastavnoga procesa jer prelagani i preteški zadatci nastavu čine neprimjerenom. Prelagani zadatci ne potiču intelektualne sposobnosti onoliko koliko je to potrebno, a preteški zadatci učenicima otežavaju proces mišljenja jer nadilaze njihove aktualne mogućnosti. Smatra se da je nastava matematike najprimjerenija onda kada se učenicima predstavlja problem za čije je rješavanje potreban određeni napor jer upravo on omogućava razvoj učenika (Markovac, 1990). Upravo to može se povezati s Lavom Vigotskim i zonom proksimalnog (bliskog) razvoja. Vigotski to područje određuje kao razliku između onoga što dijete može učiniti samostalno (djetetova trenutna razvojna razina) i onoga što može napraviti uz nečiju pomoć (razina mogućeg razvoja) (Ćosić, 2018). Načelo primjerenosti ostvaruje se kroz osiguravanje relevantnog predznanja, izbor i raspored gradiva te njegovu metodičku interpretaciju, zatim kroz metode i oblike nastavnoga rada, metodičko oblikovanje nastavnoga sata te odgovarajućim nastavnim sredstvima i pomagalima. Osim toga, primjerenost sadržaja može se postići preoblikovanjem složenijih sadržaja u jednostavnije (Markovac, 1990).

2.2.2. Načelo zornosti

U početnoj nastavi matematike zornost uzrokuju priroda matematičkoga sadržaja i stupanj intelektualnog razvoja učenika (Markovac, 1990). Treća faza u kognitivnom razvoju djece prema Piagetu je faza konkretnih operacija, a može se povezati sa zornošću jer je u toj razvojnoj etapi operacijsko mišljenje usmjereno na konkretno opažanje i konkretne radnje. Djeca u tu fazu ulaze u dobi od 7 godina, što otprilike odgovara početku obrazovanja (Gardner, Kornhaber i Wahe, 1999).

Poznato je da gradivo početne nastave matematike nisu predmeti objektivnog svijeta, već apstraktni pojmovi. Iz tog se razloga zornost u početnoj nastavi matematike interpretira kao radnja kojom se apstraktni matematički pojam prenosi u empirijski (perceptivni) kako bi se on mogao spoznati osjetilno. Kako bi matematički sadržaji bili što zorniji učenicima, koriste se didaktička sredstva: predmeti kojima učenici mogu lako manipulirati. Didaktička su sredstva koja se koriste u aritmetici od početka učenja pa do računanja s višeznamenkastim brojevima štapići, različiti predmeti, abakus, brojevni pravac, žetoni i 10-mreže, 100-tablice, brojevne kartice (novčanice), Stern/Dienes blokovi i kartice. Korištenjem zornosti i zornih sredstava nastoji se voditi učenikovu spoznaju prema apstraktnome jer je zornost samo jedan korak u spoznajnome putu koji u konačnici vodi do razvijanja intelektualnih sposobnosti i usvajanja pojmova (Markovac, 1990).

Važnost načela zornosti vidljiva je ranim modelima poučavanja poput IGSZ modela Pamele Liebeck, singapurskog CPA modela te Galjperinova modela.

Liebeck (1995) dio procesa učenja u nastavi matematike, odnosno IGSZ model objašnjava kroz slova koja tvore akronim u nazivu: I (iskustvo fizičkih predmeta), G (govoreni jezik koji opisuje to iskustvo), S (slike koje prikazuju iskustvo) i Z (pismeni znakovi koji generaliziraju iskustvo). Ovaj se model može objasniti pomoću četiriju plavih i četiriju crvenih bombona, a to izgleda ovako: (I) učenik ispred sebe ima četiri plava i četiri crvena bombona, (G) učenik govori: „Imam četiri plava bombona, a to je skup od četiri. Imam četiri crvena bombona, a to je isto skup od četiri., (S) učenik crta ili analizira sliku u udžbeniku koja odgovara situaciji te (Z) učenik zapisuje pisani znak (4) vezan za situaciju.

Singapurski CPA model poučavanja (Concrete, Pictoral, Abstract model – Konkretno, Slikovno, Apstraktno; MOE, 2013) temelji se na Brunerovoj teoriji kognitivnog razvoja. Bruner objašnjava da dijete novi koncept doživljava kroz radnju ili fizičko iskustvo (enaktivan modus), zatim kroz predstavljanje ideje u slikama (ikonički), te kroz apstraktan, misaoni prikaz (simbolički). Poznato je da kroz navedene faze učenici ne prolaze uvijek linearno te da one nisu specifične za određene dobne skupine (Mathematics Hub, 2018).

Misaone se radnje prema P.J. Galjperinu oblikuju u nekoliko etapa:

- materijalno izvođenje radnje (misaona se radnja povezuje s fizičkim iskustvom – pojmovni sadržaj prenosi se u perceptivni)

- govorno izvođenje radnje (oslobađa se manipuliranje konkretnim objektima, a prelazi se na misaono rekonstruiranje materijalne radnje te konstruiranje slijeda misli o njoj)

- prenošenje radnje na misaono područje (interiorizacija – vanjska se radnja prenosi u unutrašnju) (Markovac, 1990).

Radnje nisu izolirane, već se međusobno nadopunjuju, a pretpostavka za uspješno provođenje procesa određena je razvijenost mišljenja, odnosno mogućnost reprodukcije radnje izvedene konkretnim objektima. Metodički postupak oblikovanja osnovnih računskih operacija uključuje: materijalne radnje sa skupovima konkretnih predmeta, verbalno reproduciranje materijalne radnje uz odvajanje važnih i manje važnih obilježja te misaono izvođenje operacije s brojevima uz korištenje odgovarajućeg zapisa (matematički zapis uvodi se tek nakon što je operacija s brojevima u potpunosti interirorizirana) (Markovac, 1990).

2.2.3. Načelo vlastite aktivnosti

Za početnu nastavu matematike važna je aktivnost učenika jer bez nje nema usvajanja nastavnih sadržaja. Razlikuju se individualna aktivnost, koja obuhvaća postupke pojedinog učenika usmjerene na usvajanje matematičkog znanja, a koji se najčešće odvijaju samostalno, te kolektivna aktivnost koja podrazumijeva zajedničku angažiranost učenika i učitelja koju organizira i vodi učitelj. Individualna se aktivnost odnosi na učenikov samostalni rad na različitim izvorima znanja (neposrednoj stvarnosti, nastavnim sredstvima, udžbeničkom materijalu…). Kolektivna se aktivnost najčešće postiže izlaganjem novoga gradiva, vježbanjem i ponavljanjem, analizom različitih zadataka, provjeravanjem znanja i sl. (Markovac, 1990).

„Načelo aktivnosti višestruko je uvjetovano – biologijski, psihologijski, pedagogijski i gnoseološki. „ (Markovac, 1990; str. 52). Pod biologijskom uvjetovanošću podrazumijeva se da je dijete aktivno biće i da njegovim životom prevladava aktivnost. Psihologijska uvjetovanost implicira spoznaju vlastite aktivnosti djece kao faktora njihovog razvoja. Pedagogijska uvjetovanost odnosi se na zadatak matematičkog obrazovanja, a to je trajnost i primjenjivost stečenih znanja (Markovac, 1990). „Kognitivna ili gnoseološka uvjetovanost načela aktivnosti određena je činjenicom da je aktivnost konkretnim objektima, upotpunjena postupcima transformiranja u misaone radnje s pojmovnim objektima (brojevima) glavnim izvorom matematičkog znanja školskih početnika. (Markovac, 1990; str. 53).

Intelektualne, verbalne, manualne i grafičke aktivnosti koriste se u početnoj nastavi matematike. Djelatnosti koje se ostvaruju mišljenjem, pažnjom, pamćenjem, zaključivanjem, analizom i sintezom nazivaju se intelektualnim aktivnostima. Verbalne se aktivnosti vežu za rad s didaktičkim materijalom te se smatraju sredstvom prenošenja materijalnih radnji u one misaone. Aktivnosti pri kojima učenici mogu manipulirati konkretnim predmetima (didaktički materijali, plodovi i dr.) nazivaju se manualnim aktivnostima, a njihov je cilj konkretizacija pojmovnih sadržaja koje djeca uče. Postupci crtanja skupova, prikazivanja pojedinih operacija sa skupovima, crtanja geometrijskih crteža, grafikona, dijagrama i sličnog koriste se za konkretizaciju matematičkih sadržaja te se nazivaju grafičkim aktivnostima.

2.2.4. Načelo individualizacije

Pojam *individualizacija* podrazumijeva prilagođavanje sadržaja mogućnostima svakog učenika pazeći uz objektivne uvjete i na subjektivno stanje učenika. Nastoji se organizirati nastavu tako da se uz pomoć subjektivnih sposobnosti svakog učenika postigne maksimalni odgojno-obrazovni rezultat – iz čega se zaključuje da se uvjeti učenja prilagođavaju učeniku koji uči, a ne podređuje se učenik uvjetima učenja. Stanje intelektualnih sposobnosti učenika i prethodno znanje subjektivna su svojstva učenika koja imaju utjecaj na učenje u početnoj nastavi matematike, a različita istraživanja pokazuju da postoje velike razlike u sposobnostima i predznanju među učenicima istoga razreda. Individualizacija započinje od učitelja i njegove spremnosti da ju provodi jer što su više sadržaji prilagođeni mogućnostima učenika, to će nastava biti uspješnija (Markovac, 1990).

2.2.5. Načelo postupnosti

Didaktika načelo postupnosti povezuje sa sistematičnošću, a metodika početne nastave matematike s postupnošću učenja. Načelo postupnosti važno je kod učenja pri kojemu znanje jednoga sadržaja uvjetuje usvajanju drugog sadržaja, a upravo je takvo učenje u početnoj nastavi matematike jer je gradivo hijerarhijski raspoređeno. Sadržaj koji se uči obuhvaća prethodna znanja kao ključan dio. Kako bi se moglo ostvariti načelo postupnosti, koje je u skladu s didaktičkim pravilima od jednostavnog ka složenom, od poznatog ka nepoznatog i od konkretnog prema apstraktnom, potrebno je konstantno procjenjivati što je učenicima jednostavno, poznato i konkretno, a što nepoznato, složeno i apstraktno. Također, učitelj mora biti siguran da su učenici dobro usvojili i razumjeli prethodno znanje kako bi mogao uvesti nove sadržaje (Markovac, 1990).

2.2.6. Načelo objektivne realnosti

Uz sva navedena načela u početnoj je nastavi matematike prisutno i načelo prema kojemu se osnovni matematički pojmovi izvode iz kvantitativnih odnosa objektivne realnosti, a ono se naziva načelom objektivne realnosti. Zapisi pojedinih računskih operacija mogu se povezati uz odgovarajuću realnost te se tako postupno osigurava shvaćanje smisla i značenja zapisa kao iskaza veza i odnosa brojeva u toj realnosti. Upravo tako učenici mogu spoznati povezanost zapisa računskih operacija i njihovih značenja u realnosti te univerzalnost njihova važenja (Markovac, 1990).

3. MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI

3.1. Kurikulum – pregled hrvatskog, singapurskog, japanskog i engleskog kurikuluma

Kurikulum nastavnog predmeta određuje koje sadržaje i na koji način učenici trebaju učiti. Kako bi mogli uspoređivati pristupe množenju višeznamenkastih brojeva u udžbenicima Hrvatske, Singapura, Japana i Engleske, u ovome poglavlju donosi se pregled ishoda vezanih uz množenje preuzetih iz matematičkih kurikuluma Hrvatske, Singapura, Japana i Engleske.

3.1.1. Množenje u kurikulumu Hrvatske

U Hrvatskoj prvi susret s množenjem učenici imaju u drugome razredu; prema ishodu MAT OŠ A.2.4. očekuje se da učenici množe i dijele u okviru tablice množenja (MOZ, 2019b).

U razradi ishoda navodi se osam aktivnosti i sposobnosti:

- učenik množi uzastopnim zbrajanjem, odnosno dijeli uzastopnim oduzimanjem istih brojeva

- učenik množi i dijeli u okviru tablice množenja

- učenik određuje višekratnike zadanog broja, polovinu, trećinu, četvrtinu itd. zadanog broja, parne i neparne brojeve

- učenik primjenjuje svojstvo komutativnosti množenja te vezu množenja i dijeljenja

- učenik izvodi četiri jednakosti te imenuje članove računskih operacija

- učenik poznaje ulogu brojeva 1 i 0 u množenju i dijeljenju te množi i dijeli brojem 10

- učenik određuje nepoznati broj u zadatcima s nepoznatim članom primjenjujući vezu množenja i dijeljenja

- učenik rješava tekstualne zadatke (MOZ, 2019b).

U trećemu razredu prelazi se na množenje prirodnih brojeva do tisuću jednoznamenkastim brojem, što se navodi u ishodu MAT OŠ A.3.4. (MOZ, 2019b).

U razradi ishoda navodi se:

- učenik primjenjuje odgovarajući matematički zapis pisanoga množenja i dijeljenja

- učenik primjenjuje svojstva računskih operacija (komutativnost i distributivnost)

- učenik primjenjuje veze između računskih operacija

- učenik množi i dijeli brojevima 10, 100 i 1000

- učenik pisano dijeli na duži i kraći način (MOZ, 2019b).

Na kraju četvrtog razreda, prema ishodu MAT OŠ A.4.3., učenik *pisano množi i dijeli dvoznamenkastim brojevima u skupu prirodnih brojeva do milijun* (MOZ, 2019b).

Razrada ishoda nalaže da:

- učenik množi i dijeli brojeve s deset i sa stotinu te procjenjuje djelomični količnik

- učenik procjenjuje rezultat u zadatku prije postupka pisanoga računanja

- učenik primjenjuje postupak pisanoga množenja i dijeljenja dvoznamenkastim brojem u različitim tipovima zadataka

- učenik primjenjuje svojstva računskih operacija radi provjere rezultata (MOZ, 2019b).

U preporuci za ostvarivanje ishoda navodi se da učenike prije rješavanja zadataka treba poticati na procjenu rezultata. Također, navodi se da, iako je cilj ishoda usvajanje postupka pisanoga množenja dvoznamenkastim brojem do milijun, ne treba ustrajati na dugotrajnome računanju s velikim brojevima (MOZ, 2019b).

3.1.2. Množenje u kurikulumu Japana

U kurikulumu Japana unutar domene *Brojevi i izračuni* u drugome razredu cjelina *Množenje* obuhvaća sadržaje:

- značenje množenja (promatranje konkretnih situacija)

- upoznavanje situacija u kojima se koristi množenje

- istraživanje jednostavnih svojstva množenja te korištenje tih svojstva kako bi se sastavila tablica množenja sve do devet puta devet i provjerili rezultati izračuna

- učenje tablice množenja sve do devet puta devet i točno množenje jednoznamenkastih brojeva

- istraživanje načina množenja dvoznamenkastih i jednoznamenkastih brojeva u jednostavnim primjerima (CRICED, 2012).

Nadalje, u trećem se razredu sadržaji u cjelini *Množenje* proširuju, a obuhvaćaju:

- istraživanje načina množenja dvoznamenkastih ili troznamenkastih brojeva i jednoznamenkastih ili dvoznamenkastih brojeva (shvaćanje da se ti izračuni temelje na osnovnom množenju jednoznamenkastih množenja)

- razumijevanje načina računanja koristeći algoritme

- točno i smisleno množenje

- istraživanje svojstava množenja te korištenje tih svojstava kako bi se istražili načini računanja ili provjere rezultata (CRICED, 2012).

3.1.3. Množenje u kurikulumu Singapura

U Singapuru se učenici susreću s množenjem već u prvome razredu, a u ishodu za množenje i dijeljenje navode se sadržaji:

- učenje koncepta množenja i dijeljenja

- korištenje znaka ×

- množenje unutar 40

- dijeljenje unutar 20

- rješavanje jednostavnijih problemskih zadataka s množenjem i dijeljenjem uz slikovne prikaze (MOE, 2013).

U drugom bi razredu prema ishodu učenici trebali usvojiti:

- množenje s brojevima 2, 3, 4, 5 i 10 unutar tablice množenja

- korištenje znaka ÷

- veza između množenja i dijeljenja

- množenje i dijeljenje unutar tablice množenja

- mentalno računanje uključujući množenje i dijeljenje unutar tablice množenja s brojevima 2, 3, 4, 5 i 10 (MOE, 2013).

U ishodu za treći razred stoji da se očekuje da učenici svladaju:

- množenje unutar tablice množenja brojevima 6, 7, 8 i 9

- množenje i dijeljenje unutar tablice množenja

-množenje s ostatkom

- algoritmi množenja i dijeljenja (do tri znamenke s jednom znamenkom)

- rješavanje srednje teških problemskih zadataka uključujući četiri operacije

- mentalno računanje uključujući množenje i dijeljenje s tablicom množenja (MOE, 2013).

U četvrtome razredu unutar ishoda vezanog uz faktore i višekratnike spominju se:

- faktori, višekratnici i njihova povezanost

- određivanje je li jednoznamenkasti broj faktor zadanog broja unutar 100

- pronalaženje zajedničkog faktora od dva zadana broja

- utvrđivanje je li broj višekratnik zadanog jednoznamenkastog broja

- pronalaženje zajedničkog višekratnika od dva zadana jednoznamenkasta broja (MOE, 2013).

Unutar ishoda vezanog uz četiri operacije navode se sadržaji:

- algoritmi množenja – do četveroznamenkastih brojeva s jednoznamenkastim brojem

– do troznamenkastih brojeva s dvoznamenkastim brojem

- algoritmi dijeljenja (do četveroznamenkasti brojeva s jednoznamenkastim brojem)

- rješavanja težih problemskih zadataka s četiri operacije (MOE, 2013).

3.1.4. Množenje u kurikulumu Engleske

U kurikulumu Engleske unutar domene *Brojevi* za prvi razred cjelina *Množenje i dijeljenje* ističe se:

- rješavanje jednostavnijih problemskih zadataka koji obuhvaćaju množenje i dijeljenje, računanje odgovora pomoću konkretnih objekata, slikovnih prikaza i nizova uz podršku učitelja (DFE, 2013).

Želi se postići da učenici shvate povezanost između nizova, brojevnih predložaka i računanja s 2, 5 i 10 (DFE, 2013).

Nadalje, ishod za drugi razred propisuje:

- prisjećanje i korištenje činjenica o množenju i dijeljenju brojeva 2, 5 i 10 potrebnih za tablicu množenja, uključujući prepoznavanje neparnih i parnih brojeva

- računanje matematičkih izraza za množenje i dijeljenje unutar tablice množenja te pisanje istih pomoću znakova za množenje, dijeljenje i jednakost

- dokazivanje da se dva broja mogu množiti bilo kojim redoslijedom (komutativno svojstvo), a da za dijeljenje jednog broja drugim to ne vrijedi

- rješavanje problema koji uključuju množenje i dijeljenje, koristeći materijale, nizove, ponovljeno zbrajanje, mentalne metode i činjenice množenja i dijeljenja (DFE, 2013).

