

# Kocka i kvadrat kao dio projektne nastave matematike

---

**Tkalec, Veronika**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:470021>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-19**

*Repository / Repozitorij:*

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
UČITELJSKI FAKULTET  
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

**VERONIKA TKALEC**

**DIPLOMSKI RAD**

**KOCKA I KVADRAT KAO DIO  
PROJEKTNE NASTAVE MATEMATIKE**

**Zagreb, studeni  
2015.**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
UČITELJSKI FAKULTET  
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE  
(Čakovec)**

**PREDMET: Metodika matematike**

**DIPLOMSKI RAD**

**Ime i prezime pristupnika: Veronika Tkalec**

**TEMA DIPLOMSKOG RADA: Kocka i kvadrat kao dio projektne nastave  
matematike**

**MENTOR: doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin**

**Zagreb, studeni 2015.**

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	2
SAŽETAK .....	4
SUMMARY .....	5
1. UVOD .....	6
2. GEOMETRIJA I POUČAVANJE GEOMETRIJE .....	8
2.1. Geometrija .....	8
2.2. Geometrija u nastavi.....	10
2.3. Zastupljenost geometrije u <i>Nastavnom planu i programu za osnovnu školu.</i> ..	12
2.4. Zastupljenost geometrije u <i>Nacionalnom okvirnom kurikulumu za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje</i> .....	17
3. RAZUMIJEVANJE GEOMETRIJSKIH POJMOVA I RAZVITAK GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA.....	20
3.1. Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja .....	20
3.2. Vizualne vještine i prostorni zor .....	25
3.3. Primjeri učeničkih aktivnosti namijenjenih razvoju geometrijskog mišljenja i prostornog zora.....	26
4. USVAJANJE GEOMETRIJSKIH POJMOVA KOCKE I KVADRATA U NIŽIM RAZREDIMA OSNOVNE ŠKOLE.....	32
4.1. Geometrijski pojam kocke i kvadrata u <i>Nastavnom planu i programu za osnovnu školu i Nacionalnom okvirnom kurikulumu</i> .....	32
4.2. Usvajanje pojmova kocka i kvadrat .....	35
4.3. Usvajanje pojmova opseg i površina kvadrata te obujam kocke.....	37
4.4. Primjena analogije u razrednoj nastavi .....	39
4.5. Primjena <i>geoploče</i> u nastavi matematike .....	41
5. PROJEKTNASTAVA MATEMATIKE.....	44
5.1. Nastava matematike usmjerena na učenika.....	44
5.2. Projektna nastava matematike .....	47
5.3. Provedba projekata na Učiteljskom fakultetu .....	54
6. PROVEDBA PROJEKTA U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE .....	55
6.1. Prijedlog projekta na temu <i>Kocka i kvadrat</i> .....	55
6.2. Provedba projekta <i>Razlikujmo kocku i kvadrat!</i> .....	65
6.3. Osobni osvrt na provedbu projekta .....	66

7. ZAKLJUČAK .....	68
LITERATURA.....	69
PRILOZI .....	73
ŽIVOTOPIS .....	75
Izjava o samostalnoj izradi diplomskog rada .....	76

## SAŽETAK

Ovaj rad govori o nastavi usmjerenoj na učenika i primjeni projekta na temu geometrije u razrednoj nastavi matematike.

Nakon kratkog pregleda razvoja geometrije kao znanosti i razvoja geometrije kao nastavnog predmeta u školi, rad analizira njezinu zastupljenost u *Nastavnom planu i programu* i *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*. Za uvid u strukturu i načine učeničkih razumijevanja i poimanja geometrije i njezinih pojmova opisuje van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja. Prema van Hieleovoj teoriji učenici primjerenim aktivnostima razvijaju svoje geometrijsko mišljenje i napreduju po razinama. Stoga, osim prikaza teorije, rad donosi aktivnosti namijenjene razvoju geometrijskog mišljenja koje se mogu primijeniti u nastavi. Nakon toga, rad se detaljnije osvrće na pojmove kocka i kvadrat u nastavi geometrije u prva četiri razreda osnovne škole. Donosi smjernice za usvajanje tih pojmova te pojmova opseg, površina i obujam.

Središnji dio rada odnosi se na nastavu matematike usmjerenu na učenika i projektnu nastavu kao oblik nastave usmjerene na učenika. Nastava usmjerena na učenika predstavlja zajednički rad nastavnika i učenika i podrazumijeva primjenu različitih aktivnosti. Rad prikazuje njezine karakteristike u odnosu na tradicionalnu nastavu matematike. Potom opisuje pojam projektne nastave. Projektna nastava je rad grupe učenika na složenijem problemu. U nastavku prikazuje faze provedbe projekta u nastavi i daje opće smjernice za njegovu provedbu. Potom rad donosi prijedlog projekta na temu kocke i kvadrata u razrednoj nastavi matematike i opisuje njegovu provedbu u jednom razredu.

**KLJUČNE RIJEČI:** nastava geometrije, geometrijsko mišljenje, van Hieleova teorija, nastava usmjerena na učenika, projektna nastava

## SUMMARY

This paper is about student oriented teaching and the application of a geometry themed project in primary education of mathematics.

After a brief overview of the development of geometry as a science and as a school subject, this paper analyses its representation in *The Curriculum* and in the *National curriculum for Croatian compulsory education*. Van Hiele's theory of geometrical thinking is used to give an insight into the structure and the ways of students' understanding and comprehending geometry and its concepts. According to the Van Hiele's theory, students develop their geometrical thinking and progressing through various stages by applied activities. Therefore, besides exhibiting the theory, this paper shows us different activities which are intended for developing geometrical thinking and which can be applied in class. Afterwards, the paper thoroughly reviews the cube and the square concept in geometry teaching, in the first four grades of elementary school. It gives guidelines for comprehending these concepts, same as circumference, surface and volume concepts.

The central part of this paper revolves around student oriented mathematics teaching and project teaching as a form of student oriented teaching. Student oriented teaching represents a mutual student and teacher effort and implies the application of various activities. Paper exhibits its characteristics in relation to the traditional mathematics teaching. Then it describes the concept of project teaching. Project teaching is when a group of students work together in order to solve a more complicated problem. In its continuation, the paper gives a suggestion of a cube and square themed project in the primary teaching of mathematics and describes its implementation in one class.

**KEYWORDS:** geometry teaching, geometrical thinking, Van Hiele's theory, student oriented teaching, project teaching

## 1. UVOD

U različitim područjima ljudskog života često se spominje provedba određenih projekata. Pod pojmom projekt podrazumijeva se zaokružen, cjelovit i složen pothvat koji zahtijeva koordinirane napore nekoliko ili većeg broja ljudi (Čižmešija, 2006). Složenost pothvata ovisi o području u kojem se projekt provodi i uzrastu njegovih sudionika. Naravno da je složenost pothvata moguće prilagoditi kako bi se projekt mogao provoditi u području obrazovanja, točnije u redovnoj nastavi, kako bi ga mogli provoditi učenici osnovne škole. Provedba projekata se polako uvodi u hrvatske škole, a još sporije se uvodi u samu nastavu matematike. Razlog tome je promjena nastavnog procesa koju projekt uvjetuje, jer on se može ostvariti samo u nastavi koja je usmjerena na učenika uz nastavnika koji postaje organizator i voditelj.

Kocka i kvadrat su pojmovi koji se često mijenjaju u društvenom životu. Jedan od primjera su *kockice* na dresovima hrvatske nogometne reprezentacije. U vrijeme prvenstava u nogometu mediji obiluju takvom informacijom i ona postaje društveno prihvaćena iako matematički nije točna (Opačić, 2009). Kao dokaz, hrvatski jezični portal pod pojmom kocka kao treće objašnjenje navodi „*razg. kvadrat*“, a u zagradi primjer *teka s kockama*.<sup>1</sup> Pod takvim utjecajem učenici (bez razmišljanja) prihvaćaju pridjev *kockasto* za nešto što je *kvadratičasto*. Kako učenici oba pojma usvajaju od 1. razreda, a u 4. proširuju svoje znanje o njima, pogodni su kao tema za provođenje projekta u razrednoj nastavi matematike.

Prvo poglavlje ovog rada prikazuje kratak pregled razvoja geometrije kao znanosti i geometrije kao nastavnog predmeta. Također prikazuje zastupljenost geometrije u *Nastavnom planu i programu* i *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*.

Drugo poglavlje opisuje van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja po razinama te objašnjava pojam *prostorni zor*. Potom donosi aktivnosti namijenjene razvoju geometrijskog mišljenja i prostornog zora.

---

<sup>1</sup> Dostupno na: <http://hjp.novi-liber.hr/index.php?show=search> (preuzeto 15. 11. 2015)



Treće poglavlje izvaja nastavni sadržaj iz *Nastavnog plana i programa* te *Nacionalnog okvirnog kurikuluma* u okviru kojeg učenici usvajaju pojmove kocka, kvadrat i njihova obilježja te ih pobliže objašnjava i donosi smjernice za njihovo usvajanje u nastavnom procesu.

Četvrto poglavlje objašnjava pojam *nastava usmjerena na učenika* i opisuje njezine karakteristike u odnosu na tradicionalnu nastavu. Potom opisuje pojam *projektne nastava* kao oblik nastave usmjerene na učenika, opisuje faze provedbe projektne nastave i donosi opće smjernice za provedbu projekta.

Peto poglavlje iznosi prijedlog projekta na temu kocke i kvadrata u razrednoj nastavi matematike. Potom opisuje njegovu provedbu u jednom razredu. Na kraju donosi osobni osvrt na provedbu projekta.