U okviru množenja u trećem razredu navode se sadržaji:

- prisjećanje i korištenje činjenica o množenju i dijeljenju brojeva 3, 4 i 8 za tablicu množenja

- pisanje i računanje matematičkih izraza vezanih za množenje i dijeljenje koristeći znanje koje imaju o tablici množenja, uključujući množenje dvoznamenkastih i jednoznamenkastih brojeva, te koristeći mentalne metode koje napreduju do formalnih pisanih metoda

- rješavanje problema: problemi u kojima nedostaju brojevi, uključujući množenje i dijeljenje, problemi skaliranja pozitivnih cijelih brojeva te problemi korespondencije u kojima je *n* objekata povezano s *m* objekata (DFE, 2013).

U četvrtom razredu sadržaji se nadograđuju te obuhvaćaju:

- prisjećanje znanja o množenju i dijeljenju za tablicu množenja sve do 12 puta 12

- korištenje mjesne vrijednosti, poznatih i izvedenih činjenica potrebnih za mentalno množenje i dijeljenje, uključujući množenje s 0 i 1; dijeljenje s 1, množenje triju brojeva

- prepoznavanje i korištenje faktorskih parova te komutativnosti u mentalnim izračunima

- množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva jednoznamenkastim brojem korištenjem formalnoga pisanog izraza

- rješavanje zadataka koji obuhvaćaju množenje i zbrajanje, uključujući korištenje distributivnog zakona za množenje dvoznamenkastih brojeva s jednoznamenkastim brojem, probleme skaliranja i teže probleme korespondencije kao što je *n* objekata povezano s *m* objekata (DFE, 2013).

Slijedeći prethodne sadržaje, u petom razredu potrebno je usvojiti:

- prepoznavanje višekratnika i faktora, uključujući pronalaženje svih faktorskih parova broja te zajedničkih faktora dva broja

- korištenje pojmova prostih brojeva, prostih faktora i složenih brojeva

- sposobnost zaključivanja je li neki broj do 100 prost i prisjetiti se prostih brojeva do 19

- množenje brojeva do četiri znamenke jednoznamenkastim ili dvoznamenkastim brojevima koristeći formalne pisane metode, uključujući dugo množenje za dvoznamenkaste brojeve

- mentalno množenje i dijeljenje brojeva oslanjajući se na poznate činjenice

- dijeljenje brojeva do četiri znamenke s jednoznamenkastim brojem koristeći formalnu pisanu metodu kratkog dijeljenja i interpretiranje ostataka dijeljenja na odgovarajući način

- množenje i dijeljenje cijelih i decimalnih brojeva s 10, 100 i 1000 (DFE, 2013).

3.1.5. Zaključak – množenje u hrvatskom, japanskom, singapurskom i engleskom kurikulumu

Iz navedenih se podataka može zaključiti da učenje množenja u Hrvatskoj i Japanu počinje u drugome razredu, dok se u Singapuru i Engleskoj ono uči već u prvom. Tempo učenja množenja varira pa se može primijetiti da se u Hrvatskoj i Japanu tablica množenja uči u drugome razredu, a da se u Singapuru i Engleskoj proteže kroz više godina (u Singapuru kroz prve tri godine, a u Engleskoj kroz prve četiri). Također, u Engleskoj se tablica množenja u četvrtome razredu proširuje sve do 12×12. Što se tiče pisanog množenja jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojevima, u Hrvatskoj se množenje jednoznamenkastim brojevima uči u trećem razredu, a dvoznamenkastim u četvrtome razredu. U Japanu se množenje i jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojevima uči u trećem razredu, ali se prije toga istražuje množenje izvan tablice množenja. U Singapuru pisano množe jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojevima u četvrtome razredu, a u Engleskoj u petome.

3.2. Modeli množenja

U razrednoj nastavi matematike najveći dio zauzimaju aritmetički sadržaji te se stoga posebna pozornost pridaje modelima aritmetike. Model se može definirati kao glavni primjer koji se primjenjuje u nastavi kako bi se prikazao matematički koncept. Valja istaknuti kako na odabir modela koji se koristi utječe kontekst zadatka te da stalno korištenje jednoga modela može uzrokovati teškoće u shvaćanju matematičkih ideja. Poželjno je da se matematički koncepti učenicima objasne kroz razne modele jer im se tako osigurava veća mogućnost usvajanja određene matematičke ideje, ali nije rijetkost da se u matematičkim udžbenicima prikazuje samo jedan model ili samo nekoliko modela koji prikazuju određeni pojam. Zbog svega je navedenoga poželjno da učitelji poznaju što više modela povezanih s brojevima i njihovim operacijama (Glasnović Gracin, 2014). S obzirom na to da ovaj diplomski rad proučava metodički pristup množenju, u fokusu će biti modeli množenja.

Ako se množenje prouči kroz stvarne životne situacije, razlikuju se četiri značenja:

1. ponovljeno dodavanje – ukupan broj elemenata više skupova s istim brojem elemenata
2. geometrijska interpretacija – prikaz uz pomoć pravokutne forme ili područja

3. Kartezijev umnožak – sve moguće kombinacije elemenata iz dvaju ili više skupova (Kennedy, Tipps i Johnson, 2007).

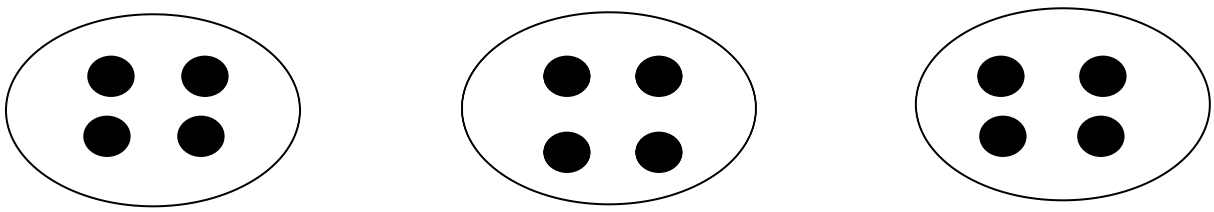
4. model skaliranja (Rickard, 2013).

Iako su neki od navedenih modela slični i ne mogu se uvijek strogo odvojiti, postoje nijanse u kontekstu uz pomoć kojih se može odrediti koji model treba koristiti kako bi učenik što uspješnije svladao zadatak. Od učitelja se očekuje da uz pomoć znanja o svakome modelu promisli i donese odluku koji je model najpogodniji za pojedini zadatak množenja (Glasnović Gracin, 2014).

3.2.1 Model uzastopnog zbrajanja jednakih pribrojnika

Model koji se najviše primjenjuje u razrednoj nastavi matematike i uz pomoć kojega se uvodi pojam množenja uzastopno je zbrajanje jednakih pribrojnika, a može se predočiti modelom skupa te modelom brojevnog pravca (Glasnović Gracin, 2014). Ponovljeno dodavanje ili uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika može se objasniti kao traženje ukupnoga broja elemenata koji pripadaju grupama s istim brojem elemenata (Kennedy i suradnici, 2007).

Primjer: *Petra ima 4 krafne, Marko ima 4 krafne i Lucija ima 4 krafne. Koliko krafni imaju zajedno?*



Petra Marko Lucija

Zbrajanje jednakih pribrojnika u ovome zadatku može se zapisati u obliku **4 + 4 + 4 = 3 · 4 = 12.**

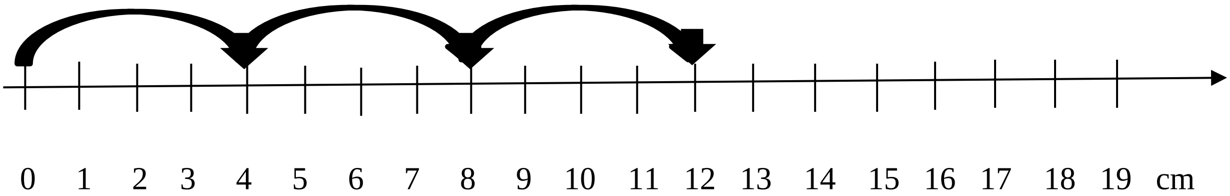
Općenit zapis zbrajanja jednakih pribrojnika izgleda ovako: $\mathbf{n \cdot a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\ puta}}$

(Glasnović Gracin, 2014).

Ako **n** označava broj skupova, a **a** označava broj elemenata skupa, može se zaključiti da ovaj zapis zapravo govori da **n** skupova s po **a** elemenata sadrži **n** · **a** elemenata (Glasnović Gracin, 2014).

Kod modela brojevnoga pravca određena se dužina nanosi onoliko puta koliko piše u zadatku, odnosno uzastopno se zbrajaju duljine zadane dužine (jednaki pribrojnici). Osim naziva *model brojevnog pravca,* javlja se i naziv *model udaljenosti* (Glasnović Gracin, 2014).

Primjer: *Zec jednim skokom preskoči 4 cm. Koliko će centimetara preskočiti ako napravi tri takva skoka?*

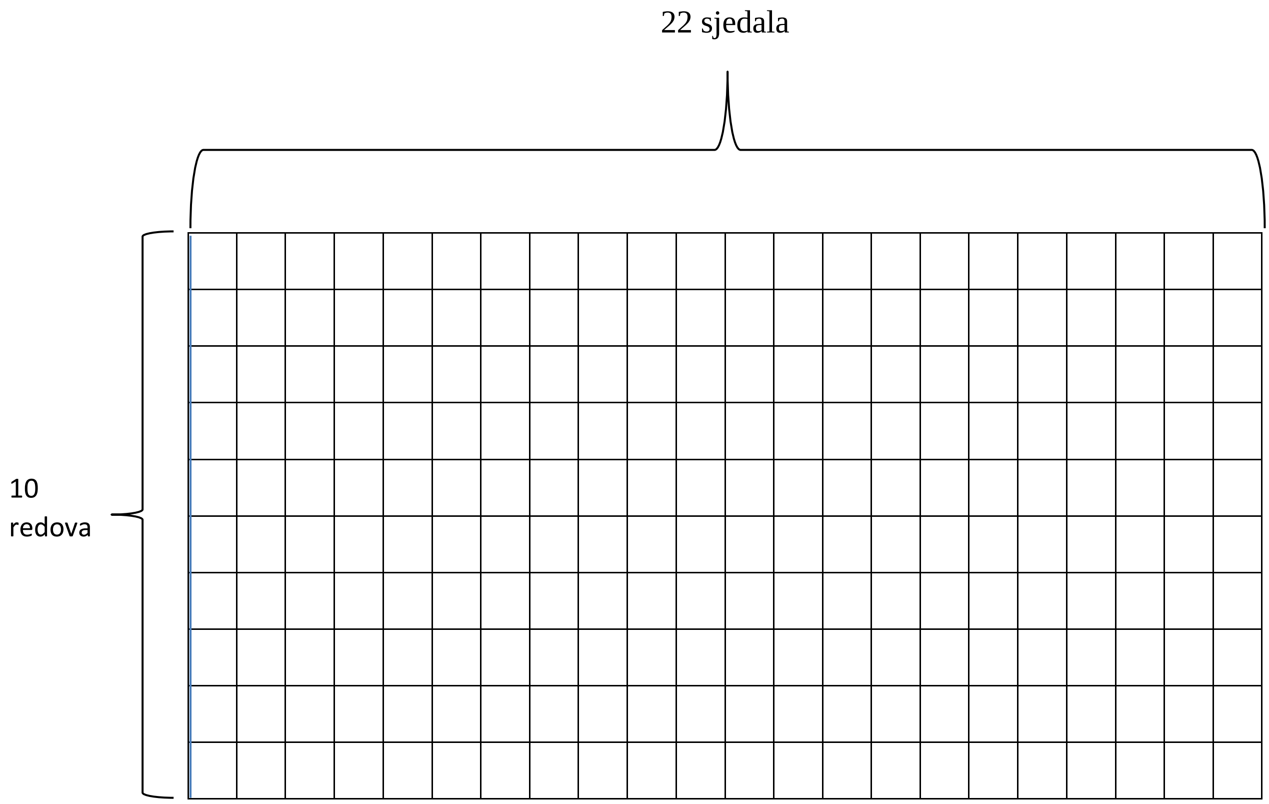


Iz dvaju navedenih primjera može se vidjeti kako se model uzastopnog zbrajanja istih pribrojnika može prikazati uz pomoć skupovnoga modela i modela brojevnoga pravca, no važno je istaknuti da se njima obuhvaća samo množenje tipa **n** · **a** (n je pritom prirodan broj). Može se zaključiti da ovi načini zbog toga nisu lako primjenjivi općenito za množenje (npr. u skupu racionalnih brojeva), a to je važno naglasiti jer ako učenik usvoji samo skupovni model množenja, onda postoji mogućnost da neće moći u potpunosti shvatiti pojam množenja racionalnih brojeva i sl. (Glasnović Gracin, 2014).

3.2.2. Model površine pravokutnika

Geometrijska interpretacija množenja prikazuje se uz pomoć pravokutne forme u kojoj je područje organizirano u obliku stupaca i redaka (Kennedy i suradnici, 2007). U pravokutnoj formi zapis a · b označava ukupan broj polja u njoj (ako *a* predstavlja broj redaka, a *b* broj stupaca).

Primjer: *U jednom redu kinodvorane nalaze se 22 sjedala. Koliko sjedala ima kinodvorana ako se u njoj nalazi 10 takvih redova? Nacrtaj sliku.*



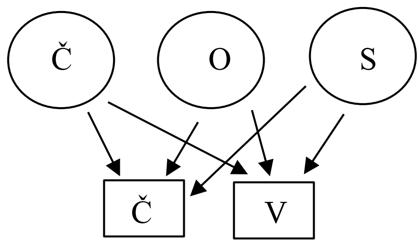
10 redova po 22 sjedala, 10 · 22 = 220

Umnožak dvaju prirodnih brojeva **a · b** može se proučavati kao površina pravokutnika u čijem zapisu **a** predstavlja broj redaka, a **b** broj elemenata u svakom retku (tj. broj stupaca). Ovaj je model posebno važan jer se pomoću njega mogu zorno prikazati i objasniti svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja (Glasnović Gracin, 2014). Moguće je npr. množiti broj redova sa stupcima ili obrnuto – u oba će slučaja rezultat sugerirati isti broj sjedala u kinodvorani.

3.2.3. Kombinatorni model

Iako se kombinatorni model uglavnom ne koristi u nastavi matematike u osnovnoj školi, može se obrađivati na satu dodatne matematike. Kombinatorni model množenja odnosi se na skup prirodnih brojeva, a može se prikazati pomoću modela stabla ili Kartezijevog modela. Kako bi se u obzir uzele sve mogućnosti s elementima obaju skupova, oba se oblika mogu prikazati simbolički kao uređeni parovi (a, b) (Glasnović Gracin, 2014).

Primjer: *Kiosk s palačinkama ima tri vrste palačinki (čokoladna, obična i slana palačinka) te dvije vrste punjenja za palačinke (čokoladno i voćno). Koliko je različitih vrsta palačinki moguće dobiti na tom kiosku ako je u jednu palačinku moguće staviti samo jednu vrstu punjenja?*



Svaka strelica na dijagramu odgovara jednoj kombinaciji: (Č, Č), (Č, V), (O, Č), (O, V), (S, Č) i (S, V). Ukupan broj kombinacija dobit ćemo tako da prebrojimo strelice. Ako idemo po vrstama palačinki, dobit ćemo 2 + 2 + 2 = 3 · 2 = 6 mogućih kombinacija.

Isti se primjer može prikazati uz pomoć pravokutne forme koja se sastoji od triju stupaca (Č, O, S) i dvaju redaka (Č, V).

Č	O	S	×
Č, Č	O, Č	S, Č	Č
Č, V	O, V	S, V	V

Dobiveno je istih šest mogućih kombinacija kao u prethodnome prikazu: (Č, Č), (Č, V), (O, Č), (O, V), (S, Č) i (S, V), ovaj put složenih u 2 retka i 3 stupca pa iz pravokutnog modela slijedi da ih ima 3 · 2 = 6.

Dakle, od tri vrste palačinki i dvije vrste punjenja može se dobiti šest različitih kombinacija; 3 · 2 = 6.

3.2.4. Model skaliranja

„Skaliranje se odnosi na aktivnosti množenja λ · a, pri čemu λ može biti bilo koji broj.“ (Glasnović Gracin, 2014: 19). Ovaj se model može prikazati pomoću brojevnoga pravca, ako su λ i *a* prirodni brojevi, no dobro je spomenuti ga i u obliku skaliranja jer se tako kasnije može nadograditi na ostale skupove (npr. skup Q) (Glasnović Gracin, 2014).

Na primjer, skaliranje se može istražiti uz pomoć zadatka koji uključuje diva. Učenici mogu istraživati kolike će biti divove cipele ako mu trebaju tri puta veće cipele od njihovih, koliko pahuljica div jede za doručak ako mu treba dva puta više pahuljica nego što treba učenicima ili koliko brzo hoda div ako hoda četiri puta brže nego što hodaju učenici (Rickard, 2013).

3.3. Svojstva množenja

Proučavanjem matematičkih operacija mogu se uočiti određene pravilnosti, a s obzirom na to da se ovaj diplomski rad bavi množenjem, pažnja će se usmjeriti ka zakonima aritmetike vezanima za množenje. Kod operacije množenja nije bitan redoslijed množenja brojeva, a to se svojstvo naziva komutativnost (Kilpatrick i suradnici, 2001). Dakle, algebarska operacija množenja komutativna je jer uvijek vrijedi $a \cdot b = b \cdot a$ (LZMK, 2021). Iako svojstvo komutativnosti kaže da redoslijed kojim se brojevi množe nije važan, potrebno je osvijestiti da $2 \cdot 3$ i $3 \cdot 2$ mogu biti drugačije interpretirani (Rickard, 2013).

Primjer:

2 · 3 **3 · 2**

Iako su prikazi $2 \cdot 3$ i $3 \cdot 2$ drugačiji, dobiveni je rezultat i dalje isti (6), što je u skladu sa zakonom komutativnosti (Rickard, 2013). Iz primjera je vidljivo da zapis $2 \cdot 3$ predstavlja tri grupe i u svakoj od njih dva člana, a to je ukupno šest članova. S druge strane, zapis $3 \cdot 2$ predstavlja dvije grupe po tri člana, a to je ukupno šest članova. Na temelju toga može se zaključiti da će konačan rezultat uvijek biti isti čak i ako faktorima zamijenimo mjesta.

Još jedno svojstvo množenja je asocijativnost. Za operaciju množenja može se utvrditi da je asocijativna ako za svaka tri elementa a, b, c, vrijedi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (LZMK, 2021).