## 2. GEOMETRIJA I POUČAVANJE GEOMETRIJE

### 2.1. Geometrija

Geometrija je jedna od najstarijih disciplina. Već je prapovijesni čovjek imao određena geometrijska znanja. Arheološkim istraživanjima pronađene su okrugle posude, noževi i alati u obliku trokuta i romba, a građevine su u prapovijesno doba bile u obliku stošca, valjka ili paralelopipeda. Geometrijski se oblici mogu još pronaći na crtežima koji su očuvani u pećinama te u ornamentima na različitim posudama iz neolitika. Ornamenti, koji se ističu jednakošću, simetrijom i sličnošću likova, pokazuju da je njihov autor veoma dobro poznao geometrijske oblike (Dadić, 1992).

Čovjek je sva geometrijska (i općenito matematička) znanja stjecao na temelju iskustva u praktičnom radu svog svakidašnjeg života. Osim što je promatrao prirodu i različite oblike u njoj, čovjek je, zbog materijalnih potreba, gradio kuće, izrađivao glineno posuđe, oruđa za rad i druge predmete. Svoj rad je temeljio na empirijskim postupcima, odnosno, pri izrađivanju predmeta se služio različitim načinima i metodama sve dok nije postigao najbolje rješenje. Praktičnim radom je postupno otkrivao geometrijske pojmove koje je shvaćao konkretno (Gleizer, 2003). Tako je u prapovijesno doba prikupljeno određeno geometrijsko znanje koje se u prvim civilizacijama (od oko 2000. godine prije Krista) proširivalo i dopunjavalo. Za prve civilizacije je također karakteristično konkretno shvaćanje pojmova i empirijsko stjecanje znanja. Ako su se promatrali geometrijski likovi, onda su to bili polja ili predmeti koji su imali oblik četverokuta, a ako su se promatrala tijela, onda su to bile žitnice, nasipi, jame, kanali i sl., koji su imali oblik prizme, valjka, piramide, stošca ili krnje piramide i stošca. Likovi i tijela nisu imali opće nazive već konkretne koji su se po potrebi mijenjali. U Babilonu se jednakokrani trokut zvao „glava čavla“, trapez „njuška goveda“, krnja piramida „snop štapića“, segment kruga „korijen nokta“, a duljina i širina su se zvale „lice“ i „bok“ (Dadić, 1992). Najčešći praktični problem koji se rješavao je bilo mjerenje površine zemljišta. Na tu činjenicu upućuje i naziv znanosti. Naziv *geometrija* potječe od grč. γῆ – zemlja i μέτρον – mjera, što bi značilo *mjeriti zemlju* (Gusić, 1995).

Povjesničar Herodot, matematičar Demokrit, filozof Aristotel i drugi starogrčki znanstvenici smatrali su da je, od prvih civilizacija, Egipat ishodište geometrije. Egipćanima je geometrija bila potrebna kao praktična znanost za točno određivanje granica zemljišnih posjeda nakon svake poplave rijeke Nil, potom im je bila potrebna u izgradnji različitih građevina i u ostalim gospodarskim radovima. U sačuvanim papirusima iz starog Egipta nalaze se geometrijski zadatci izračunavanja duljina, površina i obujama (Gleizer, 2003). Kako je već prapovijesni čovjek naučio dobro računati i mjeriti, nije bio problem izračunati površinu zemljišta, odnosno pravokutnika. Jedinična površina bio je kvadrat sa stranicom duljine jednog lakta ili koraka. Osim izračunavanja površine, Egipćani su rješavali i druge matematičke probleme. U *Moskovskom papirusu* (oko 1850. g. pr. Kr.) nalazi se zadatak u kojemu su zadane površina pravokutnika i omjer njegovih različitih stranica, označen kao problem šesti:

„Ako tražite lik od 12 koji ima širinu koja je  $\frac{3}{4}$  dužine, morate podijeliti 1 sa  $\frac{3}{4}$ . Rezultat je  $1\frac{1}{3}$ . Uzmite sada ovaj 12 puta  $1\frac{1}{3}$ , pa je rezultat 16. Sad morate naći broj koji pomnožen sam sa sobom daje 16, pa je rezultat 4 za dužinu, a za širinu  $\frac{3}{4}$  od toga, naime 3.<sup>2</sup>“

U suvremenom rješavanju ovakvog zadatka se polazi od općeg poučka koji tvrdi da je površina pravokutnika jednaka umnošku dviju susjednih stranica. Nejasan je način na koji je u Egiptu dobiven postupak po kojemu je riješen ovaj zadatak jer opća pravila u sačuvanim papirusima nisu zapisana, ali on je bio uzorak po kojemu se rješavao svaki drugi sličan zadatak. Površine i obujmove složenijih likova i tijela Egipćani su svodili na jednostavnije probleme za površine i obujmove. Kako se radilo o konkretnim objektima, izračunavanja su često bila približna (Dadić, 1992).

U staroj Grčkoj je geometrija postala teorijska, apstraktna i egzaktna znanost. *Tales* (7. st. pr. Kr.) je grčki matematičar koji je nadogradio egipatsku matematiku i prešao na apstraktno mišljenje i dokaz, ali nije uspio doći do potpune apstrakcije geometrijskih pojmova. Potpuna apstrakcija se postizala postupno nakon njegova doba. *Pitagora* (6-5 st. pr. Kr.) je već radio s apstraktnim geometrijskim pojmovima i

---

<sup>2</sup> Izvor: Dadić, Ž. (1992). *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Zagreb: Školska knjiga, str. 20.

geometriju promatrao kao apstraktnu logičku znanost. Na izgradnji geometrije i prikupljanju novih činjenica radili su brojni grčki matematičari (Dadić, 1992). *Euklid* (4. st. pr. Kr.) je grčki matematičar koji je sva geometrijska znanja objedinio u djelu *Elementi*. Na pitanje cara Ptolomeja može li se naći kraći i lakši put za izučavanje geometrije od onoga u njegovom djelu, Euklid je odgovorio: „Nema carskog puta u geometriju!“<sup>3</sup> U svom djelu je objedinio radove mnogih prethodnika kao što su Tales, Pitagora, Demokrit, Hipokrat, Arhita, Teetet, Eudokso i drugi. *Elementi* su teorijsko djelo i sve od 19. stoljeća su bili osnovni udžbenik iz geometrije. Sastoje se od 13 knjiga. U prvih šest knjiga Euklid je iznio planimetrijska znanja, a u posljednje tri stereometriju. U njima polazi od definicija geometrijskih pojmova i aksioma (početnih tvrdnji koje se ne dokazuju) te izvodi iz njih logičkom dedukcijom teoreme. Međutim, proučavanja *Elementa* otkrila su mnoge nedostatke. Euklid pojmove nije podijelio na osnovne (one koji se ne definiraju) i izvedene, već je definirao sve geometrijske pojmove. Nadalje, pojedine definicije su nejasne ili logički neispravne. Najveći nedostatak aksioma bila je njihova nepotpunost (Gleizer, 2003).

Arapci su preuzeli grčka znanja iz geometrije i širili ih svojim osvajanjima u procvatu svoje kulture od 9. do 14. st. Europljani su tako upoznali grčku geometriju preko Arapa. Do 16. st. su se uglavnom prevodili i izučavali stari matematički spisi, a od 16. st. Europa doživljava procvat i nastaje moderna matematika i geometrija kao jedna od osnovnih matematičkih disciplina (Glasnović Gracin, 2009).

## **2.2. Geometrija u nastavi**

*Elementi*, koji sadrže elementarnu geometriju, su sve do 19. stoljeća bili osnovni udžbenik iz geometrije i predavanja po njima ostavila su u školama neizbrisiv trag (Gleizer, 2003). Povijesno gledajući, nastavi matematike i geometrije se posvećivalo malo vremena. U srednjem je vijeku školstvo u Hrvatskoj, jednako kao i u cijeloj Europi, bilo ustrojeno po sustavu trivij-kvadrivij. Geometrija i aritmetika poučavale su se kao sastavni dio kvadrivija koji je označavao viši stupanj nastave. Od tih dviju disciplina, aritmetika je bila više zastupljena. U 16. stoljeću, kada je školstvo

---

<sup>3</sup> Izvor: Gleizer, G. I. (2003). Povijest matematike za školu. Zagreb: Školske novine, str. 417.

uglavnom još uvijek bilo ustrojeno po tom sustavu, Dubrovčanin Nikola Gučetić u svom djelu *Upravljanje obitelji* opisuje organizaciju dobrog školstva. U temelj školstva stavlja sustav trivij-kvadrivij, ali dodaje još neke discipline te navodi sadržaj koji treba izučavati u tim disciplinama. Za geometriju navodi da bi to trebale biti „neprekidne veličine i sve vrste likova“. Zaključuje da geometrija i aritmetika upravljaju svim ljudskim djelatnostima i da stoga trebaju biti dobro zastupljene u školskom sustavu. Unatoč tome, u nedostatku sredstava matematika je prva bila ukinuta kao školski predmet (Dadić, 1982).

U 17. stoljeću su osnovane isusovačke gimnazije u Zagrebu, Rijeci, Varaždinu i Dubrovniku. Po isusovačkom programu, u nižim razredima se uopće nije predavala matematika, nego tek u tzv. filozofskim tečajevima. Prema sačuvanim dokumentima, predavalo se više geometrijskog sadržaja po Euklidovim *Elementima*. Nakon što je Marija Terezija 1752. godine odredila uvođenje obveznih predavanja iz aritmetike u šesti razred gimnazije, godine 1760. uvedena su predavanja iz matematike u prva četiri razreda. Ukidanjem isusovačkog reda 1773. godine i prelaskom školstva pod državnu vlast, sadržaj iz matematike se proširivao i osuvremenjivao (Dadić, 1982).