Na primjer, ako se koristi operacija množenja i tri broja – 2, 5 i 7 – moguće je pomnožiti ih na sljedeće načine:

- $(2 \cdot 5) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$

- $2 \cdot (5 \cdot 7) = 2 \cdot 35 = 70$

- $(2 \cdot 7) \cdot 5 = 14 \cdot 5 = 70$

- $2 \cdot (7 \cdot 5) = 2 \cdot 35 = 70$.

Zbog svojstava komutativnosti i asocijativnosti će rezultat uvijek biti isti bez obzira na to kako su brojevi grupirani.

Treće je svojstvo množenja distributivnost množenja prema zbrajanju. Za operaciju množenja kaže se da je distributivna prema zbrajanju ako vrijedi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ i $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (LZMK, 2021). Usvajanje distributivnog svojstva korisno je jer se učenike osposobljava za množenje zbroja nekim brojem (Markovac, 1990). Također, većina mentalnih i pisanih metoda temelji se upravo na zakonu distributivnosti (Rickard, 2013).

Na primjer, u operaciji množenja s brojevima 24 i 13, oni se mogu pomnožiti na sljedeći način:

- $24 \cdot 13 = 24 \cdot (10 + 3) = 24 \cdot 10 + 24 \cdot 3 = 240 + 72 = 312$.

Slično, u operaciji množenja s brojevima 11 i 12, kako bi se zadatak sveo na množenje s 10 i 1, prvi faktor možemo rastaviti na sljedeći način:

- $11 \cdot 12 = (10 + 1) \cdot 12 = 10 \cdot 12 + 1 \cdot 12 = 120 + 12 = 132$

4. UČENJE MATEMATIČKIH PRAVILA

Učiteljica Hrvatskoga jezika kojoj učenik pročita priču, ali potom ne zna reći što se u priči dogodilo, ne bi za njega rekla da je iskusan čitač. Sukladno tome, učiteljica Matematike za učenika koji zna riješiti zadatak, ali ne može objasniti proces rješavanja, ne bi rekla da je taj učenik iskusan matematičar. Postavlja se pitanje koliko je važno učenje pravila u matematici, odnosno koliko je važno razumijevanje naučenih pravila (Burns, 2007). Al-Khwarizmi arapski je matematičar kojemu se pripisuju zasluge za razvoj algoritama u srednjemu vijeku (Twomey Fosnot i Dolk, 2001). Niz pravila koji govori na koji se način rješava određeni matematički problem naziva se algoritmom (Kilpatrick i suradnici, 2001). Učenik može biti sposoban riješiti matematički problem uz pomoć papira i olovke, ali to može značiti da učenik zna proceduru, odnosno zna što treba učiniti u vezi sa zadanim problemom, no potrebno je provjeriti razumije li učenik zašto se koristi upravo određeni postupak, zašto taj postupak ima smisla te zašto je koristan u rješavanju problemskih situacija. Kada učenik zna što treba napraviti te zašto to treba napraviti, onda razumije aritmetički postupak u odnosu na njegovo značenje i primjenu (Burns, 2007).

Izbor algoritma prikladnog za korištenje u određenoj situaciji ovisi upravo o toj situaciji. To znači da će se, primjerice, algoritam za razlomke razlikovati od algoritma za decimalne brojeve (Kilpatrick i suradnici, 2001).

Kilpatrick i suradnici (2001) navode karakteristike koje se mogu uzeti u obzir kod odabira algoritama:

a) transparentnost

b) učinkovitost

c) općenitost

d) preciznost.

Važno je da algoritam bude transparentan jer to osobi koja ga koristi omogućuje lakše razumijevanje, a za učenike to znači da će se moći prisjetiti toga algoritma čak i ako ga nisu koristili godinama. Osim spomenutih karakteristika poželjno je da algoritam bude jednostavan jer se smatra da se takvi algoritmi lakše pamte, ali i lakše izvode točno. Između spomenutih karakteristika valja pronaći ravnotežu jer se može dogoditi da opći i učinkoviti algoritmi ne budu posve transparentni. Jedan primjer netransparentnog, ali vrlo učinkovitog i ljudima bliskog algoritma pritiskanje je gumba na kalkulatoru (Kilpatrick i suradnici, 2001).

U školskoj matematici algoritmi su ključni jer učenicima pružaju brojne mogućnosti, a jedna je od njih razumijevanje temeljnih aritmetičkih operacija i važnih koncepata (npr. koncepta mjesne vrijednosti). Osim toga, učenicima algoritmi otvaraju put za lakše razumijevanje i učenje naprednijih tema (Kilpatrick i suradnici, 2001).

Istraživanje koje je provela jedna učiteljica iz New Yorka potvrđuje ono što se događa u većini slučajeva kada učenici uče matematička pravila bez razumijevanja zašto se nešto radi upravo na taj način. U istraživanju su sudjelovali učenici četvrtoga razreda, a provedeno je u obliku rješavanja zadatka u skupinama. Učenici su trebali izračunati koliko je $19 \cdot 21$. Poznato je da su učenici imali određeno iskustvo s množenjem u trećem razredu, a prije provođenja ovoga istraživanja učiteljica tijekom te školske godine nije podučavala sadržaje na temu množenja. Osim što su trebali pronaći rješenje, trebali su i voditi bilješke o tome o čemu su razmišljali pri rješavanju zadatka. *Crvena* je *skupina* objasnila da su prvo množili $1 \cdot 9$, a onda $1 \cdot 1$. Zatim navode kako su se tada spustili u idući red te dodali nulu ispod devet. Kada ih je učiteljica pitala zašto su se spustili u idući red, odgovorili su da je takvo pravilo te da je pravilo da se nula stavlja na početak drugoga reda. Zaključak je da se nitko od članova *Crvene skupine* nije sjećao zašto pravilo kaže da na početak idućega reda treba upisati nulu. *Plava* je *skupina* pri prvome rješavanju zadatka dobila pogrešno rješenje, no kada su došli do točnoga rezultata, dokazali su ga crtanjem pravokutnika. Oni su također znali da se nula stavlja na početak drugoga reda, ali su ponudili i objašnjenje pravila. Zaključili su da se nula dodaje na početak drugoga reda jer se želi taj broj napraviti većim, odnosno tvrde da taj broj treba biti veći od broja iznad njega. *Ljubičasta skupina* izračunom je došla do pogrešnoga rješenja, ali su zaključili da se to dogodilo jer nisu stavili nulu na početak idućega reda. Također, zaključili su da se nula mora dodati na početak idućeg reda jer množe s deset, a kada se množi s deset, dodaje se nula na mjesto jedinica jer se ne radi s jedinicama. Naveli su i da su na kraju dobili točno rješenje, ali da su ga prvo dobili zbrajanjem. Za *Crvenu* se *skupinu* može reći da su pokazali proceduralno znanje kod korištenja algoritma za množenje. Kod *Plave* se *skupine* može uočiti da razmišljaju što napraviti i zašto to napraviti, odnosno da je njihovo razumijevanje bilo izvan okvira pravila koje su naučili napamet (Burns, 2007).

4.1. Strategije računanja

U današnje vrijeme postoji veliki broj različitih alternativnih metoda računanja koje se mogu koristiti mentalno ili uz pomoć papira i olovke. Smatra se da su te alternativne strategije za računanje lakše i brže od tradicionalnih algoritama te da pridonose općem osjećaju za brojeve (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2010). Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema i Empson (1998; prema Van de Walle i suradnici, 2010) svaku strategiju koja se udaljava od tradicionalnog algoritma nazivaju izmišljenom strategijom. U izmišljene strategije ipak ne ubrajaju korištenje fizičkih materijala ili brojanje po jedinicama.

Van de Walle i suradnici (2010) ističu tri glavne strategije računanja:

a) direktno modeliranje

b) strategije koje su osmislili učenici

c) tradicionalni algoritmi.

Izravno (direktno) modeliranje, odnosno uporaba manipulativa ili crteža zajedno s brojanjem za izravno predstavljanje značenja operacije ili priče, razvojni je korak koji stvara temelje za izmišljene strategije. Učenici koji koriste izravno modeliranje kasnije će moći prenijeti svoje ideje na metode koje se ne oslanjaju na brojanje ili materijale. Važno je da se na učenike ne vrši pritisak da prerano napuste manipulativne pristupe (Van de Walle i suradnici, 2010).

Van de Walle i suradnici (2010) navode nekoliko razlika između strategija koje su osmislili učenici i tradicionalnih algoritama:

a) izmišljene strategije se, za razliku od tradicionalnih algoritama, više fokusiraju na brojeve nego na znamenke

b) izmišljene strategije se fokusiraju na lijevu stranu za razliku od algoritma koji se fokusira na desnu

c) izmišljene strategije su više fleksibilne, a manje jedini pravi put.

Orijentiranost izmišljenih strategija na brojeve, a ne na znamenke znači da u zapisu $68 \cdot 7$ rješavanje započinje s množenjem $7 \cdot 60$, a ne $7 \cdot 6$ kao što bi bio slučaj kod tradicionalnog algoritma. Množenje orijentirano na lijevu, a ne na desnu stranu kod izmišljenih algoritama znači da će se u zapisu $26 \cdot 47$ prvo množiti $20 \cdot 40$, dok bi tradicionalnim algoritmom prvo množili $7 \cdot 6$. Množenjem s lijeve strane, odnosno u ovom slučaju množenjem $20 \cdot 40$ (800), dobiva se uvid u veličinu mogućeg rješenja u samo jednom koraku. Fleksibilnost izmišljenih strategija znači da su one podložne promjenama s obzirom na brojeve koji su zadani u zadatku kako bi se olakšalo računanje, dok tradicionalni algoritam predlaže utvrđene korake koji se koriste za sve probleme (Van de Walle i suradnici, 2010).

Osim razlika između tradicionalnih algoritama i izmišljenih strategija autori navode i prednosti strategija koje su osmislili učenici:

a) korištenjem metoda koje su sami osmislili učenici rade manje grešaka

b) potrebno je manje vremena za ponavljanje

c) kod učenika se razvija osjećaj za brojeve

d) pomoću izmišljenih strategija stvara se podloga za mentalno računanje i procjenu

e) izmišljenim strategijama koje su fleksibilne brže se dolazi do rješenja nego uz pomoć tradicionalnog algoritma

f) samostalno osmišljanje algoritama, odnosno izmišljenih strategija, ostvaruje glavni cilj matematike, a to je učenje matematike sa smislom (Van de Walle i suradnici, 2010).

Postoje istraživanja koja dokazuju da vještina računanja učenika prilikom korištenja izmišljenih strategija ne pati u odnosu na one učenike koji su koristili samo tradicionalne metode. Štoviše, podaci pokazuju da ti učenici nadmašuju svoje vršnjake koji su podučavani standardnim programom u području razumijevanja i rješavanja problema (Van de Walle i suradnici, 2010).

4.2. Algoritmi i osjećaj za brojeve

Prije uporabe algoritama ljudi su se oslanjali na pojedince koji su se znali koristiti abakusom. Zbog toga ne čudi podatak da su pojavom algoritama nastale podjele između onih koji se i dalje žele držati abakusa i onih koji su zastupali nove metode. Slična je situacija prisutna i danas u vezi s reformama podučavanja matematike. S jedne su strane oni koji se zalažu za podučavanje matematike na već poznat način, a s druge oni koji se zalažu za računanje temeljeno na razvoju mentalnih matematičkih strategija i osjećaja za brojeve. U novinskim člancima prisutno je mišljenje da novom reformom djeca neće moći računati, a sve se to događa jer roditelji i mnogi drugi članovi zajednice nisu dobro informirani. Oni pretpostavljaju da ako djeca ne uče ono što je po njima cilj matematike (algoritmi), onda djeca ne uče ništa. Kada učenici steknu dovoljno znanja vezanih za odnose brojeva i operacija te razviju određeni repertoar računalnih strategija, mogu istraživati zašto tradicionalni algoritmi funkcioniraju. Vrlo često roditelji djecu uče algoritme, a djeca ih pokušavaju koristiti bez obzira na nerazumijevanje. Upravo istraživanje algoritama može pridonijeti njihovu boljem razumijevanju. Iako su algoritmi ključni za nastavu matematike, oni ne bi smjeli biti njen glavni cilj. Metoda učenja ili računanja razvijanjem osjećaja za brojeve oslanja se na postupke u kojima se brojevi prvo proučavaju, a potom valja odlučiti koja je metoda za rješavanje prikladna i učinkovita. Osjećaj za brojeve ne može se razviti *preko noći*, već je za njega potrebno određeno vrijeme. Učenje sa osjećajem za brojeve učenike potiče na razmišljanje i razumijevanje te se tako udaljava od mehaničkog učenja pravila napamet. Promjenom poučavanja algoritama bez potrebe za učenjem napamet od djece se traži da uče više, a ne manje, kako se često vjeruje, jer se od učenika zahtijeva da gledaju brojeve prije nego što krenu s računanjem. Također, Blaise Pascale izjavio je da je ljude lakše uvjeriti u nešto s razlozima koje sami osmisle i otkriju nego pomoću razloga koje su drugi osmislili (Twomey Fosnot i Dolk, 2001).

Učenje razvijanjem osjećaja za brojeve ne donosi prednosti samo učenicima, već i učiteljima. Od njih se očekuje da razvijaju vlastite mentalne matematičke strategije kako bi mogli poticati razvoj kod svojih učenika. Pri uvođenju novina i udovoljavanju zahtjevima okoline u obzir treba uzeti učitelje kojima za sve promjene treba određeno vrijeme, ali i podrška. Također, treba pripaziti da prilikom reforme svoje prakse učitelji ne zakinu djecu u pogledu učenja algoritama. Ukratko, učenici trebaju učiti i znati algoritme, ali rješavanju problema trebaju pristupiti sa osjećajem za brojeve koji će postepeno razvijati uz podršku i vodstvo učitelja (Twomey Fosnot i Dolk, 2001).

5. METODIČKI PRISTUPI MNOŽENJU VIŠEZNAMENKASTIH BROJEVA DVOZNAMENKASTIM BROJEM U MATEMATIČKIM UDŽBENICIMA I PRIRUČNICIMA

Kao što se u svim nastavnim predmetima nastoji postepeno nadograđivati naučene sadržaje, tako se logičan slijed početnoga rada s operacijama nastavlja množenjem dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva. Učenici istražuju tradicionalne i alternativne algoritme korištenjem svojstava komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja nakon što su usvojili osnovne pojmove, operacije i mjesnu vrijednost (Kennedy i suradnici, 2007).

U ovome poglavlju prikazani su metodički pristupi množenju višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem koji su prikupljeni analizom hrvatskih i stranih matematičkih udžbenika i priručnika.

5.1. Pristup u hrvatskim udžbenicima

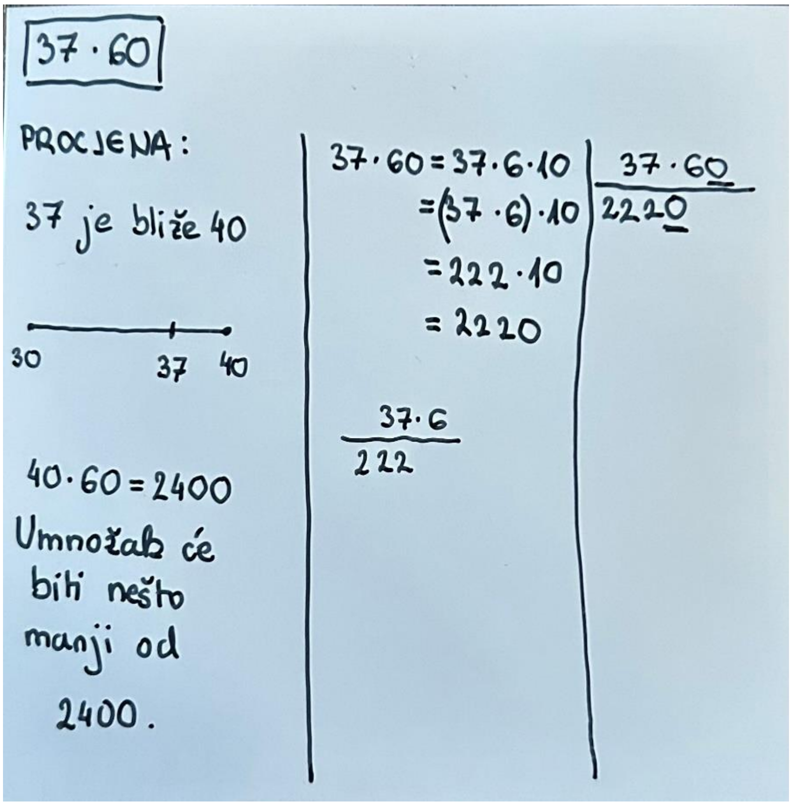
Za potrebe ovoga istraživanja proučit će se drugi dio hrvatskog matematičkog udžbenika *Otkrivamo matematiku 4*. U poglavlju *Množenje* lekcije su redom: *Množenje višeznamenkastog broja jednoznamenkastim, Množenje višekratnikom dekadske jedinice, Množenje dvoznamenkastih brojeva, Množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim* te *Naučili smo: pisano množenje velikim brojevima.*

U lekciji *Množenje višeznamenkastog broja jednoznamenkastim* ponavlja se postupak pisanog množenja jednoznamenkastim brojem koji se učio u 3. razredu te se proširuje do množenja peteroznamenkastih brojeva, pri čemu se koriste kartice dekadskih jedinica i tablica mjesnih vrijednosti.

Lekcija *Množenje višekratnikom dekadske jedinice* započinje slikom koju učenici trebaju opisati, nabrojati dekadske jedinice koje vide i dopuniti. Na slici je prikazana ploča na kojoj su napisane dekadske jedinice (1, 10, 100, 10 000, 100 000 i 1 000 000), a ispod ploče su napisani višekratnici broja 100 (100 i 200) te višekratnici broja 10 000 (10 000 i 20 000). Zadatak učenika je da nabroje još višekratnika brojeva 100 i 10 000 te razmisle kako bi množili neki dvoznamenkasti broj višekratnikom dekadske jedinice.

U prvom primjeru treba pomnožiti 37 · 60. Učenici najprije trebaju odrediti koji je faktor u tom množenju višekratnik dekadske jedinice i koje. Zadatak se rješava kroz tri koraka, prvo se radi procjena produkta zaokruživanjem prvog faktora na najbližeg višekratnika dekadske jedinice. Na taj način učenici stječu dojam koliki će otprilike biti produkt. U drugom koraku se višekratnik dekadske jedinice rastavlja kao produkt brojeva 6 i 10 pa se koristi svojstvo asocijativnosti da se dobije krajnji rezultat. Na kraju se provodi pisano množenje u kojemu se prvo množi 37 · 6, a onda se s desna drugom faktoru i umnošku pripiše 0 jer se množe s 10.

Slika 1.



U idućem se zadatku od učenika očekuje da pomnože 45 · 700 na tri načina kao u prethodnome primjeru.

Četvrti zadatak obuhvaća množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva višekratnicima dekadske jedinice. Prvo je potrebno napraviti procjenu, pisano pomnožiti brojeve, a onda objasniti postupak (pr. 63 · 300).

U petome zadatku treba pomnožiti 3000 · 74 na tri načina kao i u prethodnim primjerima, pri čemu se učenicima skreće pažnja da će se radi lakšeg i bržeg računanja višekratnik dekadske jedinice staviti na drugo mjesto, primjenjujući svojstvo komutativnosti množenja.

U šestome zadatku učenicima je ostavljen prostor da izračunaju te zatim nadopune prazna mjesta u rečenicama u kojima trebaju pretvoriti određen broj dana ili mjeseci u sate.

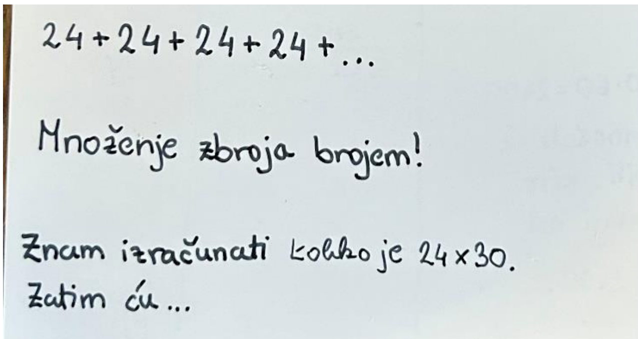
U sedmome zadatku učenici trebaju množiti dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve višekratnicima dekadske jedinice, a navedena je i napomena da, ako postoji potreba, mogu zamijeniti mjesta faktorima.

Slijede različiti zadatci koji se svode na množenje višekratnikom dekadske jedinice na već tri spomenuta načina.

U jednom od zadataka zadan je niz množenja ($53 \cdot 20$, $54 \cdot 20$, $55 \cdot 20$ i $56 \cdot 20$), a zadatak je učenika da primijete što se u nizu mijenja, a što ostaje isto. Potiče ih se i da nastave niz bez računanja.

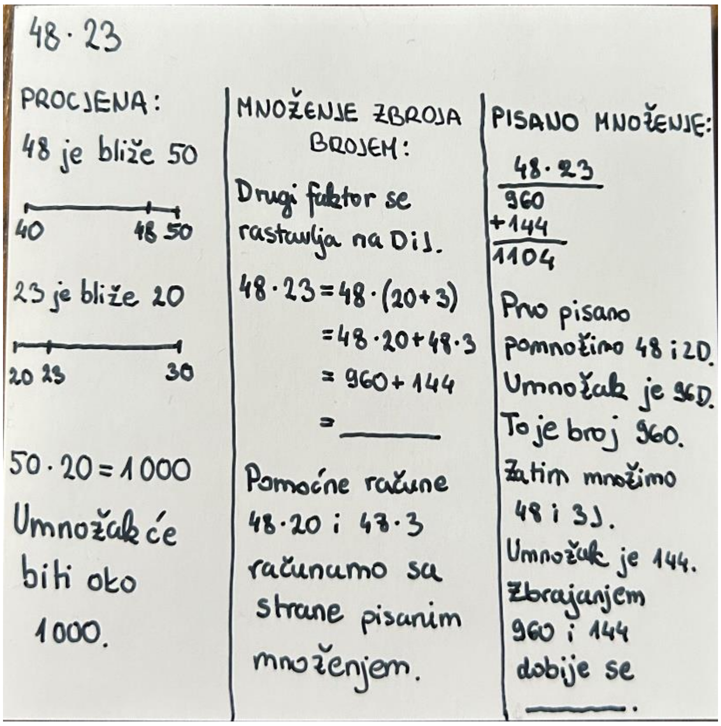
Lekcija *Množenje dvoznamenkastih brojeva* započinje zadatkom u kojemu je potrebno izračunati koliko ukupno sati ima u mjesecu ožujku. Navedena su i tri ideje za rješavanje tog zadatka koje učenici trebaju dodatno pojasniti. Jedna od ideja je primjena svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju (tj. množenje zbroja brojem) tako da se jedan faktor rastavi na prikladan zbroj. Druga ideja je najprije množiti s 30, tj. s deseticom drugog faktora, a zatim dobiti konačni rezultat dodajući još jednom prvi faktor.

Slika 2.



Slijedi primjer u kojemu se množi $48 \cdot 23$. Prvo slijedi procjena zaokruživanjem oba faktora kako bi se dobio dojam koliki je otprilike rezultat. Nakon procjene slijedi primjena svojstva distributivnosti tako da se drugi faktor rastavi na desetice i jedinice. U zadnjem koraku se provodi pisano množenje gdje se najprije množi s deseticama (prvi redak), a zatim s jedinicama (drugi redak). Učenici trebaju proučiti primjer i nadopuniti ono što nedostaje.

Slika 3.



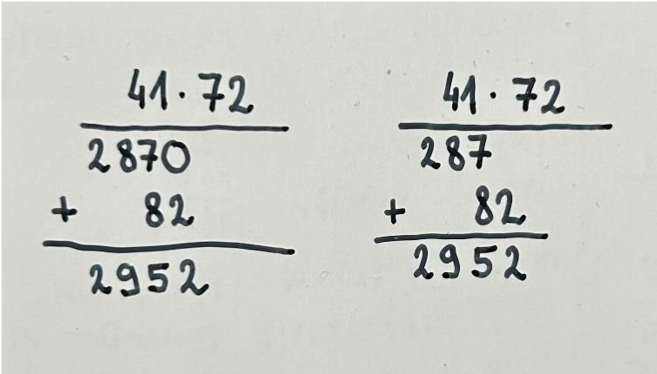
Nakon toga se od učenika traži da prouče prethodni primjer, odnosno množenje zbroja brojem i pisano množenje, te da usporede ta dva načina. Navodi se i da ta dva postupka na isti način dolaze do rješenja, ali drugačije se zapisuju, što učenici trebaju objasniti.

Zatim učenici trebaju na tri načina pomnožiti 59 · 59 i 72 · 13.

Slijede zadatci koji se svode na množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem.

Na idućoj stranici, u prvome zadatku, prikazano je množenje 41 · 72 na dva načina. U prvom načinu je na kraju prvog produkta napisana nula, a u drugom načinu je izostavljena. Učenici trebaju shvatiti da nulu iz prvog načina mogu izostaviti jer pomicanje drugog produkta za jedno mjesto u desno označava da je prvi produkt zapravo deset puta veći no što piše Nakon proučavanja primjera učenici trebaju riješiti nekoliko primjera u kojima ne trebaju zapisivati 0 u prvome umnošku (pr. 19 · 42).

Slika 4.



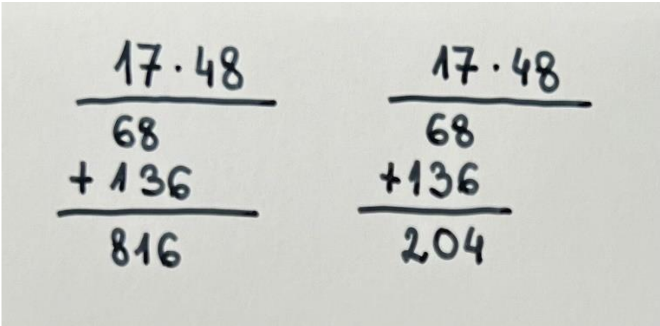
U drugome zadatku učenici trebaju na tri načina pomnožiti 37 · 16 i 16 · 37 kako bi provjerili vrijedi li zamjena mjesta faktora za množenje dvoznamenkastim brojevima, a ostavlja im se i prostor da provjere vrijedi li zamjena mjesta faktora samo za taj navedeni primjer ili i za ostale dvoznamenkaste brojeve.

U sljedećem zadatku vježba se pisano množenje dvoznamenkastih brojeva, ali je prije množenja potrebno napraviti procjenu (pr. 56 · 88).

Idući se zadatak može povezati s pravokutnim prikazom množenja. U zadatku se navodi da čokolada ima 12 stupaca i 12 redaka te da je potrebno izračunati koliko kockica ima čokolada. Kako učenici ne bi brojali svaku kockicu na ilustraciji, potrebno ih je usmjeriti da shvate kako će broj kockica dobiti ako pomnože 12 · 12 jer imaju 12 redova po 12 kockica ili 12 stupaca po 12 kockica. U nastavku slijedi primjer u kojemu čokolada ima 20 redaka i 13 stupaca. Postupak je isti: množenjem dvaju brojeva dobije se broj kockica jer postoji 13 stupaca po 20 kockica ili 20 redova po 13 kockica. U posljednjem primjeru vezanom za čokoladu i broj kockica učenici trebaju proučiti sliku, odrediti koliko redaka i stupaca čokolada ima te izračunati koliko je to kockica (13 stupaca i 10 redaka).

U posljednjem zadatku učenici trebaju proučiti dva načina koja su dječaci koristili te odrediti koji je način pogrešan i zašto. Pogreška je u potpisivanju – u drugom slučaju, kad množi s jedinicama, dječak ne pomiče drugi produkt za jedno mjesto u desno.

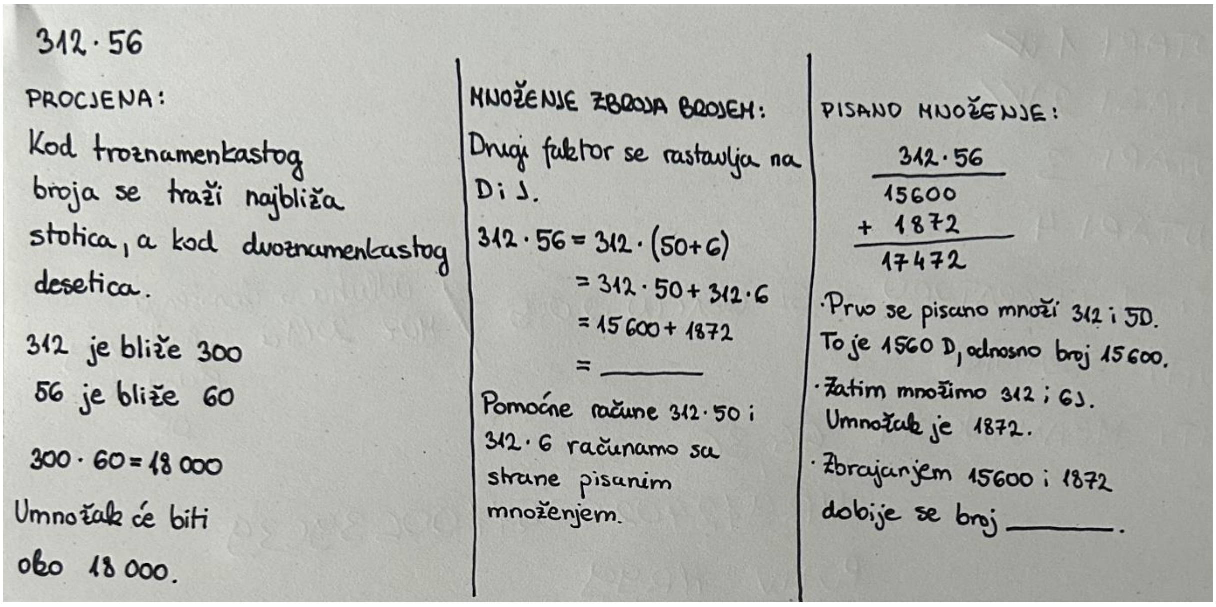
Slika 5.



Lekcija *Množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem* započinje zadatkom u kojemu su napisana tri primjera množenja, 33 · 27, 333 · 27 i 3333 · 27, a učenici trebaju reći u čemu je razlika. Zadatke trebaju pokušati riješiti te zaključiti koji se brojevi množe u prvom, drugom i trećem primjeru.

Nakon toga je, slično kao kod množenja dva dvoznamenkasta broja, na tri načina prikazano množenje 312 × 56 (procjena, množenje zbroja brojem i pisano množenje).

Slika 6.



Slijede zadatci koji se svode na množenje troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem na tri načina kao što je već viđeno u prethodnim primjerima te se učenike potiče na primjenu komutativnog svojstva množenja.

Na idućoj stranici se nastavlja vježbanje naučenog gradiva rješavanjem zadataka koji se svode na pisano množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem (zadatci riječima, provjera već riješenih zadataka, korištenje vlastitih primera, nastavljanje niza itd.).

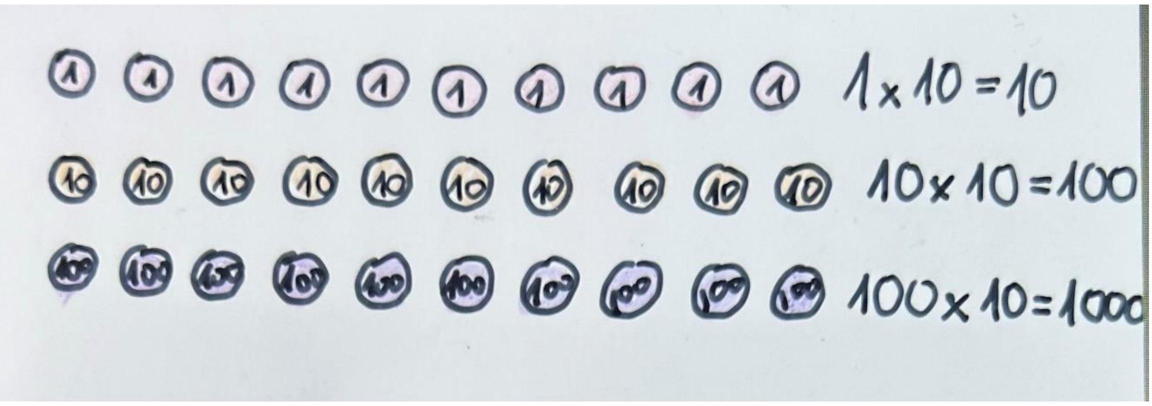
5.2. Pristup u singapurskim udžbenicima

Za potrebe ovoga istraživanja proučit će se singapurski matematički udžbenik *My pals are here*. Treće poglavlje, odnosno poglavlje koje obuhvaća sadržaje vezane uz temu ovoga rada, nosi naslov *Množenje i dijeljenje cijelih brojeva*. U popisu lekcija koje se obrađuju u ovome poglavlju, a vezane su za množenje navode se dvije lekcije: *Množenje jednoznamenkastim brojevima* i *Množenje dvoznamenkastim brojevima.*

U prvoj lekciji *Množenje jednoznamenkastim brojevima* za učenje množenja jednoznamenkastim brojem koriste se žetoni s dekadskim jedinicama pomoću kojih se grafički prikazuje distributivnost množenja prema zbrajanju.

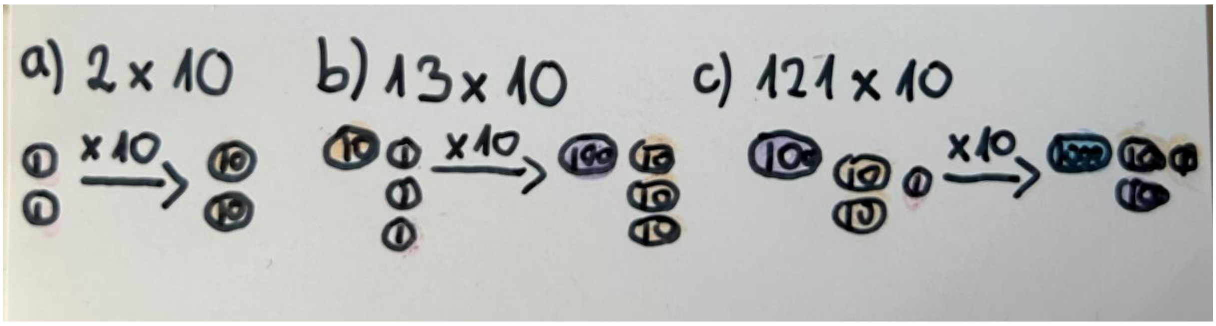
Lekcija *Množenje s dvoznamenkastim brojem* započinje primjerom u kojemu se odnosi među dekadskim jedinicama prikazuju kao množenje brojem 10 uz pomoć već spomenutih žetona iz prethodne lekcije.

Slika 1.



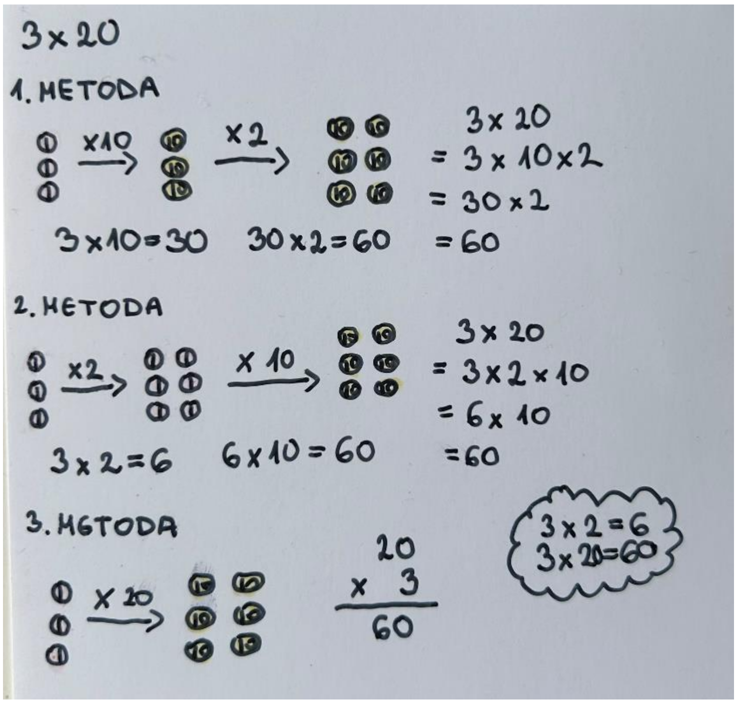
U drugome primjeru prikazuje se množenje jednoznamenkastog, dvoznamenkastog i troznamenkastog broja brojem 10 te se učenike potiče da razmisle primjećuju li neko pravilo. Distributivnost množenja prema zbrajanju je ponovno grafički prikazana pomoću žetona.

Slika 2.