O položaju i ulozi matematike u hrvatskom društvu prvi piše Vatroslav Bertić u članku pod nazivom *Nješto o matematičari* objavljenom 1846. godine u *Danici ilirskoj*. U članku ističe kako je važnost matematike vrlo velika, ali se ona, unatoč tome, shvaća izoliranom i dostupnom samo nekolicini. Smatra da je tome uzrok zahtjevnost i nerazumljivost knjiga iz matematike. Drugi uzrok je u nedostatku škola. U mnogim gimnazijama se matematika nije predavala jer se nije smatrala potrebnom za opće obrazovanje, što je bio glavni problem hrvatskog narodnog preporoda još mnogo godina (Dadić, 1982).

U suvremeno doba, matematika je u osnovnoj školi obavezan predmet, a geometrija sastavni dio matematike. Neki nastavnici nisu sigurni u kojoj mjeri postoji potreba i važnost za usvajanjem geometrijskih sadržaja, ali suvremeni matematički kurikuli ističu njezinu važnost i daju osnovne smjernice za provođenje nastave geometrije. *Nastavni plan i program* (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa [MZOS], 2006) definira geometrijske sadržaje, a *Nacionalni okvirni kurikulum* (MZOS, 2010) definira razine usvajanja tih sadržaja (Vlasnović i Cindrić, 2014).

### 2.3. Zastupljenost geometrije u *Nastavnom planu i programu za osnovnu školu*

*Nastavni plan i program za osnovnu školu* propisuje odgojno-obrazovni sadržaj nastave matematike zajedno s ciljevima, zadaćama te odgojno-obrazovnim postignućima. Geometrija je, kao područje matematike, sastavni dio nastave matematike. U tablicama (Tablica 1, Tablica 2, Tablica 3, Tablica 4) izdvojene su nastavne teme iz geometrije od 1. do 4. razreda osnovne škole, ključni pojmovi i obrazovna postignuća koja učenici moraju savladati u redovnoj nastavi (MZOS, 2006).

Tablica 1: Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 1. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu* (MZOS, 2006).

<b>NASTAVNA TEMA</b>	<b>KLJUČNI POJMOVI</b>	<b>OBRAZOVNA POSTIGNUĆA</b>
<b>Tijela u prostoru</b>	kugla, valjak, kvadar, kocka, piramida	prepoznati i imenovati kuglu, valjak, kocku, kvadar i piramidu među predmetima iz neposredne okoline, na modelima geometrijskih tijela i na ilustracijama
<b>Ravne i zakrivljene plohe</b>	ravna ploha, zakrivljena ploha	razlikovati ravne plohe od zakrivljenih ploha
<b>Ravne i zakrivljene crte</b>	crta, ravna crta, izlomljena crta, zakrivljena crta	razlikovati ravne, izlomljene i zakrivljene crte; crtati zakrivljene, izlomljene i ravne crte
<b>Točka</b>	sjecište crta, točka	isticati točke kružićem ili križićem; označavati točku velikim tiskanim slovima; spajati ravnom ili zakrivljenom crtom dvije točke
<b>Odnosi među predmetima</b>	veći – manji, unutar – izvan	procijeniti odnose među predmetima
<b>Geometrijski likovi</b>	geometrijski lik, krug, trokut, pravokutnik, kvadrat	prepoznati, imenovati i razlikovati krug, trokut, pravokutnik i kvadrat

Početna nastava geometrije započinje u 1. razredu osnovne škole. U Tablici 1 navedeno je redom prvih šest tema iz nastavnog programa. U 1. razredu se izgrađuju osnovne spoznaje o odnosima u prostoru, formiraju pojmovi geometrijskih tijela (kugla, valjak, kvadar, kocka, piramida) i geometrijskih likova (krug, trokut, pravokutnik, kvadrat) na razini prepoznavanja, formiraju se pojmovi ravnih i zakrivljenih ploha, ravnih i zakrivljenih crta te pojam točke (MZOS, 2006).

Tablica 2: Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 2. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu* (MZOS, 2006).

<b>NASTAVNA TEMA</b>	<b>KLJUČNI POJMOVI</b>	<b>OBRAZOVNA POSTIGNUĆA</b>
<b>Dužina kao spojnica dviju različitih točaka</b>	točka, dužina	nacrtati i imenovati dužinu te označiti krajnje točke; razlikovati točke koje pripadaju ili ne pripadaju dužini
<b>Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta</b>	stranica kvadrata, stranica pravokutnika, stranica trokuta	označiti stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta kao dužine

U 2. razredu obrađuju se samo dvije teme iz geometrije. Formira se pojam dužine kao spojnice dviju različitih točaka i pojam stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta. Pretpostavke za formiranje pojma dužine stvorene su u 1. razredu upoznavanjem crte i točke, a upoznavanjem dužine stvorene su pretpostavke za formiranje pojma stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta (MZOS, 2006).

Tablica 3: Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 3. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu* (MZOS, 2006).

<b>NASTAVNA TEMA</b>	<b>KLJUČNI POJMOVI</b>	<b>OBRAZOVNA POSTIGNUĆA</b>
<b>Ravnina, likovi u ravnini</b>	ravnina, likovi u ravnini	shvaćati ravninu kao neograničenu ravnu plohu i likove kao dijelove ravnine

<b>Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca</b>	pravac, polupravac, dužina	nacrtati i označiti pravac i polupravac; nacrtati dužinu kao dio pravca i istaknuti njezine krajnje točke
<b>Mjerenje dužine</b>	jedinična dužina, mjerenje dužine	upoznati jedinice za mjerenje dužine; izmjeriti zadanu dužinu jediničnom dužinom; prenositi zadane dužine; crtati dužine zadane duljine; preračunavati mjerne jedinice za duljinu
<b>Pravci koji se sijeku i usporedni pravci</b>	pravci koji se sijeku, sjecište, usporedni pravci	crtati pravce koji se sijeku i odrediti im sjecište; crtati usporedne pravce
<b>Okomiti pravci</b>	okomiti pravci	prepoznati okomite pravce; crtati okomite pravce
<b>Krug, kružnica</b>	krug, kružnica, središte, polumjer i promjer	crtati kružnicu šestarom; prenositi dužinu; razlikovati krug i kružnicu
<b>Mjerenje obujma tekućine</b>	obujam tekućine; mjerenje obujma tekućine; mjerne jedinice za obujam tekućine	upoznati jedinice za mjerenje obujma tekućine (litra, decilitar) i preračunavati ih
<b>Mjerenje mase</b>	mjerenje mase, mjerne jedinice za masu	upoznati jedinice za mjerenje mase (gram, dekagram, kilogram) i zapisivati ih; preračunavati jedinice za mjerenje mase

U 3. razredu formira se pojam ravnine, a na znanje o ravnini i likovima u ravnini nadovezuje se formiranje pojmova krug i kružnica. Formiraju se pojmovi pravac i polupravac, a zatim se proširuje znanje o pravcu upoznavanjem usporednih i ukrštenih te okomitih pravaca. Još se formiraju pojmovi mjerenja veličina, točnije mjerenje dužine, mjerenje obujma tekućine i mjerenje mase (MZOS, 2006).



Tablica 4: Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 4. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu* (MZOS, 2006).

<b>NASTAVNA TEMA</b>	<b>KLJUČNI POJMOVI</b>	<b>OBRAZOVNA POSTIGNUĆA</b>
<b>Kut</b>	kut, vrh kuta, krakovi kuta	shvaćati kut kao dio ravnine omeđen polupravcima; crtati, imenovati i označavati vrh i krakove kuta
<b>Pravi kut</b>	pravi kut	crtati i označavati pravi kut
<b>Šiljasti i tupi kutovi</b>	šiljasti i tupi kut	crtati šiljasti i tupi kut; razlikovati pravi, šiljasti i tupi kut
<b>Trokut</b>	trokut, vrhovi, stranice i kutovi trokuta	crtati trokut; istaknuti i označiti vrhove, stranice i kutove trokuta
<b>Vrste trokuta s obzirom na stranice</b>	raznostraničan, jednakokračan i jednakostraničan trokut	uspoređivati duljine stranica trokuta; razlikovati crtati i imenovati trokute s obzirom na duljinu stranica
<b>Pravokutni trokut</b>	pravi kut, pravokutni trokut	prepoznati, imenovati, crtati i pravilno označiti pravokutni trokut
<b>Opseg trokuta</b>	opseg trokuta	razumjeti opseg trokuta kao zbroj duljina njegovih stranica; izračunati opseg trokuta
<b>Pravokutnik i kvadrat</b>	pravokutnik, kvadrat, stranice, vrhovi i kutovi pravokutnika i kvadrata	prepoznati, razlikovati i crtati pravokutnik i kvadrat; označivati stranice, vrhove i kutove pravokutnika i kvadrata
<b>Opseg pravokutnika i kvadrata</b>	opseg pravokutnika i kvadrata	razumjeti i izračunati opseg pravokutnika i kvadrata