U trećemu primjeru prikazuju se tri načina kako se može množiti višekratnikom broja 10 na primjeru množenja 3 × 20. Uz prikaze pomoću žetona dani su i pisani prikazi. U prvome i drugome načinu je žetonima grafički prikazano korištenje svojstva asocijativnosti. U trećemu načinu množi se bez rastavljanja broja 20 već se naglašava analogija da je 3 × 2 = 6, a 3 × 20 = 60. Ista tri načina prikazuju se i u idućim dvama primjerima u kojima se množi 11 × 20 i 103 × 20.

Slika 3.

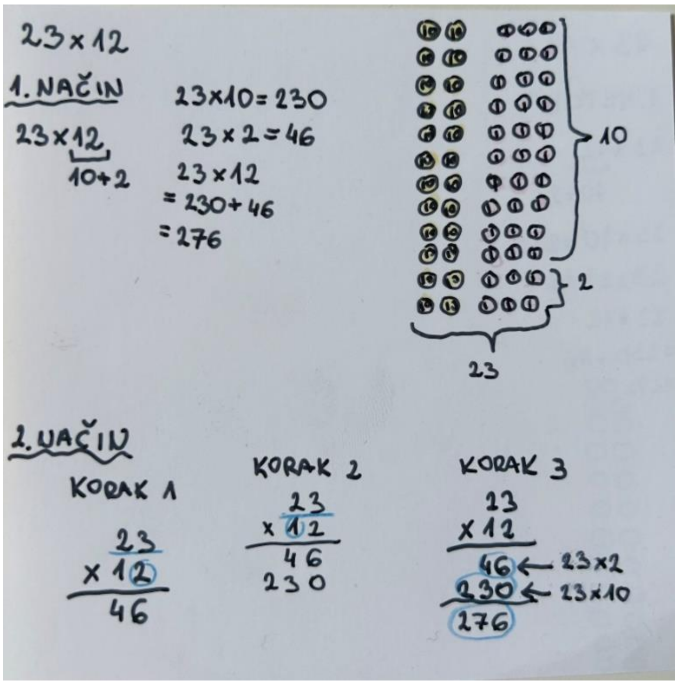


Nakon primjera slijedi zadatak za vježbanje u paru u kojem se od učenika očekuje da množe brojem 10 i višekratnicima broja 10. U prvome zadatku trebaju uz pomoć kružića s označenim vrijednostima prikazati i objasniti množenje 3 × 10. U drugome zadatku prijatelj iz klupe pomoću kružića treba prikazati i objasniti 3 × 20. U trećemu zadatku piše da učenici trebaju zamijeniti uloge te ponoviti ono što su radili u prvom i u drugom primjeru s ostalim zadanim primjerima: 7 × 10 i 7 ×30, 18 × 10 i 18 × 40, 105 × 10 i 105 × 20, 80 × 10 i 80 × 20 te 600 × 10 i 600 × 30.

Nakon toga slijede još četiri zadatka za vježbu (množenje brojem 10, množenje višekratnikom broja 10, rastavljanje prvog faktora ili zamjena mjesta faktora).

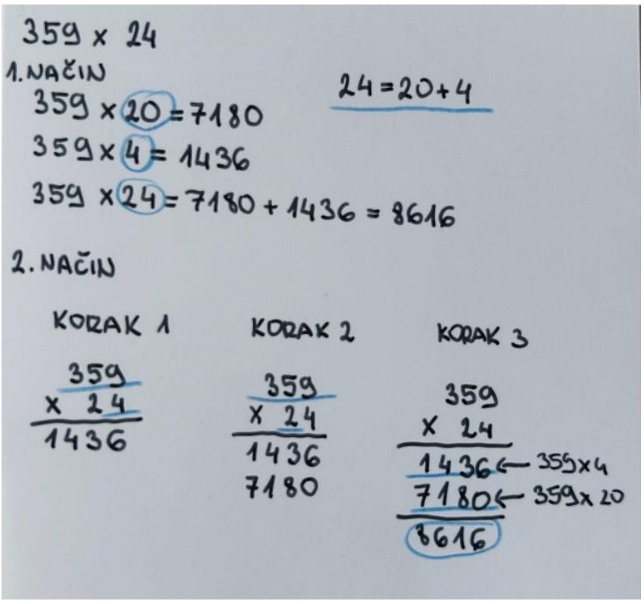
Kada učenici savladaju množenje brojem 10 i njegovim višekratnicima, prelazi se na množenje dvoznamenkastim brojem. Prije nego što se krene s množenjem dvoznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem, učenicima se zadaje zadatak da uz pomoć žetona prikažu kako bi saznali ukupan broj kolačića ako znaju da Eva ima 15 kutija, a u svakoj kutiji ima 24 kolačića. Nakon tog primjera slijedi prvi primjer u kojem je prikazano množenje brojeva 23 × 12. Dobivanje rezultata prikazano je na dva načina, a na kraju stoji i provjera pomoću zaokruživanja je li dobiveni rezultat razuman. U prvome se načinu broj 12 rastavlja na 10 + 2 te se broj 23 posebno množi brojem 10 i brojem 2, a onda se dobiveni produkti zbroje. Ovakva primjena distributivnosti kod određivanja produkta se u singapurskim udžbenicima sustavno primjenjuje već kod učenja tablice množenja. Odabir malih brojeva omogućuje da se ovo množenje, i primjena svojstva distributivnosti, grafički prikažu pomoću žetona. U drugome načinu je primjena svojstva distributivnosti prikazana u formi pisanog množenja. U prvom se koraku broj 23 množi brojem J drugoga broja (2), u drugom se koraku broj 23 množi brojem D drugoga broja (1), a u trećem se koraku ta dva rezultata zbroje. U provjeri se zaključuje da je 23 približno 20, a 12 približno 10. Kada se ta dva broja pomnože, dobije se 200, što zapravo znači da je 23 × 12 približno 200, a s obzirom na to da je dobiveni rezultata 276, rezultat je razuman.

Slika 4.



Nakon dvoznamenkastih brojeva dolaze troznamenkasti brojevi i njihovo množenje dvoznamenkastim brojem. Kao i u primjeru gdje se računalo koliko je 23 × 12, tako se i u ovom zadatku, gdje se množi 359 × 24, broj 24 rastavlja kao 20 + 4 pa se 359 množi posebno i jednim i drugim brojem. Dobiveni se rezultati zbrajaju tako da konačan rezultat iznosi 8616. Na kraju se provjerava je li dobiveni rezultat razuman zaokružujući faktore te približno računajući produkt.

Slika 5.



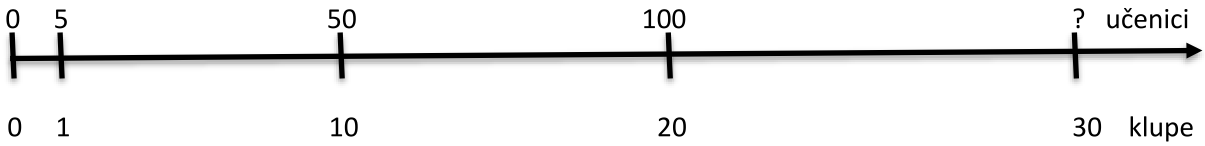
Nakon dvaju početnih primjera slijedi vježbanje u paru s pet koraka. U prvom se koraku od učenika traži da uz pomoć bacanja kocke sastave četveroznamenkasti broj. U drugome koraku njihov kolega iz klupe treba baciti kocku, a ako dobije 0 ili 1, mora ponovno bacati. U trećemu koraku trebaju procijeniti umnožak dobivena dva broja iz koraka 1 i 2 te ih pomnožiti. U četvrtome koraku učenici mijenjaju mjesta tako da onaj učenik koji je slagao četveroznamenkasti broj baca kocku kako bi dobio broj kojim se množi četveroznamenkasti broj koji slaže njegov kolega iz klupe. Korake 1 i 3 ponavljaju tri puta. U petome koraku uspoređuju dobivene rezultate s procjenom koju su donijeli u trećem koraku.

Na kraju se nalazi pet zadataka za vježbu (korištenje procjene i pisano množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem).

5.3. Pristup u japanskim udžbenicima

Za potrebe ovoga istraživanja proučit će se japanski matematički priručnik *Sansu Math: Teachers guide 3B.* Šesnaesto poglavlje *Razmišljajmo o algoritmima množenja* obuhvaća lekcije: *Množenje deseticama, Množenje dvoznamenkastih brojeva višekratnicima dekadskih jedinica, Množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem (4×) i Množenje troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem (2×).*

Lekcija *Množenje deseticama* započinje ilustracijom klupa i učenika. Prikazano je 30 klupa (10 stupaca po 3 klupe ili 3 reda po 10 klupa) u koje je potrebno smjestiti učenike tako da u svakoj klupi bude 5 učenika. Zadatak se prikazuje pomoću brojevnoga pravca tako da je dolje označen broj klupa, a gore broj učenika (model skaliranja).



Zaključuje se da će se ukupan broj učenika dobiti ako se broj djece koji sjeda u svaku klupu pomnoži s brojem klupa (5 × 30). To je množenje dvoznamenkastim brojem što prema udžbeniku učenici do tog trenutka još nisu učili.

Uz pomoć pravokutne forme učenicima se želi vizualno prikazati da postoji 10 stupaca po 3 klupe te da se u svakoj klupi nalazi 5 učenika ili da imaju 3 reda po 10 klupa te da se u svakoj klupi nalazi 5 učenika.

Na idućoj stranici stoje dvije ideje kako se zadatak može riješiti uz pomoć asocijativnosti množenja. Dječak Viktor zadatak je riješio tako da je u zapisu 5 × 30 broj 30 rastavio u obliku 10 × 3 te je prvo pomnožio 5 × 10, a onda dobiveni rezultat s 3. Djevojčica Eliza napravila je isto s brojem 30, ali je prvo pomnožila 5 i 3, a onda dobiveni rezultat brojem 10.

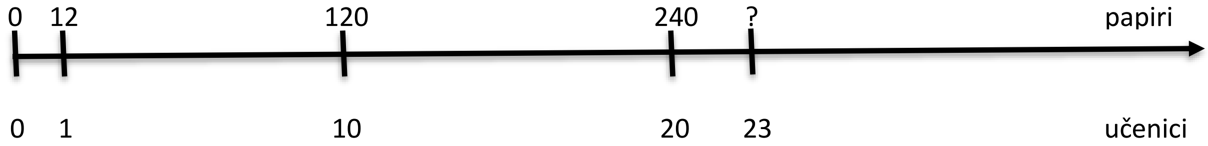
U idućem se koraku zaključuje da je 5 × 30 isto što i 10 puta (5×3), što bi značilo da se u množenju 5 × 30 na kraju s desne strane može dodati 0, odnosno ako se drugi faktor uveća 10 puta, onda i odgovor treba povećati 10 puta.

U idućemu je primjeru potrebno pomnožiti različite jednoznamenkaste brojeve višekratnicima broja 10 (pr. 4 × 60).

Lekcija *Množenje dvoznamenkastih brojeva višekratnicima dekadskih jedinica* započinje zadatkom u kojemu se želi izračunati koliko je 12 × 30. Učenicima se zadaje zadatak i potiče ih se na razmišljanje. Cilj je da učenici shvate kako je 30 isto što i 3 × 10. Nakon što se broj 30 zapiše u obliku 3 × 10 i uvrsti u početni matematički zapis, dobit će se 12 × 3 × 10. Tada je moguće iskoristiti svojstvo asocijativnosti pa najprije množiti 12 × 3, čime se dobiva da je 12 × 30 = 12 × 3 × 10 = 36 × 10. Učenike se potiče na prisjećanje sažetka lekcije u kojoj su učili množenje jednoznamenkastog broja višekratnikom broja 10 (10). U toj su lekciji zaključili da je 5 × 30 deset puta veći od 5 × 3. Mogu zaključiti da je u njihovom zadatku 36 × 10 deset puta veće nego 36 × 1, odnosno da se u množenju s 10 nula pripisuje s desne strane. Zaključuje se: 12 × 30 = (12 ×· 3) × 10 = 36 × 10 = 360.

U idućem zadatku potrebno je množiti dvoznamenkaste brojeve višekratnicima desetice (pr. 34 × 20).

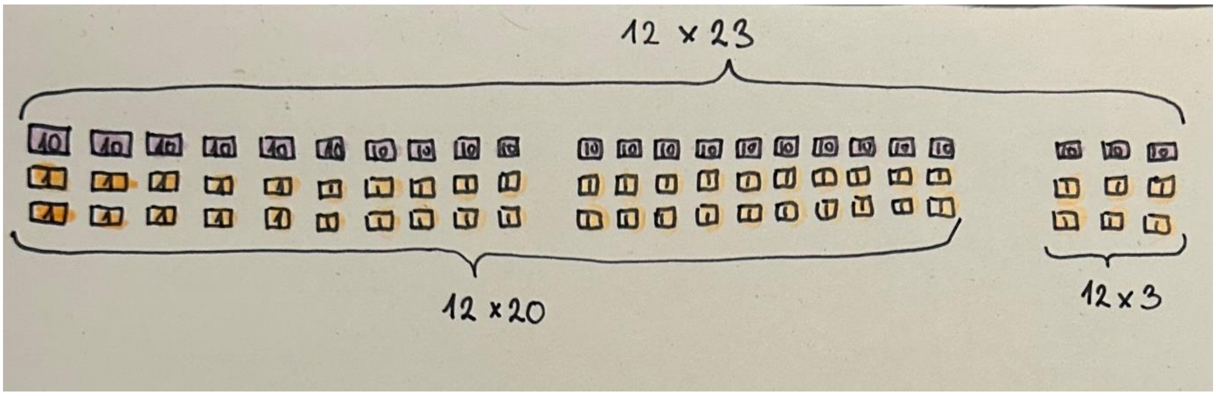
Lekcija *Množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem* počinje primjerom u kojemu se navodi da razred ima 20 učenika te da svakome učeniku treba podijeliti 12 listova papira. Zaključuje se da je to 12 × 20 što daje 240 te da je ukupno potrebno 240 papira ako se svakome učeniku želi podijeliti jedan papir. Pored primjera postavlja se zadatak u kojemu piše da se u razredu nalazi 23 učenika te da se svakome učeniku želi dati 12 listova papira. Postavlja se pitanje koliko je listova potrebno da bi to bilo moguće. U prvom se koraku želi postići da učenici dođu do matematičkog zapisa, odnosno da zaključe da je potrebno pomnožiti 12 × 23 kako bi došli do rješenja, a to se postiže uz pomoć brojevnog pravca (model skaliranja).



U drugome se koraku učenike potiče na razmišljanje te se dolazi do zaključka da je 10 × 20 = 200, što znači da je njima potrebno više od 200 papira. Također, vrijedi da je 12 × 20 = 240 pa bi se moglo zaključiti da je potrebno oko 240 listova papira. U trećem se koraku učenike potiče da pokušaju doći do rješenja uz pomoć prijašnjeg znanja o množenju.

U idućem koraku predstavljena je ideja djevojčice Yoko. Ona je pomoću kartica dekadskih jedinica slikovno prikazala množenje brojeva 12 i 23 te je koristila distributivnost množenja prema zbrajanju i broj 23 prikazala kao 20 + 3 i potom svaki dio posebno množila brojem 12. Kao i kod singapurskog udžbenika, i ovdje mali faktori omogućavaju grafički prikaz distributivnosti množenja prema zbrajanju. Također, kao i u Singapuru, i u Japanu se distributivnost sistematično koristi već od učenja tablice množenja te se dodatno ponavlja na počeku 3. razreda.

Slika 1.



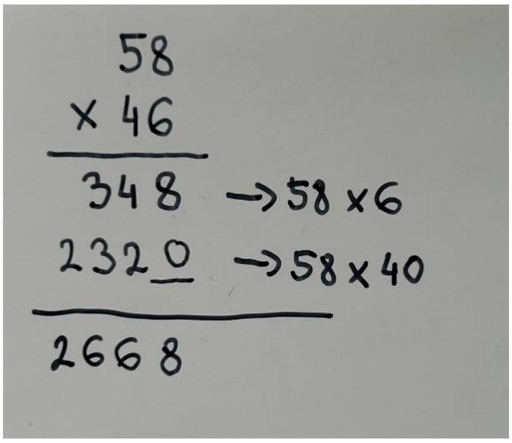
Učenici trebaju promotriti način na koji je Yoko postavila zadatak te objasniti njezinu metodu.

U idućoj lekciji, koja također obrađuje množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem, nastavljaju se prethodni sadržaji te se uči algoritam za množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem pri čemu se gledaju samo primjeri u kojima nema prijelaza u veću dekadsku jedinicu. Učenicima se želi objasniti da se algoritam temelji na ideji rastavljanja broja 23 na 20 + 3. U postupku pisanoga množenja dvoznamenkastoga broja dvoznamenkastim brojem prvo se množi prvi broj (12) brojem J drugoga broja (3), a zatim brojem D drugog broja (2). Učenici trebaju razumjeti da je prvi djelomični rezultat (36) umnožak brojeva 12 i 3, a drugi djelomični rezultat (24) umnožak brojeva 12 i 20. Poticanjem na donošenje zaključka zašto se 24 pomiče za jedno mjesto ulijevo kod pisanoga množenja želi se postići razumijevanje da je 24 zapravo 240 te da je nula izostavljena. Kako bi lakše shvatili izostavljanje nule, prvo im se treba pokazati algoritam u kojemu se ne izostavlja nula pa tek onda algoritam u kojemu se nula izostavlja.

Nakon učenja algoritma slijede dva zadatka za vježbu. U prvome je potrebno pomnožiti različite dvoznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojem uz pomoć algoritma (pr. 23 × 13). U drugome zadatku valja izračunati koliko je kugli u 45 kutija ako svaka od njih sadrži 12 kugli. Zadatak se svodi na množenje dvoznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem.

U sljedećoj lekciji se promatraju slučajevi množenja dvoznamenkastih brojeva s prijelazom u veću dekadsku jedinicu. Lekcija započinje množenjem brojeva 58 i 46 uz pomoć algoritma.

Slika 2.

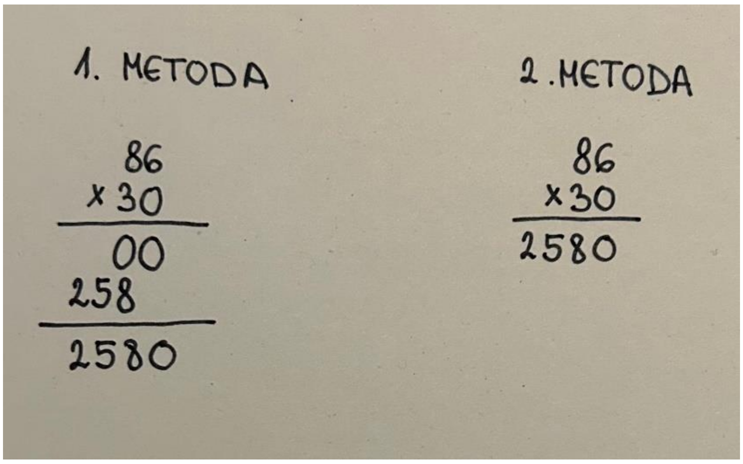


Učenike se potiče na uspoređivanje algoritma kod množenja 12 i 23 te množenja 58 i 46. Može se zaključiti da se algoritam provodi na isti način, ali da postoji razlika u broju znamenaka kod djelomičnih umnožaka.

Nakon primjera učenici rješavaju zadatke pisanog množenja dvoznamenkastih brojeva u bilježnici (pr. 94 × 79).

Posljednja lekcija u kojoj se obrađuje množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem počinje množenjem 86 i 30. Učenici trebaju razmisliti o najlakšem načinu na koji je moguće riješiti taj zadatak. Napisane su dvije metode kojima se može riješiti zadatak. U prvoj je metodi djevojčica zapisivala sve korake kod množenja, a u drugoj je metodi dječak izostavio jedan korak.

Slika 3.

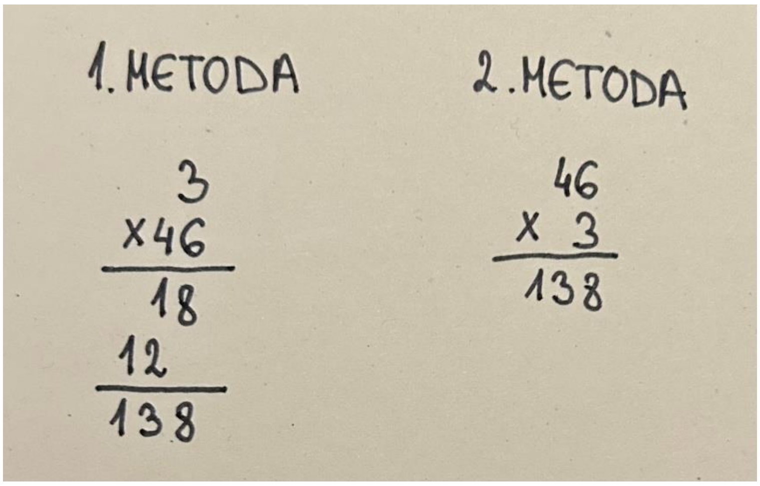


Može se primijetiti da je u drugoj metodi izostavljeno dodavanje nule.

Nakon primjera učenici rješavaju zadatke u kojima množe dvoznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojevima koji, kao i u primjeru, imaju 0 na mjestu J (pr. 87 × 60).

U idućem primjeru, gdje se množi 3 × 46, prikazane su dvije metode te se učenike potiče na njihovo uspoređivanje.

Slika 4.

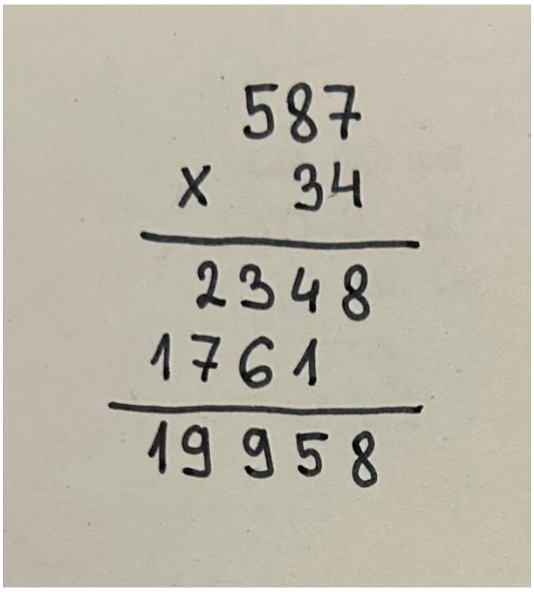


Može se zaključiti da je u prvom primjeru dvoznamenkasti broj na drugome mjestu, a u drugoj metodi na prvome mjestu. Stoga u prvoj metodi postoje dva međurezultata, a u drugome samo jedan. Zbog svojstva komutativnosti znamo da je rezultat isti pa učenici mogu birati koji će način računanja odabrati.

Nakon primjera učenici rješavaju dva zadatka za vježbu, u kojima trebaju iskoristiti svojstvo komutativnosti da skrate postupak množenja (pr. 8 × 95).

Nakon množenja dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem prelazi se na množenje troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem. U prvome primjeru promatra se množenje 587 × 34. Prije rješavanja zadatka učenike valja podsjetiti na algoritam za množenje dvoznamenkasti brojeva dvoznamenkastim brojem te ih potaknuti na razmišljanje kako bi zadatak riješili uz pomoć prethodnog znanja.

Slika 5.



Nakon primjera učenici rješavaju zadatke za vježbu u kojima množe troznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojem koristeći algoritam (pr. 498 × 75).

U posljednjoj lekciji u kojoj se obrađuje množenje troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem prikazano je množenje 703 × 25. Učenici trebaju primijetiti da je u prvome broju 0 na mjestu desetica, ali da je postupak isti.

Nakon primjera učenici rješavaju slične zadatke za vježbu.

5.4. Pristup u engleskim udžbenicima

Za potrebe ovoga istraživanja proučit će se engleski matematički udžbenik *Maths – No problem!*. Treće poglavlje *Cijeli brojevi: Množenje i dijeljenje* obuhvaća veći broj lekcija vezanih za množenje: *Pronalaženje višekratnika, Pronalaženje faktora, Pronalaženje zajedničkih faktora, Pronalaženje prostih brojeva, Pronalaženje kvadratnih i kubnih brojeva, Množenje s 10, 100 i 1000, Množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva jednoznamenkastim brojem, Množenje četveroznamenkastih brojeva (3 lekcije), Množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem (2 lekcije) i Množenje troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem (2 lekcije).*

Lekcija *Množenje s 10, 100 i 1000* započinje zadatkom riječima koji se postepeno rješava kroz cijelu lekciju. U zadatku je navedeno da se jogurti prodaju u pakiranju koje sadrži 10 komada. Jedna košara sadrži 10 takvih pakiranja, a jedna kutija sadrži 10 košara. Potrebno je otkriti koliko će jogurta učenici dobiti ako kupe po 6 komada pakiranja po 10 jogurta, 6 košara te 6 kutija (eng. *half a dozen of each*). U prvome koraku računa se koliko je 6 × 10, odnosno koliko jogurta sadrži 6 pakiranja po 10 jogurta. Pakiranja su prikazana pomoću žetona u kojima je upisano koliko jogurta sadrži svako pakiranje, a to je broj 10. Prikazano je 6 takvih žetona pa se može zaključiti da 6 pakiranja po 10 jogurta sadrži ukupno 60 jogurta. Ispod slikovnog prikaza zapisano je i množenje u kojemu se množi 6 × 1 D (desetica), što je ukupno 6 D (desetica), odnosno 60.

U drugome koraku računa se koliko su jogurta učenici kupili ako su kupili 6 košara. Ako svaka košara sadrži 10 pakiranja jogurta, a svako pakiranje sadrži 10 jogurta, onda se može zaključiti da jedna košara sadrži 100 jogurta. Kako bi se došlo do traženog rješenja, potrebno je pomnožiti 6 × 100, odnosno 6 × 1 S (stotica), što je ukupno 6 S (stotica) ili 600.

U trećemu se koraku želi izračunati koliko jogurta su učenici kupili ako su kupili 6 kutija. Ako svaka kutija sadrži 10 košara, a svaka košara 100 jogurta, onda se može zaključiti da jedna kutija sadrži 1000 jogurta. Kako bi se došlo do traženog rješenja, potrebno je pomnožiti 6 × 1000, odnosno 6 × 1 T (tisućica), što je ukupno 6 T (tisućica) ili 6000.

U četvrtome koraku se postavlja novo pitanje, a to je koliko jogurta bi učenici kupili ako bi kupili 12 pakiranja po 10 jogurta, 12 košara i 12 kutija (eng. *a dozen of each*). Ako jedno pakiranje sadrži 10 jogurta, a učenicima treba 12 takvih pakiranja, onda će množiti 12 × 10, odnosno 12 × 1 D (desetica) i dobiti 12 D (desetica) ili 120. Ako jedna košara sadrži 100 jogurta, a učenicima treba 12 košara, onda će množiti 12 × 100, odnosno 12 × 1 S (stotica) i dobiti 12 S (stotica) ili 1200. Ako jedna kutija sadrži 1000 jogurta, a učenicima treba 12 takvih kutija, onda će množiti 12 × 1000, odnosno 12 × 1 T (tisućica) i dobiti 12 T (tisućica) ili 12000. Svi primjeri prikazani su pomoću već spomenutih žetona.

Nakon riješenog primjera učenici rješavaju tri zadatka za vježbu. U prvome zadatku trebaju broj 4 pomnožiti s 10, 100, 1000, 20, 200 i 2000. U drugome zadatku trebaju popuniti praznu kućicu kako bi jednakost vrijedila (pr. ____ × 100 = 700). U trećem zadatku trebaju pomnožiti različite brojeve dekadskim jedinicama (pr. 16 × 100).

Lekcija *Množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva jednoznamenkastim brojem* također započinje zadatkom koji se postepeno rješava kroz cijelu lekciju. Iz slikovnog prikaza zadatka može se iščitati da jedna kutija krafni košta 18 funti, a navedena je i posebna ponuda u kojoj 8 takvih kutija košta 118 funti. Postavlja se pitanje je li to dobra ponuda, a prije rješavanja zadatka nacrtana je djevojčica koja misli da je ponuda dobra te govori kako će kupiti 3 seta po 8 kutija. U prvome koraku slikovno je prikazano 18 funti uz pomoć novčanice i kovanica te žetona s vrijednostima 10 i 1. U zadatku se želi izračunati koliko bi koštalo 8 kutija krafni kada bi se svaka kutija platila 18 funti. Zadatak je prikazan pomoću žetona te riješen uz pomoć pisanog množenja na duži način, tako da su D i J posebno pomnožene pa se računa 8 × 10 (80) i 8 × 8 (64). Kada se to zbroji, dobije se 144, što znači da je ponuda dobra. Učenicima se postavlja pitanje kolika je ušteda ako se kupuje po posebnoj ponudi.

U drugome koraku želi se izračunati koliko koštaju 3 seta od 8 kutija krafni, što znači da je potrebno pomnožiti 3 × 118. Broj 118 rastavljen je na stotice, desetice i jedinice te prikazan pomoću žetona. Tada se množi 3 × 8 (24), 3 × 10 (30) i 3 × 100 (300). Kada se svi međurezultati zbroje, dobije se 354, što znači da 3 seta po 8 kutija krafni košta 354 funti.

Nakon riješenog zadatka slijede dva zadatka za vježbu množenja dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva jednoznamenkastim brojem.

Lekcija *Množenje četveroznamenkastih brojeva* podijeljena je na tri lekcije. U prvoj se lekciji pojavljuju samo množenja u kojima nema prijelaza u veću dekadsku jedinicu, kao što je 1022 × 4.U prvom se koraku množenje prikazuje pomoću dekadskih jedinica 1, 10 i 1000, a u drugome koraku pisanim množenjem tako da se krene od J prema T. Konačan rezultat dobiva se tako da se međurezultati zbroje.

Nakon početnog zadatka slijede tri zadatka za vježbanje množenja četveroznamenkastih brojeva jednoznamenkastim brojem.

U sljedećoj lekciji rješava se primjer u kojem treba pomnožiti 2718 × 4, u kojem se pojavljuju prijelazi u veću dekadsku jedinicu pri množenju. U prvom je koraku množenje prikazano tako da je broj rastavljen na T, S, D i J te je prikazan pomoću žetona, a zatim je svaka vrijednost zasebno pomnožena s 4. Ukupan rezultat dobio se tako da su svi rezultati međusobno zbrojeni. U drugom je koraku na duži način prikazano pisano množenje 2718 s 4 počevši od broja J, tako da se posebno jedno ispod drugoga zapisuju rezultati množenja svakom od znamenaka (prvo umnožak množenja s 8, onda 1, pa 7 te na kraju 2). U trećem koraku je prikazano pisano množenje na kraći način gdje se ako umnožak znamenaka J, D ili S prelazi 9, jedan dio J, D ili S pretvara u veće vrijednosti i njima pridodaje, dok se ostatak zapisuje ispod crte na odgovarajuće mjesto. Broj 2718 je rastavljen na T, S, D i J te je prikazan pomoću žetona (četiri puta jer se množi brojem 4). U četvrtom se koraku broj 2718 treba udvostručiti, odnosno učenici trebaju zbrajati 2718 + 2718, a kasnije dobiveni rezultat udvostručiti na isti način (5436 + 5436) te se tako dobije ukupno rješenje.

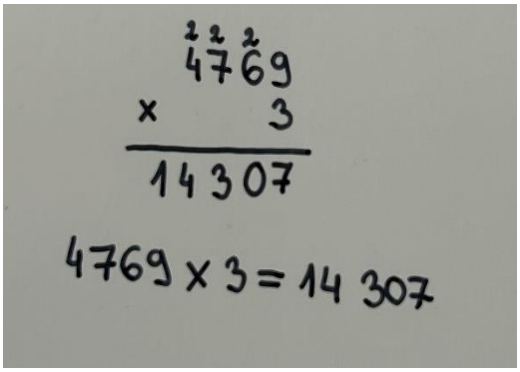
Prije zadataka za vježbanje nalazi se vježba u paru. Učenici bacaju kocku kako bi sastavili četveroznamenkasti broj i odredili jednoznamenkasti broj kojim će ga pomnožiti. U napomeni stoji da bi umnožak trebao biti što je manji mogući.

Slijede tri zadatka za vježbanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem.

U posljednjoj lekciji koja obrađuje množenje četveroznamenkastog broja jednoznamenkastim brojem zadan je zadatak u kojemu treba izračunati koliko košta 8 avionskih karata od Londona do Singapura ako je poznato da jedna karta košta 1144 funti. Zadatak se rješava na ista tri načina kao u prethodnoj lekciji.

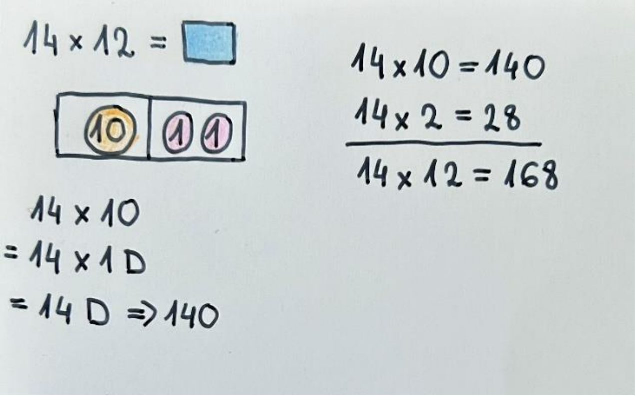
U prvome zadatku za vježbu učenici trebaju proučiti kako je Charles riješio zadatak te na isti način riješiti tri primjera (pr. 2431 × 4), a u drugome zadatku pisano pomnožiti četveroznamenkaste brojeve jednoznamenkastim brojevima (pr. 9123 × 7).

Slika 1.



Lekcija koja obuhvaća temu ovoga rada, *Množenje dvoznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem*, podijeljena je u dvije lekcije. Prva lekcija započinje primjerom u kojem je prikazana kutija s 12 krafni, a postavlja se pitanje koliko krafni ima u 14 takvih kutija. U primjeru u kojemu se množe brojevi 14 i 12 broj 12 se pomoću žetona rastavlja na desetice i jedinice pa se dobiva 1 D i 2 J. Zadatak se uz pomoć distributivnosti množenja prema zbrajanju zapisuje u obliku $14 \times 12 = 14 \cdot (10 + 2) = 14 \times 10 + 14 \times 2$. Prvi faktor (14) prvo se množi brojem desetica nakon čega se dobiva 14 D, a što je jednako 140. Nakon množenja brojem desetica prvi se faktor množi brojem jedinica i kao rezultat dobiva 28. U završnome se koraku zbrajaju dva umnoška i dobiva broj 168.

Slika 2.

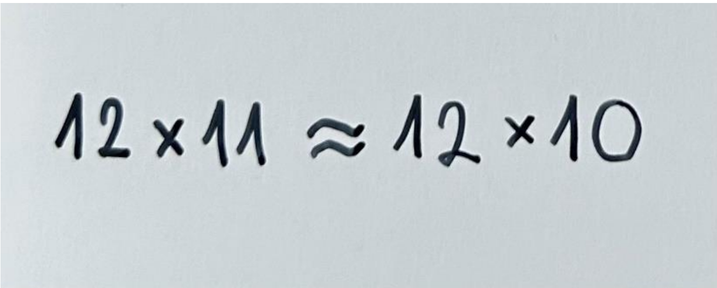


U drugome zadatku, gdje se množi 14×22, provodi se isti postupak. Broj 22 rastavlja se u obliku $20 + 2$ te se posebno množi $14 \times 20 = 280$ i $14 \times 2 = 28$. Konačan rezultat, 308, dobiva se zbrajanjem dobivenih rezultata.

Nakon dvaju prikazanih primjera slijede zadatci za vježbu. U prvome zadatku učenici na isti način kao i u primjerima koje su prethodno prošli trebaju izračunati koliko je 12 × 13 i 41 × 12.

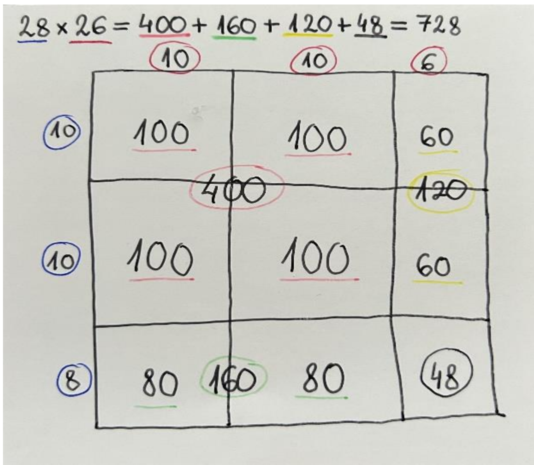
U drugome zadatku prije rješavanja množenja 19 × 12 i 11 × 26 učenici trebaju napraviti procjenu zaokruživanjem faktora na višekratnika dekadske jedinice kao što je napravljeno u primjeru u kojemu se množi 12 × 11.

Slika 3.