<b>Mjerenje površina</b>	jedinični kvadrat, kvadratna mreža, površina	mjeriti površinu prekrivanjem jediničnim kvadratima; služiti se kvadratnom mrežom u određivanju površine
<b>Površina pravokutnika i kvadrata</b>	površina kvadrata i pravokutnika, mjerne jedinice za mjerenje površine	računati površinu kvadrata i pravokutnika; znati mjere za površinu (kvadratni centimetar, kvadratni decimetar, kvadratni metar)
<b>Kvadar i kocka</b>	kvadar, kocka, strane, bridovi i vrhovi	upoznati kvadar i kocku, znati bitna obilježja kvadra i kocke; odrediti njihove strane, bridove i vrhove
<b>Obujam kocke</b>	kocka, obujam kocke, mjere za obujam	mjeriti obujam kocke slaganjem jediničnih kocaka; upoznati jedinice za mjerenje obujma (kubični centimetar i kubični decimetar)

Prema prikazu tema u Tablici 4, u 4. se razredu obrađuje najviše sadržaja iz geometrije. Formira se pojam kuta, a znanje o kutu dalje se proširuje pojmovima pravog, šiljastog i tupog kuta. Znanje o trokutu iz 1. razreda proširuje se upoznavanjem njegovih osnovnih obilježja te se tako formiraju pojmovi raznostraničan, jednakokračan, jednakostraničan i pravokutan trokut. Znanje o pravokutniku i kvadratu iz 1. razreda također se proširuje. Uz pojam trokuta nadovezuje se formiranje pojma opsega, a znanje o opsegu trokuta pretpostavka je za usvajanje znanja o opsegu pravokutnika i kvadrata. Formira se pojam mjerenja površina na koji se nadovezuju pojam površine pravokutnika i kvadrata. Na kraju se proširuje znanje o kvadru i kocki iz 1. razreda upoznavanjem osnovnih obilježja te se formira pojam obujma (MZOS, 2006).

#### **2.4. Zastupljenost geometrije u Nacionalnom okvirnom kurikulumu za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje**

*Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje* (NOK) je temeljni dokument koji određuje sve bitne sastavnice odgojno-obrazovnog sustava od predškolske razine pa do završetka srednjoškolskoga odgoja i obrazovanja (MZOS, 2010). To je „temeljni dokument koji na nacionalnoj razini donosi smjernice i načine unaprjeđivanja odgoja i obrazovanja u hrvatskome društvenom kontekstu radi osiguravanja što kvalitetnijega sustava školstva“ (Matijević i Radovanović, 2011, str. 32).

Temeljno obilježje *Nacionalnog okvirnog kurikulumu* je prelazak na kompetencijski sustav i učenička postignuća. Odgojno-obrazovna područja, od kojih je jedno matematičko područje, izražavaju i određuju temeljne kompetencije učenika u svakom pojedinom području. One su izražene u očekivanim učeničkim postignućima ili odgojno-obrazovnim ishodima koji predstavljaju jasno iskazana očekivana znanja, vještine, sposobnosti i stavove koje učenici trebaju steći i moći pokazati po završetku određenoga programa, odgojno-obrazovnoga ciklusa ili stupnja obrazovanja. *Nacionalni okvirni kurikulum* određuje četiri odgojno-obrazovna ciklusa, pri čemu prva četiri razreda osnovne škole čine prvi odgojno-obrazovni ciklus. U matematičkom području očekivana učenička postignuća su sustavno organizirana u dvije dimenzije – matematičke procese i matematičke koncepte (MZOS, 2010). Matematički procesi opisuju opće matematičke kompetencije, a matematički koncepti definiraju nastavne sadržaje koje učenici trebaju svladati tijekom učenja matematike (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010). Kako matematički procesi opisuju opće matematičke kompetencije, u nastavku slijedi prikaz dimenzije „matematički koncepti“ radi utvrđivanja zastupljenosti geometrije u *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*.

Matematički koncepti su *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* organizirani u šest domena:

1. Brojevi,
2. Algebra i funkcije,
3. Oblik i prostor,

4. Mjerenje,
5. Podatci,
6. Infinitesimalni račun.

Geometrija nije zasebna domena već je sustavno podijeljena u dvije domene: *Oblik i prostor* i *Mjerenje*. U domeni *Oblik i prostor* navedeno je da će učenici na kraju prvog odgojno-obrazovnog ciklusa:

- opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (npr. kvadratna mreža),
- prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove,
- skicirati jednostavne ravninske oblike te ih nacrtati služeći se geometrijskim priborom,
- prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima,
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale,
- prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnomu životu (MZOS, 2010, str.117-118).

U domeni *Mjerenje* navedeno je da će učenici:

- usporediti i procijeniti duljinu, obujam, masu, vrijeme i temperaturu te ih izmjeriti rabeći odgovarajuće mjerne uređaje i kalendar,
- navesti i rabiti standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam (litre), masu, vrijeme, i temperaturu u svakodnevnomu životu,
- računati s novcem (kune i lipe) u svakodnevnomu životu,
- izračunati opseg jednostavnih likova, osobito trokuta, pravokutnika i kvadrata te površinu pravokutnika i kvadrata,
- približno ili točno izmjeriti površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata,
- odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema (MZOS, 2010, str. 118).

Za razliku od *Nastavnog plana i programa* koji opisuje sadržaj koji učenici trebaju usvojiti, *Nacionalni okvirni kurikulum* navodi učenička postignuća, odnosno jasno očekivana znanja, vještine, sposobnosti i stavove. Stoga su iskazani aktivnim glagolima koji izražavaju učeničku aktivnost: opisati, prepoznati, izgraditi, istražiti, usporediti, procijeniti, izračunati, itd. Navedena postignuća učenici trebaju usvojiti do završetka 4. razreda osnovne škole, odnosno učenička postignuća nisu određena na razini pojedinoga razreda. *Nacionalni okvirni kurikulum* služi kao temelj za izradbu predmetnih kurikuluma u kojima će ciljevi i očekivana postignuća biti razrađeni za svaki razred u skladu s razvojnim mogućnostima i opterećenjem učenika (MZOS, 2010).

### **3. RAZUMIJEVANJE GEOMETRIJSKIH POJMOVA I RAZVITAK GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA**

U prethodnom poglavlju su u tablicama prikazane nastavne teme iz geometrije zastupljene u *Nastavnom planu i programu*. *Nastavni plan i program* definira geometrijske sadržaje, a oni se u razrednoj nastavi kreću od geometrijskih tijela, ploha, crta, geometrijskih likova, preko poimanja dužine, pravca i polupravca, kružnice i kruga, do analiziranja trokuta, pravokutnika i kvadrata. Sami sadržaji ne daju uvid u strukturu i različite načine dječjih razumijevanja i poimanja tih geometrijskih sadržaja. Nasuprot definiranju sadržaja, *Nacionalni okvirni kurikulum* definira učeničke kompetencije, različite razine usvajanja tih sadržaja (Vlasnović i Cindrić, 2014). Međutim, prva razina, odnosno prvi odgojno-obrazovni ciklus, obuhvaća prva četiri razreda osnovne škole, a očekivana učenička postignuća nisu određena na razini pojedinoga razreda (MZOS, 2010). Postoji mogućnost da tradicionalni nastavni program iz geometrije često nije uspješan zato jer je predočen na višem stupnju od onoga na kojem funkcioniraju učenici. Drugim riječima, učenici ne razumiju nastavnika, a niti nastavnik ne razumije zašto učenici ne razumiju njega (De Villiers, 2008). Da bi nastavnik mogao kod učenika razviti kompetencije navedene u prethodnom poglavlju ovog rada, mora biti svjestan njihovih mogućnosti, njihova neformalnog poimanja prostora i oblika. Najpoznatija teorija vezana uz razumijevanje geometrijskog sadržaja je Van Hieleova teorija koja opisuje pet razina geometrijskog mišljenja (Vlasnović i Cindrić, 2014).

#### **3.1. Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja**

Nizozemac Pierre van Hiele je u svojoj doktorskoj disertaciji, i u članku koji je izašao dvije godine ranije, iznio teoriju o razinama mišljenja kroz kojih se prolazi pri učenju geometrije (Vlasnović i Cindrić, 2014). U disertaciji je pokušavao objasniti zašto učenici imaju probleme u učenju geometrije, a rezultat njegovoga rada je pet određenih misaonih etapa u razvoju učeničkog razumijevanja geometrije (De Villiers, 2008). Od objavljivanja, teorija je znanstveno potvrđena raznim metodama i danas više nema sumnji u njezinu valjanost. Svaki učenik, ali i svaka osoba, nalazi se na određenoj razini. Prema teoriji, razine geometrijskog mišljenja redom su: vizualizacija, analiza, neformalna dedukcija, dedukcija i strogost (Čizmešija,

Svedrec, Radović i Soucie, 2010). Razine opisuju proces razmišljanja korišten u geometrijskom kontekstu. Napredovanjem s jedne razine na drugu, objekt geometrijskog mišljenja se mijenja (Vlasnović i Cindrić, 2014). Tablica 5 prikazuje razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji. Uz svaku razinu navedeni su objekt mišljenja i proizvod odnosno rezultat mišljenja (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Tablica 5: Razine geometrijskog mišljenja (prema Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010)

<b>RAZINE GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA</b>	<b>OBJEKT MIŠLJENJA</b>	<b>PROIZVOD MIŠLJENJA</b>
<b>Razina 0 Vizualizacija</b>	oblici i njihov izgled (čemu su nalik)	klase ili grupe oblika koji „izgledaju slično“
<b>Razina 1 Analiza</b>	klase oblika	svojstva geometrijskih oblika
<b>Razina 2 Neformalna dedukcija</b>	svojstva geometrijskih oblika	odnosi među svojstvima geometrijskih oblika
<b>Razina 3 Dedukcija</b>	odnosi među svojstvima geometrijskih oblika	deduktivni aksiomatski sustavi geometrije
<b>Razina 4 Strogost</b>	deduktivni aksiomatski sustavi geometrije	usporedba različitih aksiomatskih sustava geometrije (euklidska i neeuklidske geometrije)

U nastavku će prve tri razine (vizualizacija, analiza i neformalna dedukcija) biti detaljnije opisane jer su one najvažnije za nastavu matematike u prva četiri razreda osnovne škole.