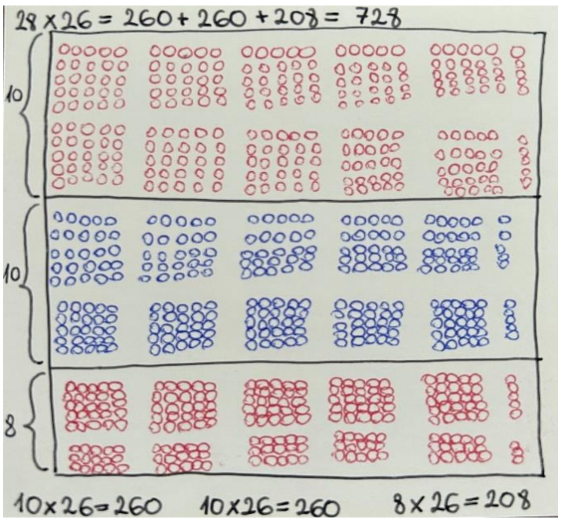
Sljedeća lekcija počinje primjerom u kojem je prikazana slika na kojoj su sjedala podijeljena na tri dijela (28 × 8, 28 × 10 i 28 × 8) te se postavlja pitanje koliko ukupno sjedala ima u dvorani. Zadatak je riješen na više načina. U prvome načinu dvorana je prikazana pomoću pravokutnog modela. Cilj je modela područja da učenici otkriju veličinu svakog pojedinačnog područja pravokutnika te iz toga odrede veličinu cijeloga pravokutnika (Van de Walle i suradnici, 2010). U ovom se primjeru množe brojevi 28 i 26 tako da se rastavljaju na dekadske jedinice pa je broj 28 zapisan kao 10 + 10 + 8, a broj 26 kao 10 + 10 + 6. Stupci i redovi tvore kvadrate i pravokutnike u koje se upisuje umnožak brojeva koji se zapisuje iznad stupaca (10, 10 i 6) i ispred redova (10, 10 i 8). Tako se dobiva 10 × 10 (četiri takva kvadrata), 8 × 10 (dva takva pravokutnika), 10 × 6 (dva takva pravokutnika) i 8 × 6. Na kraju valja zbrojiti dobivene brojeve (400, 160, 120 i 48) kako bi se dobio konačan rezultat (728).

Slika 4.



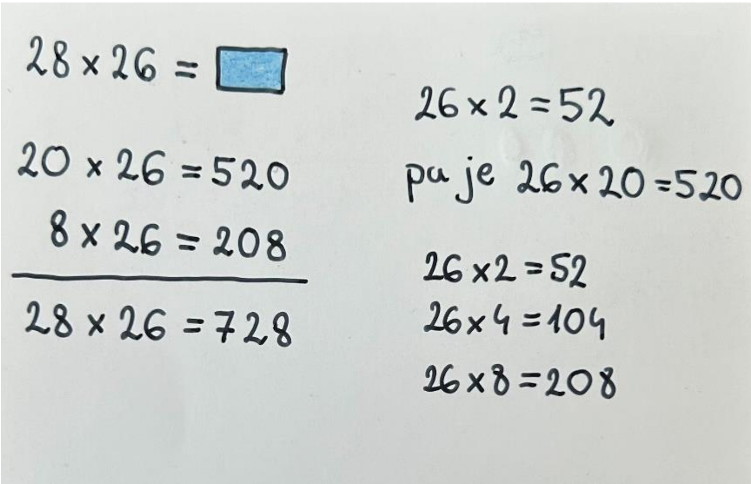
U drugome načinu zadatak se grafički prikazuje pomoću točaka koje predstavljaju sjedala, organiziranih u retke i stupce. U zadatku je poznato da postoji 28 redova te da se svaki red sastoji od 26 sjedala. Redci i stupci su dodatno organizirani u skupine po 5 te je broj redaka, 28, rastavljen u obliku 10 + 10 + 8 te je taj rastav naznačen i na slici dodatnim grupiranjem redaka. U prikazu su vidljiva tri dijela. Prvi dio obuhvaća 10 redova po 26 točaka, drugi je dio identičan prvome, a treći dio sadrži 8 redova po 26 točaka. Zaključuje se da je rezultat množenja brojeva 28 i 26 zbroj umnožaka 10 × 26 = 260, 1 × 26 = 260 i 8 × 26 = 208. Pažnja učenika treba biti usmjerena na to da ne broje svaku točku (sjedalo) posebno, već da zadatak mogu riješiti tako da broje samo točke (sjedala) u jednome redu i koliko je takvih redova (Rickard, 2013).

Slika 5.



U trećem načinu broj 28 rastavlja se u obliku 20 + 8 pa se posebno množi 20 × 26 i 8 × 26. Krajnji rezultat dobiva se zbrajanjem tih dvaju umnožaka. Osim toga, učenicima se usmjerava pažnja na određene pravilnosti. Broj 26 pomnožen s 2 daje 52, stoga se može zaključiti da je 26 × 20 jednako 520. Nadalje, 26 × 2 je 52, 26 × 4 je 104 (duplo od 52), što znači da je 26 × 8 jednako 208 (dvostruko od 104).

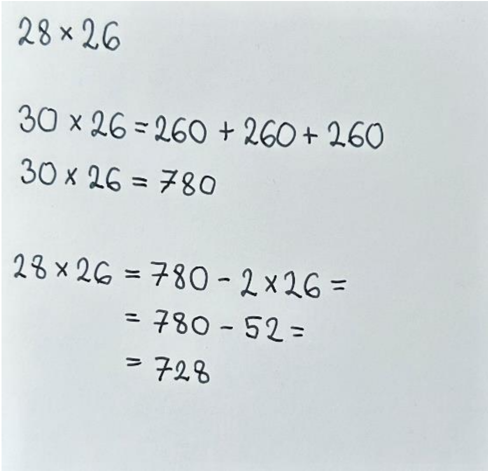
Slika 6.



U četvrtome načinu prikazano je pisano množenje 28 × 26 (korak po korak). U postupku pisanoga množenja dvoznamenkastoga broja dvoznamenkastim brojem prvo se množi prvi broj (28) brojem J drugoga broja (6). Nakon množenja prvoga broja (28) brojem J drugoga broja (6) množi se prvi broj brojem D drugog broja (2). Učenici trebaju razumjeti da je prvi djelomični rezultat (168) umnožak brojeva 28 i 6, a drugi djelomični rezultat (56) umnožak brojeva 28 i 20. Poticanjem na donošenje zaključka zašto se 56 pomiče za jedno mjesto ulijevo kod pisanoga množenja želi se postići razumijevanje da je 56 zapravo 560 te da je nula izostavljena.

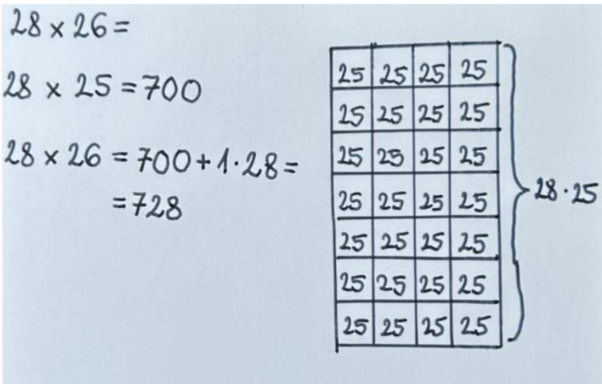
U petom se načinu prikazuje metoda kojom djevojčica rješava množenje dvaju dvoznamenkastih brojeva (28 × 26). Od učenika se očekuje da dovrše metodu koju je djevojčica započela. U prvome koraku djevojčica je broj 30 rastavila na 10 + 10 + 10 te pomnožila brojem 26 i dobila 260 + 260 + 260 što ukupno iznosi 780. S obzirom na to da se u zadatku traži 28 × 26, a u prvom je koraku djevojčica izračunala da 30 × 26 iznosi 780, može se zaključiti da je djevojčica broj 28 zaokružila na veću deseticu (30) kako bi lakše riješila zadatak. Od 28 do 30 razlika je 2, što znači da od izračunatih 30 × 26 (780) treba oduzeti 2 × 26 (52) kako bi se dobilo točno rješenje postupka 28 × 26 (728).

Slika 7.



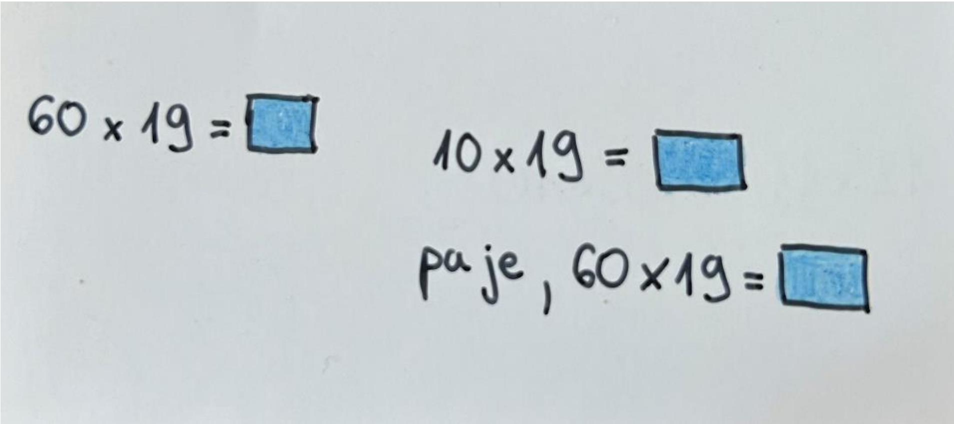
U šestome načinu prikazana je metoda kojom dječak želi izračunati koliko je 28 ×· 26. Dječak je u prvome koraku izračunao koliko je 28 × 25 (700) i to prikazao slikovnim prikazom. Nacrtao je 28 kocaka na kojima piše broj 25 tako da ih je rasporedio u sedam redova po četiri kocke. Kako je 4 × 25 = 100, to znači da jedan red iznosi 100, a s obzirom na to da postoji 7 takvih redova, kao rezultat dobiva se 700. Zadatak traži rješenje operacije 28 × 26, a u prvom je koraku dječak izračunao da 28 × 25 iznosi 700, stoga se može zaključiti da je dječak umjesto broja 26 koristio broj 25 kako bi lakše riješio zadatak. Od 25 do 26 razlika je 1, što znači da izračunatom umnošku 28 × 25 (700) treba pridodati 1 × 28 (28) kako bi se dobio rezultat 28 × 26 (728).

Slika 8.



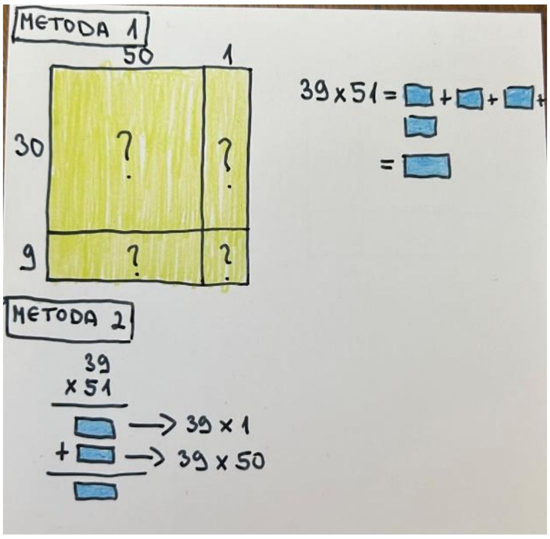
Nakon što je zadatak riješen na više načina slijede zadatci za vježbu. U prvome zadatku treba pomnožiti dvoznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojem te dovršiti započetu tvrdnju.

Slika 9.



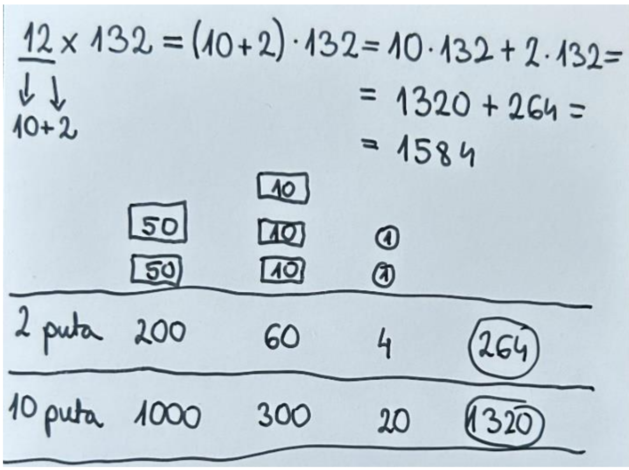
U drugome zadatku učenici trebaju izračunati koliko je 39 × 51 koristeći jednu od zadanih metoda.

Slika 10.



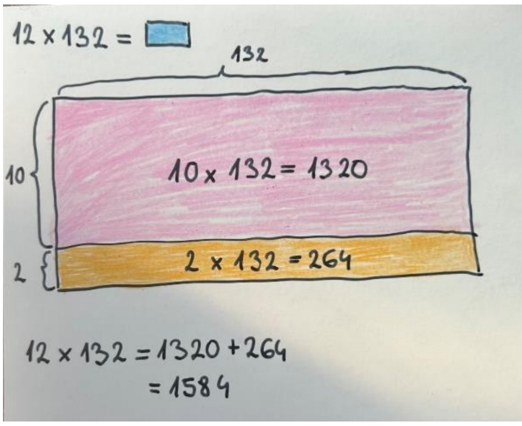
Nakon množenja dvoznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem slijedi cjelina *Množenje troznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem*. Cjelina je podijeljena u dvije lekcije, pri čemu se u prvoj lekciji ne pojavljuju prijelazi u višu dekadsku jedinicu, a u drugoj da. Prva lekcija započinje zadatkom u kojem treba izračunati koliko sat koji košta 132 funte iznosi dolara. Poznato je da je vrijednost 1 funte oko 12 dolara. Zadatak je potrebno riješiti tako da se 132 pomnoži s 12, što znači da se provodi množenje troznamenkastog broja dvoznamenkastim brojem. U prvome načinu zadatak je prikazan uz pomoć novca. U zadatku se želi izračunati koliko je 132 × 12 ili 12 × 132, a kako bi se to lakše izvelo, broj 12 zapisan je u obliku 10 + 2, odnosno rastavljen na zbroj desetica i jedinica. Novčanicama je prikazan broj 132 – postoje dvije novčanice od 50, tri novčanice od 10 i 2 kovanice od 1. U prvome se redu računa koji se rezultat dobiva ako se svaka od novčanica pomnoži 2 puta, a u drugom se redu računa koliko se dobije ako se svaka od novčanica pomnoži 10 puta. U prvome koraku od dviju se novčanica po 50 dobiva 200, od triju novčanica od 10 dobiva se 60, a od dviju kovanica od 1 dobiva se 4. Sveukupno se u prvome koraku dobiva 200 + 60 + 4 = 264. U drugome se koraku od dviju novčanica po 50 dobiva 1000, od triju novčanica po 10 dobiva se 300, a od dviju kovanica po 1 dobiva se 20. Sveukupno se u drugome koraku dobiva 1000 + 300 + 20 = 1320. Kako bi se došlo do konačnoga rezultata (12 · 132), potrebno je zbrojiti dva dobivena rezultata (1320 + 264 = 1584).

Slika 11.



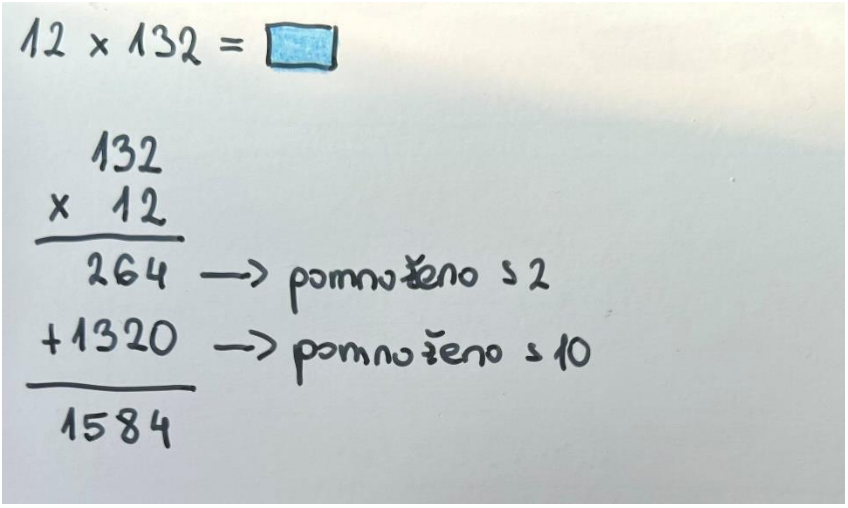
U drugom je načinu broj 12 rastavljen u obliku 10 + 2 kao i u prethodnom primjeru, samo je sve prikazano u obliku pravokutnika.

Slika 12.



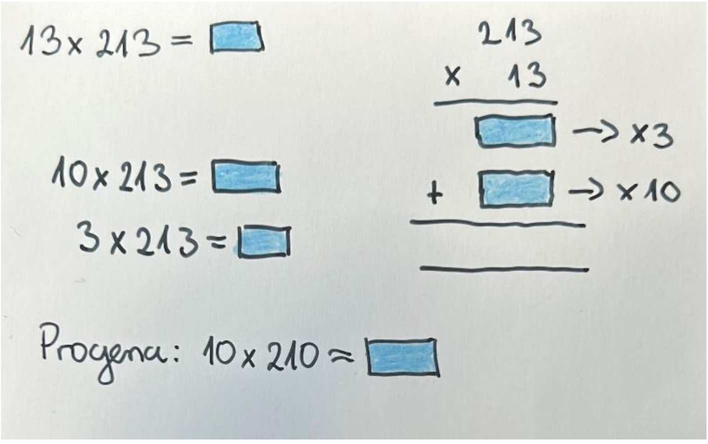
U trećem je načinu prikazano pisano množenje 12 × 132, odnosno 132 × 12. Prvo je broj 132 pomnožen brojem J drugoga broja, a onda brojem D.

Slika 13.



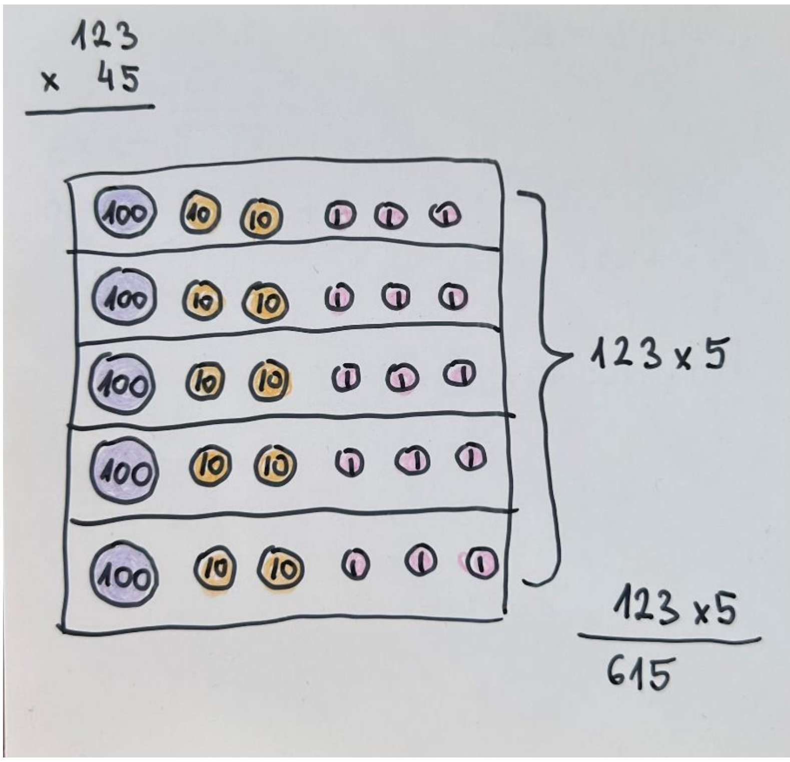
Na kraju lekcije nalaze se dva zadatka za vježbu. U prvom je zadatku potrebno izračunati koliko je 13 × 213, odnosno 213 × 13, a traži se i da učenici naprave procjenu kako bi približno odredili umnožak.

Slika 14.

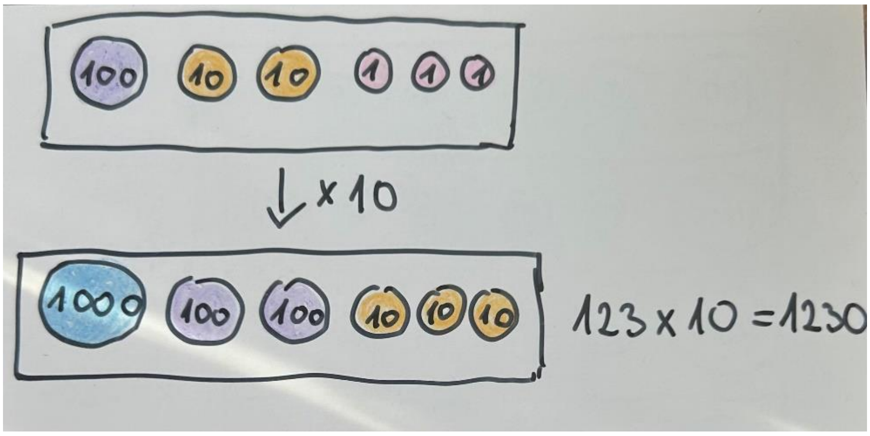


Druga lekcija počinje zadatkom u kojem od brojeva 1, 2, 3, 4 i 5 treba složiti dva broja te odrediti njihov umnožak. U prvome načinu sastavljeni su brojevi 123 i 45. Uz pomoć žetona s dekadskim jedinicama prvo je prikazano množenje 123 × 5, onda 123 × 10, a onda 123 × 40. Nakon toga je pisano pomnoženo 123 × 45.

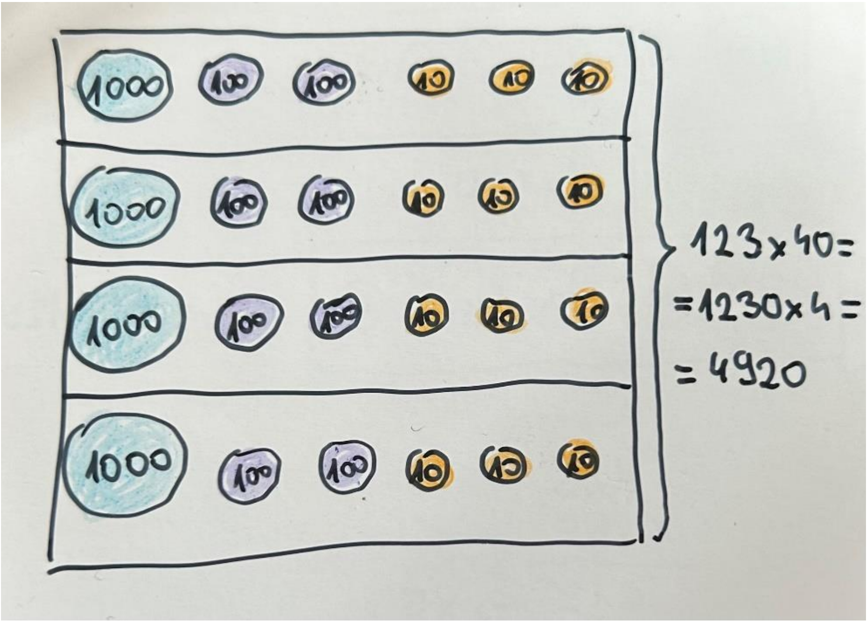
Slika 15.



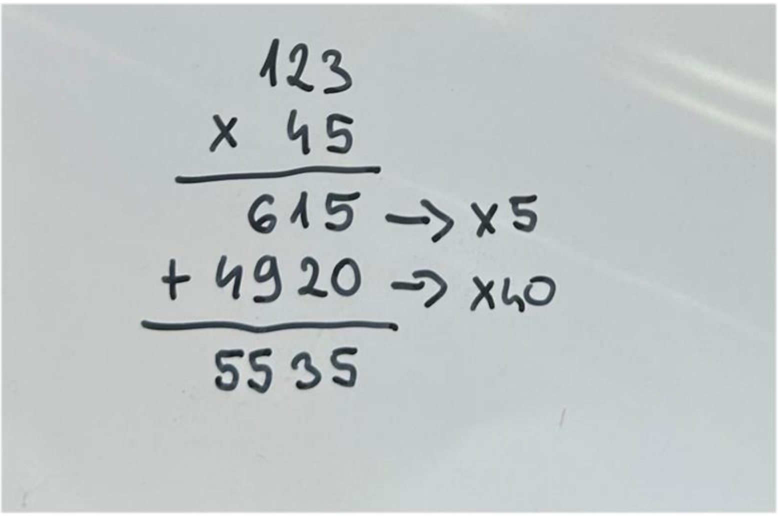
Slika 16.



Slika 17.

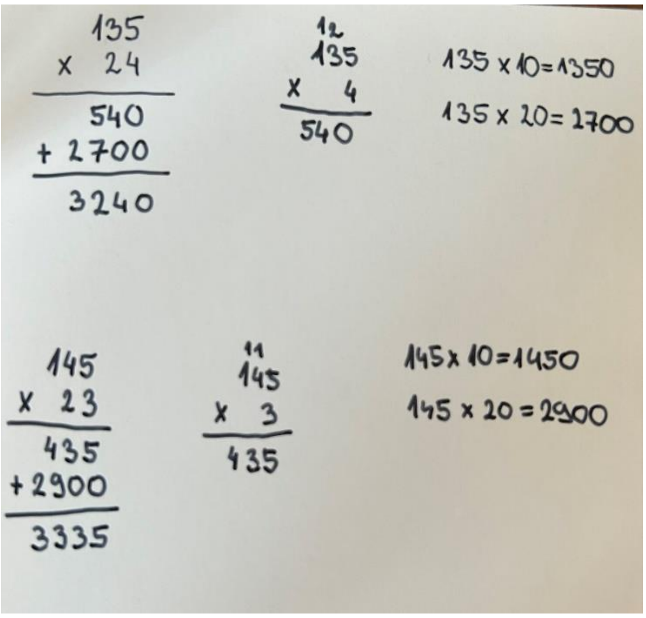


Slika 18.



U drugome su načinu sastavljeni brojevi 135 i 24 te 145 i 23 te je potrebno odrediti koji faktori daju manji umnožak. Kod množenja 135 × 24 135 i 4 je pisano pomnoženo, dok je za 135 × 20 zaključeno da iznosi 2700 jer je 135 × 10 jednako 1350. Na isti je način dobiven rezultat za množenje 145 ×23.

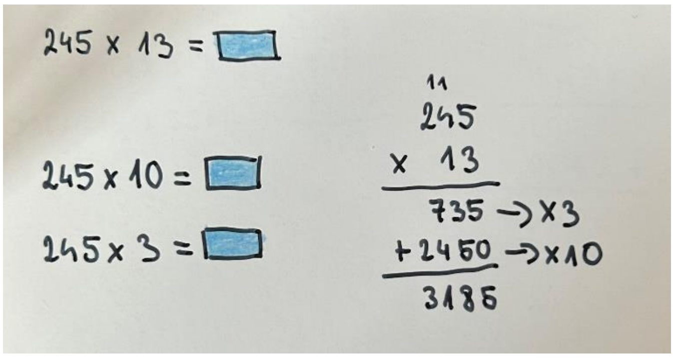
Slika 19.



Zaključeno je da 135 × 24 daje manji umnožak od 145 × 23.

U trećem načinu sastavljeni su brojevi 245 i 13. Broj 13 rastavlja se na 10 + 3 te se svaki broj posebno množi s 135.

Slika 20.



Prije zadataka za vježbu učenici igraju igru u paru u kojoj od brojeva 1, 2, 3, 4 i 5 trebaju sastaviti jedan troznamenkasti i jedan dvoznamenkasti broj koje potom trebaju pomnožiti. U prvome primjeru trebaju sastaviti brojeve tako da dobiju najveći mogući umnožak. U drugome primjeru trebaju sastaviti brojeve tako da dobiju jednake umnoške. U trećem primjeru trebaju dobiti različite umnoške. U četvrtome primjeru trebaju dobiti umnožak koji ima 0 na mjestu jedinica. Na kraju trebaju usporediti dobivene rezultate s drugim parovima.

Zadatak za vježbu je zadatak riječima u kojem treba izračunati koliko poklon košta u krunama ako je poznato da košta 459 funti, a funta iznosi 13 kruna.

5.5. Zaključak istraživanja

Nakon analize hrvatskog, singapurskog i engleskog udžbenika te japanskog priručnika, može se zaključiti da navedeni izvori sadržajima prate kurikulume i njihove ishode vezane za množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem.

Analizom hrvatskog matematičkog udžbenika *Otkrivamo matematiku 4* može se primijetiti da:

- poučavanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem počinje množenjem višekratnikom dekadske jedinice
- se prilikom poučavanja množenja višekratnikom dekadske jedinice koriste tri metode (procjena, rastavljanje višekratnika dekadske jedinice – primjena asocijativnog svojstva, pisano množenje)
- se prilikom objašnjavanja množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem koriste tri metode (procjena, množenje zbroja brojem te pisano množenje)
- se učenike potiče da uoče kako množenje zbroja brojem i pisano množenje dolaze do rješenja istim načinom, ali se drugačije zapisuju
- osim zadataka u kojima učenici trebaju doći do rješenja postoje i zadatci u kojima učenici trebaju ispraviti pogreške te objasniti već napisane metode
- se učenike uči da ne moraju pisati 0 u prvome umnošku
- se u zadatcima primjenjuju svojstva množenja (distributivnost, komutativnost, asocijativnost).

Analiza singapurskog matematičkog udžbenika *My pals are here* pokazuje da:

- poučavanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem počinje množenjem višekratnikom dekadske jedinice

- se prilikom poučavanja množenja višekratnikom dekadske jedinice koriste tri metode (rastavljanje višekratnika dekadske jedinice – primjena asocijativnog svojstva – prvo se množi s 10 pa drugim brojem, rastavljanje višekratnika dekadske jedinice – primjena asocijativnog svojstva – prvo se množi s drugim brojem pa 10, pisano množenje)

- se kroz lekcije koriste prikazi pomoću žetona s dekadskim jedinicama u kojima se zorno može vidjeti kako se može primijeniti distributivnost množenja prema zbrajanju - odabir malih faktora omogućava takav prikaz

- se na kraju zadatka provjerava je li zadatak razuman

- su navedeni postepeni koraci za pisano množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem uz pomoć algoritama

- se u zadatcima primjenjuju svojstva množenja (distributivnost, komutativnost, asocijativnost).

Rezultati analize japanskog matematičkog priručnika *Sansu Math: Teachers guide 3B.* ukazuju na to da:

- poučavanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem počinje množenjem višekratnikom dekadske jedinice

- velika se važnost pridaje učeničkim idejama

- se kod učenja novih sadržaja učenike potiče da ga svedu na prethodno naučeno gradivo i riješe na taj način

- se koriste različite metode kako bi se prikazali određeni problemi i približili učenicima

- prikaz pomoću kartica s dekadskim jedinicama zorno prikazuje primjenu svojstva distributivnosti - odabir malih faktora omogućuje takav prikaz

- prikaz modela skaliranja pomoću brojevnog pravca zorno prikazuje primjenu svojstva distributivnosti - odabir malih faktora omogućuje takav prikaz

- prikaz pomoću modela pravokutnika zorno prikazuje primjenu svojstva distributivnosti – odabir malih faktora omogućuje takav prikaz

- učenici uče množiti dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve dvoznamenkastim brojem uz pomoć algoritama

- se u zadatcima primjenjuju svojstva množenja (distributivnost, komutativnost, asocijativnost).

Analiza engleskog matematičkog udžbenika *Maths – No problem!* nudi zaključke:

- poučavanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem počinje množenjem višekratnikom dekadske jedinice

- zadatak se postepeno rješava na više načina kroz cijelu lekciju (npr. pravokutni prikaz, prikaz pomoću sjedala, algoritmi)

se kroz lekcije koriste prikazi pomoću žetona s dekadskim jedinicama u kojima se zorno može vidjeti kako se može primijeniti distributivnost množenja prema zbrajanju - odabir malih faktora omogućava takav prikaz

- prikaz pomoću modela pravokutnika zorno prikazuje primjenu svojstva distributivnosti – odabir malih faktora omogućuje takav prikaz

- nakon što je glavni primjer riješen slijedi nekoliko zadataka za vježbu

- u zadatcima se primjenjuju svojstva množenja (distributivnost, komutativnost, asocijativnost).

Analizom se može primijetiti da svi navedeni udžbenici poučavanje množenja višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem započinju množenjem višekratnikom dekadske jedinice. Ako želimo vidjeti kako se jedan zadatak rješava pomoću više različitih metoda možemo pogledati engleski i japanski udžbenik dok u hrvatskom i singapurskom udžbeniku možemo vidjeti više različitih zadataka koji se rješavaju prema prethodno priloženom primjeru. U engleskom i singapurskom udžbeniku je korišten prikaz pomoću žetona s dekadskim jedinicama u kojem se zorno može vidjeti kako se može primijeniti distributivnost množenja prema zbrajanju. U japanskom udžbeniku je za to korišten prikaz pomoću kartica s dekadskim jedinicama. Uz te prikaze, u hrvatskom, japanskom i engleskom udžbeniku, korišten je prikaz pomoću modela pravokutnika koji također zorno prikazuje primjenu svojstva distributivnosti. Svi ti prikazi mogući su zbog odabira malih faktora. Osim spomenutog svojstva distributivnosti, svi udžbenici u zadatcima primjenjuju i ostala svojstva množenja. Svi udžbenici učenike potiču na procjenu rezultata koristeći zaokruživanje kako bi stekli dojam koliko će biti rješenje.

ZAKLJUČAK

Ovim se radom želi pomoći učiteljima da bolje razumiju množenje i metodičke pristupe koji se koriste kako bi se objasnilo množenje višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem. Prikazani su pristupi u hrvatskim i stranim udžbenicima i priručnicima. Nakon analize može se zaključiti da navedeni izvori prate kurikulume i njihove ishode te da se udžbeničkim sadržajima nastoje ostvariti ciljevi matematike. Također, rad ostavlja prostor za daljnja istraživanja i dopunjavanje različitim metodičkim pristupima iz drugih matematičkih udžbenika i priručnika koji nisu korišteni za pisanje ovoga diplomskog rada.

LITERATURA

Ban Har, Y. (2016). *Maths – No problem!*. Tunbridge Wells: Dowding House & Horses Passage.

Burns, M. (2007). *About Teaching Mathematics: AK - 8 - Resource.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Concrete Representational Abstract (CRA). Mathematics Hub. https://www.mathematicshub.edu.au/plan-teach-and-assess/teaching/teaching-strategies/concrete-representational-abstract-cra/ (posjećeno 7.9.2023.)

Ćosić, I. (2018). Lav Vigotski. Zagrebačko psihološko društvo. LAV VIGOTSKI – Zagrebačko psihološko društvo (zgpd.hr)

Gardner, H., Kornhaber, M. i Wake, W. (1999). *Inteligencija – različita gledišta.* Jastrebarsko: Naklada Slap.

Glasnović Gracin, D. (2014). Modeli aritmetike za razrednu nastavu. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, str. 12-21.

Glasnović Gracin, D., Žokalj, G. i Soucie, T. (2023). *Otkrivamo matematiku 4: radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole.* Zagreb: Alfa.

Kennedy, L. M., Tipps, S. i Johnson, A. (2008). *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Belmont: Thomson Higher Education.

Kheong, F.H., Soon, G.K., & Ramakrishnan, C. (2016). *My Pals are Here Maths 4A*. MC Education

Kilpatrick, J., Swafford, J., i Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Matematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Leksikografski zavod Miroslav Krleža [LZMK]. (2021). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Pristupljeno 4. kolovoza 2023.: asocijativnost | Hrvatska enciklopedija

Leksikografski zavod Miroslav Krleža [LZMK]. (2021). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Pristupljeno 4. kolovoza 2023.: distributivnost | Hrvatska enciklopedija

Leksikografski zavod Miroslav Krleža [LZMK]. (2021). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Pristupljeno 4. kolovoza 2023.: komutativnost | Hrvatska enciklopedija

Leksikografski zavod Miroslav Krleža [LZMK]. (2021). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Pristupljeno 4. kolovoza 2023.: matematika | Hrvatska enciklopedija

Markovac, J. (1990). *Metodika početne nastave matematike.* Zagreb: Školska knjiga.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO]. (2019a). *Odluka o donošenju nastavnog plana za osnovnu školu*. Pristupljeno 21. kolovoza 2023.: Odluka o donošenju nastavnog plana za osnovnu školu (nn.hr)

Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO]. (2019b). *Kurikulum za nastavni predmet matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj.* Pristupljeno 4. kolovoza 2023.: Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr)

Rickard, C. (2013). *Essential Primary Mathematics.* New York: Open University Press.

Tokyo Shoseki Mathematics Textbook Editoral Committee. (2015). *Sansu Math: Teachers guide 3B.* Oregon: Koyo Publishing.

Twomey Fosnot, C. i Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. i Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Matematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

IZJAVA O IZVORNOSTI DIPLOMSKOG RADA

Ja, Anđela Topić, izjavljujem da sam samostalno izradila svoj diplomski rad pod naslovom *Metodički pristup množenju višeznamenkastih brojeva dvoznamenkastim brojem* uz konzultacije mentora doc. dr. sc. Gorana Trupčevića te gore navedene literature.

____

(vlastoručni potpis studenta)