### Razina 0: Vizualizacija

Razina vizualizacije počinje „neverbalnim mišljenjem“. U Tablici 5 je navedeno da su objekti geometrijskog mišljenja na ovoj razini oblici i njihov izgled. Za ovu je razinu karakteristično vizualno prepoznavanje i imenovanje te vizualno sortiranje. Učenici oblike sude po izgledu, odnosno neki lik će biti kvadrat jer vide da je to kvadrat ili će neki lik biti pravokutnik jer izgleda kao kutija. Klasifikaciju i sortiranje vrše na temelju holističke percepcije. Određene će likove staviti zajedno jer izgledaju slično (Vlasnović i Cindrić, 2014). Pritom kao kriterije često koriste neuobičajena ili nevažna svojstva (npr. boju). Nevažna vizualna svojstva često koriste i pri opisivanju (definiranju) likova. Učenici na razini vizualizacije nisu u mogućnosti razmišljati o beskonačnom broju varijacija određenog tipa lika stoga se lako zbunjuju promjenom njegova oblika ili orijentacije. Na primjer, kvadrat koji nije nacrtan u standardnom položaju ne prepoznaju kao kvadrat (De Villiers, 2008).

Stoga, u nastavu geometrije nastavnik treba uključiti dovoljno učeničkih aktivnosti sortiranja i klasificiranja oblika te dovoljno aktivnosti koje se usmjeravaju na specifična svojstva oblika kako bi učenici razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti. Nastavnik treba u nastavu uvesti i promatranja raznolikih primjera oblika kako njihove nebitne osobine ne bi previše dobile na važnosti. Učenicima bi se također trebalo omogućiti da crtaju, izgrađuju, sastavljaju i rastavljaju dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

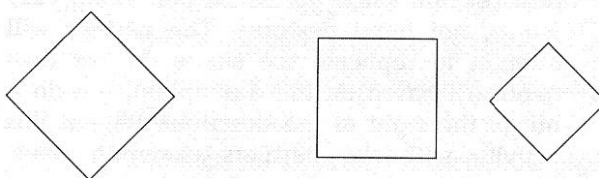
### Razina 1: Analiza

Tablica 5 prikazuje kako na razini analize klase oblika postaju objekt mišljenja. Učenici na ovoj razini lakše uzimaju u obzir sve oblike unutar jedne klase (npr. svi pravokutnici) nego pojedinačni oblik (jedan pravokutnik) kao na razini vizualizacije. Usmjeravanjem na klasu oblika, učenici su u mogućnosti razmišljati o tome što pravokutnika čini pravokutnikom (četiri stranice, suprotne stranice jednake duljine, četiri prava kuta, itd.). Na ovoj razini učenici shvaćaju da određeni oblici pripadaju istoj klasi zbog svojih svojstava, a ideje o individualnim oblicima mogu se generalizirati na sve oblike koji odgovaraju toj klasi. Dakle, učenici na razini analize mogu identificirati i opisati dijelove i svojstva geometrijskih oblika. Na primjer, neka svojstva jednakostraničnog trokuta su: tri stranice, sve tri stranice jednake duljine i tri



kuta (Vlasnović i Cindrić, 2014). Za opisivanje (definiranje) likova često neekonomično koriste sva njihova svojstva (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2014). Svojstva na ovoj razini još nisu logički posložena, što znači da učenici ne percipiraju osnovne odnose među svojstvima. Na primjer, kod jednakostraničnog trokuta ne razumiju da, ako trokut ima tri stranice jednake duljine, znači da mora imati i tri jednaka kuta. Učenici se u ovoj fazi više ne zbunjuju orijentacijom lika. Slika 1 prikazuje kvadrat koji učenik u fazi vizualizacije ne smatra kvadratom jer je rotiran te slike kvadrata koje učenik u analitičkoj fazi smatra kvadratima (Vlasnović i Cindrić, 2014).

Slika 1. Kvadrat



**Slika 2** – Kvadrat koji prema holističkom razmišljanju učenika nije kvadrat (lijevo) te slike kvadrata koje dijete u analitičkoj fazi smatra kvadratima (desno) (prema Musser, 2007)

Izvor: Vlasnović i Cindrić (2014, str. 43)

Klase oblika su u ovoj fazi strogo disjunktne, odnosno učenici ne uočavaju zajednička obilježja među klasama. Tako će, na primjer, za kvadrat reći da nije pravokutnik. U ovoj fazi učenici još likove sortiraju s obzirom na samo jedno svojstvo (npr. s obzirom na svojstva stranica), eksplicitno odbijaju definicije koje daju drugi ljudi (npr. učitelj) i prednost daju definicijama koje su sami smislili te smatraju da je empirijska provjera (npr. nekoliko mjerenja ili primjera) dovoljna za utvrđivanje istinitosti neke tvrdnje (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Obzirom na drugu razinu, u nastavi treba osmisliti dovoljno učeničkih aktivnosti usmjerenih na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje. Nadalje, treba prepoznati i iskoristiti činjenicu da uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste broj svojstava oblika. Nastavnici bi trebali težiti inkluzijama među različitim klasama likova te ideje u nastavi primjenjivati na cijele klase oblika (npr. na sve četverokute), a nova svojstva uočavati analizom klasa oblika (npr. pronalaskom načina na koje se trokuti mogu sortirati u grupe i na temelju tih grupa

definirati vrste trokuta). Također bi nastavnici u nastavi trebali koristiti program dinamične geometrije (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

### Razina 2: Neformalna dedukcija

Na razini neformalne dedukcije objekt mišljenja su svojstva geometrijskih oblika i učenici počinju uspostavljati odnose između svojstava oblika. Na ovoj razini mogu logički povezati svojstva oblika, odnosno razumiju da jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog te iz toga izvode zaključak. Učenici se na ovoj razini koriste svojstvima koja već znaju kako bi formulirali definicije, a zatim se koriste tim definicijama da bi shvatili odnose među likovima. Na primjer, na ovoj razini učenici mogu objasniti zašto su svi kvadrati pravokutnici (Vlasnović i Cindrić, 2014). Na ovoj razini učenici formuliraju korektne i ekonomične definicije likova, nepotpune mogu transformirati u potpune te spontanije prihvaćaju i koriste definicije novih pojmova. Eksplicitno koriste logički oblik *ako...onda* pri formuliranju pretpostavki. Ulogu aksioma, definicija, teorema i dokaza još uvijek ne razumiju (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Obzirom na navedeno, nastavnik treba u nastavi poticati učenike na stvaranje i provjeru hipoteza (npr. *Vrijedi li to uvijek?, Vrijedi li to za sve trokute ili samo za pravokutne?*). Potom nastavnik treba osmišljavati aktivnosti u kojima se ispituju svojstva oblika kako bi se odredili nužni i dovoljni uvjeti za oblike ili koncepte, u nastavi upotrebljavati jezik neformalne dedukcije (npr. *za svaki, za neke, ako...onda..., što ako* i sl.) te poticati učenike da se okušaju u izvođenju neformalnih dokaza i zahtijevati da se uvjere u smislenost neformalnih dokaza koje ponude drugi učenici ili nastavnik (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Razine geometrijskog mišljenja nisu vezane uz dob učenika, a učenici iste dobi često se nalaze na različitim razinama. Većina učenika nižih razreda nalazi se na razini vizualizacije, a veoma malo učenika osmog razreda na razini višoj od druge (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010). Da bi učenik dosegao sljedeću razinu mora usvojiti prethodnu, a to zavisi isključivo o razumijevanju sadržaja i percepciji cjelokupnog koncepta (Vlasnović i Cindrić, 2014).

Istraživanje koje su provele Vlasnović i Cindrić (2014) pokazalo je da učenici kroz niže razrede napreduju u razvoju geometrijskog mišljenja prema van Hieleovim razinama. Istraživanje je dokazalo da nije moguće strogo odrediti granicu niti trenutak prijelaza s jedne razine na drugu jer se ne nalaze svi učenici istog razreda na istoj razini. Rezultati istraživanja su pokazali da u svakom uzrastu postoje učenici koji kategoriziraju kvadrate kao pravokutnike, ali se radi o veoma malom udjelu učenika uz znatnije odstupanje u četvrtom razredu. Prema van Hieleu takvi se učenici nalaze na razini neformalne dedukcije. Nadalje, učenici su pokazali bolji uspjeh u analiziranju pravokutnika i kvadrata od analiziranja trokuta. U zaključku Vlasnović i Cindrić (2014) pretpostavljaju da se kroz nastavu matematike učenicima nude aktivnosti koje potiču njihov razvoj, no ne treba zanemariti činjenicu da jedan dio učenika nema razvijeno geometrijsko mišljenje niti na osnovnoj razini.

### **3.2. Vizualne vještine i prostorni zor**

U geometriji su vrlo značajne vizualne vještine i dobro razvijeni prostorni zor. Vizualizacija podrazumijeva sposobnost tumačenja i razumijevanja prikazanih informacija, kao što je gledanje i prepoznavanje lika ili karakteristika lika. Također uključuje stvaranje slika iz apstraktnih ideja kao što je zamišljanje kako se objekti pojavljuju iz različitih perspektiva, kako su postavljeni međusobno, kako je dvodimenzionalni prikaz povezan s trodimenzionalnim objektima te predviđanje izgleda objekta nakon određenih transformacija. Slike mogu biti samo zamišljene ili skicirane uz pomoć papira ili tehnologije (Jukić Matić, Matić i Pavlović, 2014). U radu od Jukić Matić, Matić i Pavlović (2014) navodi se da autori Johnston-Wilder i Mason (2005) preporučuju primjenu triju nastavnih strategija za poboljšanje učeničke vizualizacije i geometrijskog zaključivanja koje se mogu primijeniti kod promatranja zadane slike: „reci što vidiš“, „što je isto, a što različito“ te „koliko različitih.“

Razvoj prostornog zora je jedan od najvažnijih zadataka nastave u domeni *Oblik i prostor* u *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*. Pod pojmom prostorni zor (eng. *spatial ability, spatial sense*) podrazumijevamo „intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas“ (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010, str. 147).

Uključuje koncepte tradicionalne geometrije (osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika), ali i za našu nastavu geometrije nestandardne poglede na dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike (npr. popločavanje ravnine i prostora, presavijanje papira, crtanje projekcija geometrijskih likova i tijela u kvadratnoj i trokutastoj mreži točaka). Također podrazumijeva i sposobnost misaone vizualizacije objekata i prostornih odnosa te snalaženje s geometrijskim opisima objekata i njihovog položaja (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

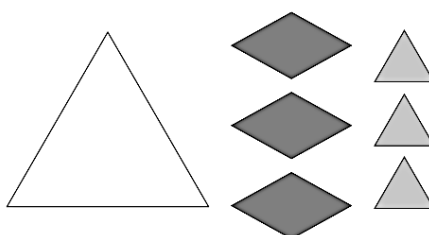
### **3.3. Primjeri učeničkih aktivnosti namijenjenih razvoju geometrijskog mišljenja i prostornog zora**

Učenici su u početnim razredima osnovne škole u pravilu na razini vizualizacije. Kako bi geometrijsko mišljenje podigli na višu razinu, nastavnik treba učenicima omogućiti učenje putem različitih konkretnih materijala, geometrijskih modela, slika, ali i primjerenih računalnih programa. Sve učeničke aktivnosti trebaju biti primjerene njihovoj van Hieleovoj razini i usmjerene podizanju na višu razinu. Nastavnikovo pravilno prepoznavanje o kojim se razinama radi i usklađivanje poučavanja s tim razinama pridonijet će kvaliteti nastave geometrije. U nastavku je opisano nekoliko aktivnosti koje nastavnici mogu primjenjivati u nastavi (izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

#### Aktivnost 1 – Slaganje trokuta (1. razred)

Radeći samostalno, u paru ili skupinama, učenici trebaju dani jednakostranični trokut u potpunosti i bez preklapanja prekriti danim elementima (Slika 2). Zadatak je sastaviti i nacrtati što više različitih rješenja.

Slika 2. Aktivnost *Slaganje trokuta*



Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 154)

Učenici će, pokušavajući sastaviti dani jednakostranični trokut, dijelove zakretati i postavljati u različite položaje te uočavati njihova geometrijska svojstva. Postoji samo pet rješenja (Slika 3). Ne prepoznajući simetriju učenici će zacijelo nacrtati više rješenja, stoga ih učitelj po završetku aktivnosti treba usmjeriti da grupiraju „slično složene“ trokute (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Slika 3. Rješenje aktivnosti *Slaganje trokuta*

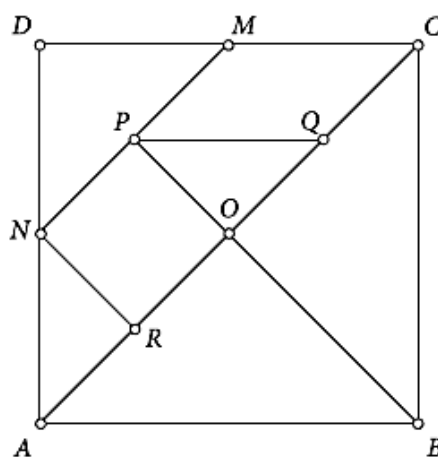


Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 154)

#### Aktivnost 2 – Tangram (od 1. razreda)

Tangram je stara kineska slagalica s velikim mogućnostima u nastavi matematike. Sastoji se od sedam dijelova: pet jednakokranih pravokutnih trokuta i dva četverokuta, kvadrata i paralelograma (Slika 4). Zadatak je izrezati dijelove tangrama i od njih složiti trokut ili neki drugi zadani oblik (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Slika 4. Aktivnost *Tangram*

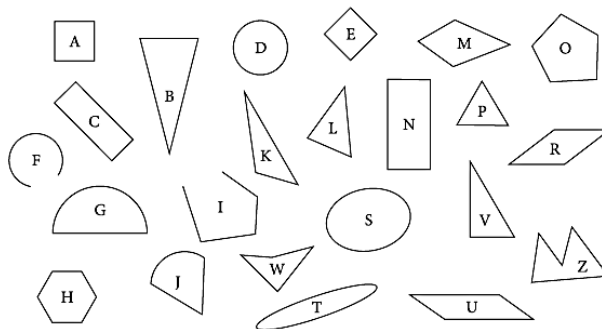


Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 155)

### Aktivnost 3 – Grupiranje likova (od 1. razreda)

Učenici trebaju grupirati likove sa Slike 5 koji po njihovom mišljenju spadaju u istu skupinu te obrazložiti svoj kriterij. Uočavajući sličnosti i razlike među nacrtanim likovima, učenici će sami prepoznati njihova geometrijska svojstva (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Slika 5. Aktivnost *Grupiranje likova*

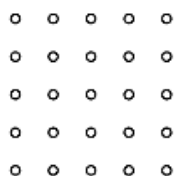


Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 156)

### Aktivnost 4 – Kvadrati i pravokutnici (4. razred)

Potreban je nastavni listić s više jednakih mreža točkica dimenzija 5 x 5 (Slika 6).

Slika 6. Aktivnost *Kvadrati i pravokutnici*



Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 157)

Zadatak je nacrtati što više:

- kvadrata kojima su vrhovi u točkama mreže,
- pravokutnika kojima su vrhovi u točkama mreže,
- pravokutnih trokuta kojima su vrhovi u točkama mreže,
- jednakokranih trokuta kojima su vrhovi u točkama mreže.

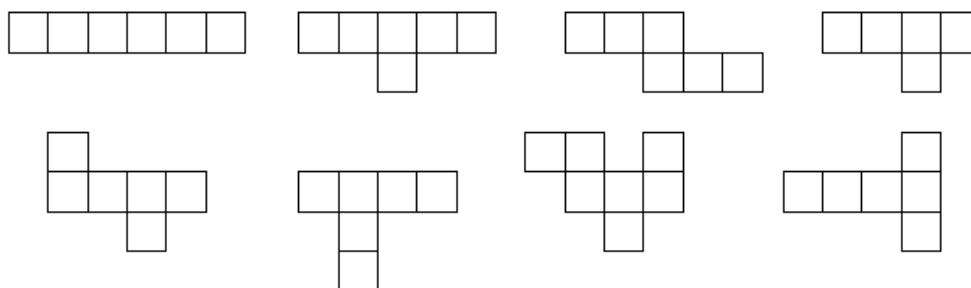
Uz navedene zadatke može se još postaviti pitanje ima li među nacrtanim trokutima jednakostraničnih trokuta te zahtijevati obrazloženje (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Na kraju 4. razreda od učenika se očekuje da će „istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale.“ (NOK, 2010, str. 118) S istraživanjem i predviđanjem rezultata sastavljanja i rastavljanja oblika učenici mogu početi od 3. razreda. Rabeći konkretne materijale (štipiće, likove, kockice) učenici mogu oblike fizički sastavljati i rastavljati te ih opisivati, na temelju zadane mreže mogu izrađivati modele kocka, kvadra, tetraedra i dr., te će tako stjecanjem iskustva kroz aktivnosti biti u stanju rezultat predvidjeti i vizualizacijom (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

#### Aktivnost 5 – Sastavljanje kocke (4. razred)

Zadatak je provjeriti koje od nacrtanih mreža predstavljaju mrežu kocke (Slika 7).

Slika 7. Aktivnost *Sastavljanje kocke*

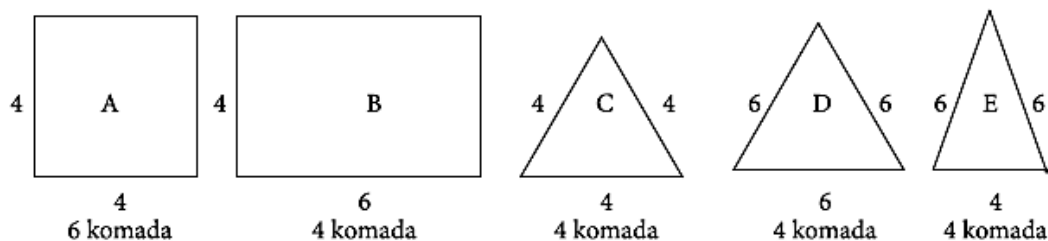


Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 159)

#### Aktivnost 6 – Sastavljanje geometrijskih tijela (4. razred)

Učitelj treba pripremiti komplete mnogokuta, dimenzija kao na Slici 8. Radom u skupini, učenici trebaju sastaviti što je moguće više geometrijskih tijela. Postoji više mogućih rješenja (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Slika 8. Aktivnost *Sastavljanje geometrijskih tijela*



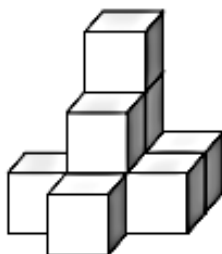
Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 160)

Učenici mogu još provoditi aktivnosti crtanja različitih pogleda na geometrijska tijela sastavljena od jednakih kocaka, gledajući najprije u fizički predložak, a potom misaonim zamišljanjem. Također mogu graditi tijela na temelju danih pogleda na njih (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Aktivnost 7 – Pogledi (4. razred)

Nastavnik učenicima treba pripremiti komplet jednakih kocaka (primjerice, drvenih). Promatrajući Sliku 9, učenici trebaju od kocaka sastaviti takvo tijelo, a potom u kvadratnoj mreži nacrtati pogled sprijeda, pogled odozgo i pogled zdesna na to tijelo (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

Slika 9. Aktivnost *Pogledi*

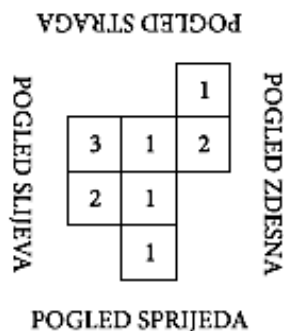


Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 161)

Aktivnost 8 – Pogledi (4. razred)

Kao u prethodnoj aktivnosti, učenicima na raspolaganju treba biti komplet jednakih kocaka. Na Slici 10 prikazan je plan gradnje tijela sastavljenog od takvih kocaka. Brojevi na tlocrtu označavaju broj kocaka u pojedinom „stupcu“.

Slika 10. Aktivnost *Pogledi*



Izvor: Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie (2010, str. 161)



Radom u skupini, učenici trebaju sagraditi tijelo prema zadanom planu, a potom u kvadratnoj mreži nacrtati poglede na njega s raznih strana. Po stjecanju dovoljno iskustva, gradnja tijela se može preskočiti, odnosno učenici mogu pokušati crtati poglede samo na temelju vizualizacije (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010).

## 4. USVAJANJE GEOMETRIJSKIH POJMOVA KOCKE I KVADRATA U NIŽIM RAZREDIMA OSNOVNE ŠKOLE

### 4.1. Geometrijski pojam kocke i kvadrata u *Nastavnom planu i programu za osnovnu školu i Nacionalnom okvirnom kurikulumu*

Potpoglavlje 2.3. ovog rada prikazuje nastavne teme iz geometrije od 1. do 4. razreda osnovne škole koje su propisane *Nastavnim planom i programom*. Budući da rad govori o projektu u razrednoj nastavi matematike na temu kocke i kvadrata, u Tablici 6 izdvojene su one nastavne teme u okviru kojih učenici usvajaju ta dva pojma i/ili njihova obilježja.

Tablica 6: Pojam kocke i kvadrata od 1. do 4. razreda osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu* (MZOS, 2006).

RAZRED	TEMA	KLJUČNI POJMOVI	OBRAZOVNA POSTIGNUĆA
1. razred	Tijela u prostoru	kocka	prepoznati i imenovati kocku među predmetima iz neposredne okoline, na modelima geometrijskih tijela i na ilustracijama
	Geometrijski likovi	geometrijski lik, kvadrat	prepoznati, imenovati i razlikovati kvadrat
2. razred	Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta	stranica kvadrata	označiti stranice kvadrata kao dužine
3. razred	Ravnina, likovi u ravnini	likovi u ravnini	shvaćati ravninu kao neograničenu ravnu plohu i likove kao dijelove ravnine
4. razred	Pravokutnik i kvadrat	kvadrat, stranice, vrhovi i kutovi kvadrata	prepoznati, razlikovati i crtati kvadrat; označivati stranice, vrhove i kutove kvadrata

	Opseg pravokutnika i kvadrata	opseg kvadrata	razumjeti i izračunati opseg kvadrata
	Mjerenje površina	jedinični kvadrat, kvadratna mreža, površina	mjeriti površinu prekrivanjem jediničnim kvadratima; služiti se kvadratnom mrežom u određivanju površine
	Površina pravokutnika i kvadrata	površina kvadrata	računati površinu kvadrata, znati mjere za površinu (kvadratni centimetar, kvadratni decimetar, kvadratni metar)
	Kvadar i kocka	kocka, strane, bridovi i vrhovi	upoznati kocku, znati bitna obilježja kocke; odrediti strane, bridove i vrhove
	Obujam kocke	kocka, obujam kocke, mjere za obujam	mjeriti obujam kocke slaganjem jediničnih kocaka; upoznati jedinice za mjerenje obujma (kubični centimetar i kubični decimetar)

Tablica 6 zorno prikazuje da se u 4. razredu nalazi najviše tema u okviru kojih učenici usvajaju pojmove kocka i kvadrat i/ili njihova obilježja. Učenici u 1. razredu kreću s upoznavanjem kocke i kvadrata na razini prepoznavanja i imenovanja. U 2. i 3. razredu proširuju svoje znanje o kvadratu, ali kocka se nigdje ne spominje sve do 4. razreda. U 4. razredu još više proširuju i produbljuju svoje znanje o kvadratu i njegovim obilježjima te usvajaju pojam opseg i površina. Posljednje dvije teme u tablici ujedno su posljednje dvije teme iz 4. razreda u *Nastavnom planu i programu*. Prema njima učenici proširuju svoje znanje o kocki te upoznavaju pojam obujam kocke (MZOS, 2006).

Potpoglavlje 2.4. ovog rada prikazuje nastavne sadržaje iz geometrije koje učenici trebaju svladati u prva četiri razreda osnovne škole prema *Nacionalnom okvirnom*

kurikulumu. U Tablici 7 izdvojene su kompetencije o kocki i kvadratu koje trebaju steći u tom istom razdoblju.

Tablica 7: Pojam kocke i kvadrata u prvom odgojno-obrazovnom ciklusu prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu (MZOS, 2010).

<b>MATEMATIČKI KONCEPTI</b>	<b>UČENIČKA POSTIGNUĆA</b>
<b>Oblik i prostor</b>	prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove
	skicirati jednostavne ravninske oblike te ih nacrtati služeći se geometrijskim priborom
	prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima
	istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale
	prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnomu životu
<b>Mjerenje</b>	usporediti i procijeniti duljinu i obujam te ih izmjeriti rabeći odgovarajuće mjerne uređaje
	navesti i rabiti standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam (litre) u svakodnevnomu životu
	izračunati opseg jednostavnih likova, osobito kvadrata te površinu kvadrata
	približno ili točno izmjeriti površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata
	odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema

Za razliku od *Nastavnog plana i programa* koji navodi kocku i kvadrat i njihova obilježja kao ključne pojmove, *Nacionalni okvirni kurikulum* donosi samo kompetencije, odnosno znanja, vještine, i sposobnosti koje učenik treba ostvariti do

kraja prvog odgojno-obrazovnog ciklusa. Iskazani su aktivnim glagolima koji izražavaju učeničku aktivnost: opisati, prepoznati, izgraditi, istražiti, usporediti, procijeniti, izračunati, itd. U domeni *Oblik i prostor* iskazane kompetencije se odnose na više jednostavnijih geometrijskih oblika. U domeni *Mjerenje* iskazane kompetencije su preciznije određene. Navode se veličine koje učenici trebaju znati mjeriti te u kojem opsegu ih trebaju znati mjeriti (MZOS, 2010).

#### **4.2. Usvajanje pojmova kocka i kvadrat**

Apstraktnost matematičkog sadržaja i razina intelektualne razvijenosti učenika uvjetuju obilnu i sadržajem bogatu metodičku interpretaciju u nastavi matematike. Matematički su sadržaji pojmovni sadržaji, a misaone sposobnosti učenika na početku školovanja pod snažnim utjecajem percepcije, stoga se trebaju prenijeti u oblik dostupan mogućnostima učeničkog shvaćanja. Kako bi učenici usvojili geometrijske pojmove treba ih uvoditi postupno i temeljiti na realnosti i vlastitoj aktivnosti učenika (Markovac, 2001). Kurnik (2001) navodi tri stupnja u procesu formiranja nekog pojma:

1. Promatranje i opažanje
2. Predodžba o pojmu,
3. Formiranje pojma.

Prvi stupanj podrazumijeva promatranje konkretnih objekata i upoznavanje njihovih svojstava povezanih s pojmom. Drugi stupanj podrazumijeva uočavanje nečeg općeg i zajedničkog objektima u promatranom skupu. Na posljednjem stupnju se izdvajaju bitna opća svojstva takvih objekata. U procesu se javlja nekoliko znanstvenih postupaka: analiza, sinteza, apstrahiranje i poopćavanje. To znači da pojam, nakon analize, nastaje apstrahiranjem svojstava objekata i njihovim poopćavanjem. U osnovnoj školi se taj proces treba pažljivo provoditi. Kritično mjesto u procesu je prijelaz na stupanj u kojem počinje postupak apstrahiranja, odnosno prijelaz s konkretnog na apstraktno (Kurnik, 2001). Taj prijelaz je važan kako se nastava geometrije ne bi reducirala na perceptivno-predodžbenu razinu i manualnu aktivnost s objektima. Perceptivne i ostale aktivnosti su samo podloga za angažiranje viših mentalnih procesa kao što su apstrahiranje i poopćavanje (Markovac, 2001).

Djeca se od najranijeg djetinjstva igraju različitim tijelima. Promatraju ih, dodiruju i slažu na mnoge načine. Neka od njih zasigurno imaju oblik kugle, valjka, kvadra, kocke ili piramide. Geometrijski su sadržaji stoga veoma pogodni za početak nastave matematike. Pojmove kocka i kvadrat učenici usvajaju već 1. razredu, ali samo na razini prepoznavanja i imenovanja (Markovac i Kulušić, 2005). Polazišta za usvajanje geometrijskih pojmova jesu aktivnosti s objektima iz neposredne okoline, odnosno promatranje objekata, dodirivanje, opisivanje, prekrivanje, izrezivanje i sl. (Markovac, 2001). Kako bi učenici mogli s razumijevanjem upotrebljavati nazive geometrijskih oblika trebaju se s njima najprije upoznati (Liebeck, 1995). Osim vizualno, korisno je da oblike učenici percipiraju i dodirom, odnosno taktilno, te da pritom opisuju što osjećaju na dodir. Obuhvaćanjem različitih oblika dlanovima i prolaženjem prstom po bridovima stječe se jasna spoznaja o razlikama među njima (Markovac, 2001). Za uspješno usvajanje pojmova geometrijskih tijela, potrebno je pripremiti komplet modela geometrijskih tijela koji sadrži više primjeraka pojedinog tijela različitih veličina i boja, odnosno, potrebno je osigurati dovoljan broj primjera. Od naziva geometrijskih tijela, termin „kvadar“ je učenicima najmanje poznat. Stoga posebno treba promatrati kocku i kvadar te ih vizualno i taktilno razlikovati. Učenici će ga na taj način lakše usvojiti, nego samo osposobljavanjem u pravilnoj upotrebi termina kocka i kvadar (Markovac, 2001). Kako je za uspješno usvajanje geometrijskih tijela potrebno pripremiti komplet modela geometrijskih tijela, tako je za uspješno usvajanje geometrijskih likova potrebno pripremiti komplet geometrijskih likova. Pritom je poželjno da su neki od likova sukladni plohama geometrijskih tijela. Učenici trebaju geometrijske likove držati u ruci i okretati ih kao što su to činili s geometrijskim tijelima. Trebaju se igrati s njima i slagati slike u kojima će ih okretati na različite načine. Slaganjem slika s geometrijskim likovima polako će sami otkrivati neka njihova obilježja. Nakon niza ovakvih aktivnosti i ostalih igara s geometrijskim likovima i tijelima, učenici će s razumijevanjem upotrebljavati njihove nazive (Liebeck, 1995). Kako učenici relativno brzo zaboravljaju pojedine oblike i njihova imena, povremeno je potrebno ponovno promatrati predmete iz okoline, razlikovati njihove oblike i pravilno ih imenovati. Ispravnom i dosljednom upotrebom termina, i njegovim povezivanjem uz određeni oblik, učenici će postupno stjecati trajno znanje pojedinih oblika u prostoru (Markovac, 2001).

Svoje znanje o kvadratu učenici proširuju i produbljuju malo u 2. razredu, kad usvajaju pojam stranica kvadrata, a onda nešto više u 4. razredu (MZOS, 2006). Osim njegovih obilježja, učenici usvajaju (novu) spoznaju o kvadratu, spoznaju da je kvadrat pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine. To se obilježje može usvojiti samo promatranjem pravokutnika i kvadrata, pokazivanjem pojedinih obilježja i njihovim uspoređivanjem. Promatranje, pokazivanje i uspoređivanje treba popratiti ispravnim govornim obrazlaganjem (Markovac, 2004).

Do pojma kocke u 4. razredu dolazi se usporedbom kvadra i kocke te objašnjavanjem njihovih zajedničkih i različitih obilježja. Kao što se kvadrat uvodi kao pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine, tako se i kocka uvodi kao kvadar čiji su svi bridovi jednake duljine. Obilježja kocke i kvadra također je potrebno pokazivati na modelima te ih ispravno govorno obrazlagati. Posebno je potrebno kod učenikovog ponavljanja obilježja dosljedno paziti na ispravnu uporabu pojedinih riječi (termina) i na pojmovni sadržaj koji se njima imenuje (Markovac, 2004).

#### **4.3. Usvajanje pojmova opseg i površina kvadrata te obujam kocke**

U okviru teme *Opseg pravokutnika i kvadrata* u 4. razredu učenici obrađuju opseg pravokutnika i kvadrata. Pojam opseg učenici su usvojili već prije u okviru teme *Opseg trokuta* (MZOS, 2006). Stoga je za usvajanje opsega pravokutnika i kvadrata pogodna strategija *učenje otkrivanjem* na konkretnom zadatku, npr. zadatku izračunavanja količine vune potrebne za obrublivanje slike oblika kvadrata. Učenje otkrivanjem se odnosi na mogućnost da učenici samostalno dođu do novih spoznaja, ideja i rješenja problema. Prema matematičaru i metodičaru Polyi, u matematici za rješenje problema treba isprobavati mogućnosti, odnosno „eksperimentirati“ i djelovati intuitivno (Glasnović Gracin 2009). U ovoj nastavnoj jedinici učenici imaju dovoljno predznanja da samostalno otkriju kako izračunati duljinu potrebne vune za obrublivanje slike. Pritom valja imati na umu da njihovo konačno rješenje ne mora biti formula oblika  $4 \cdot a$ . Učenici su uspješno riješili zadatak ako su shvatili postupak izračunavanja opsega.

Kod usvajanja pojma površine naprije se obrađuju jedinice za mjerenje površina (jedinične površine), a onda se objašnjava mjerenje površina, izgrađuje pojam ploštine i postupak izračunavanja ploštine. Pojam ploštine se izgrađuje mjerenjem površine. Na njezino izračunavanje bi trebalo prijeći kad učenici posve shvate što je ploština površine. Razlog tome je činjenica što se mjerenjem površine izgrađuje spoznaja o mjerenju kao uspoređivanju dviju površina, one koja se mjeri i one kojom se mjeri. Da bi se to ispravno shvatilo, mora se pokazati da postoji nešto što se mjeri (površina pravokutnika ili kvadrata) i nešto što se mjerenjem doznaje (ploština), tj. svojstvo omeđene površine. Mjerenje površine se provodi na način da se određeni lik (pravokutnik ili kvadrat) prekriva određenom jediničnom površinom i obilježava taj dio površine. Tako će učenici postupno razumijevati da je ploština svojstvo površine koje se doznaje mjerenjem, a kasnije i izračunavanjem (Markovac, 2004). Nakon dovoljno primjera, do formule za izračunavanje ploštine učenici mogu pokušati doći samostalno strategijom učenja otkrivanjem.

Kod usvajanja pojma obujam se također najprije obrađuju jedinice za mjerenje obujma, a onda mjerenje obujma i postupak njegova izračunavanja. Za mjerenje obujma potrebna su određena nastavna sredstva: kutija oblika kocke (manjih dimenzija) i dovoljno kocaka (iste veličine) da je cijelu ispune. Potom se kocke prebroje i utvrđuje se koliko ih ima u prvom sloju (na dnu), koliko u drugom itd. te koliko ima slojeva. Broj kocaka je mjerni broj volumena i pokazuje koliko kocaka sadrži kutija oblika kocke, a kocke su jedinice kojima se mjerio volumen. Svrha te demonstracije je pokazati da mjereći volumen kocke mjerimo prostor što ga kocka omeđuje. Takav postupak učenicima čini jasnijom i razumljivijom činjenicu da je mjerenje uspoređivanje volumena koji se mjeri s volumenom kojim se mjeri. Iako je to relativno dugotrajan i složen proces, potrebno ga je primijeniti u nastavi zbog obilja vrijednih spoznaja koje donosi. Sljedeći korak je objašnjenje postupka izračunavanja volumena (Markovac, 2004).

Na pamćenju formula za izračunavanje opsega, površine i obujma ne treba inzistirati. Važnije od toga je razumijevanje postupka jer bez toga bi to znanje bilo formalističko, što nikako nije poželjan rezultat učenja u početnoj nastavi matematike (Markovac, 2004).



#### 4.4. Primjena analogije u razrednoj nastavi

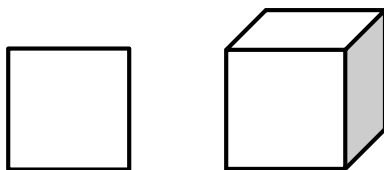
Analogija (grč. *analogia* – razmjer, sklad, pravilnost, odnos, podudarnost, srodnost) je poseban oblik traduktivnog zaključivanja. „Zaključivanje po analogiji misaoni je postupak pri kojem se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima koji se kod njednog objekta nisu izravno opažali.“ (Kurnik, 2009, str. 87) Analogija je jedna vrsta sličnosti, ali treba odmah naglasiti da nije svaka sličnost analogija. Za analogiju je potrebna i podudarnost objekata u određenim odnosima. Jasno je da zaključivanje po analogiji nije strogo, jer podudaranje objekata u dijelu svojstava ne mora nužno povlačiti njihovo podudaranje i u drugim svojstvima (Kurnik, 2009).

Geometrija je područje u kojemu se mogu naći mnoge analogije. Postoje tri smjera primjene analogije (prema Kurnik, 2009): uočavanje srodnih, analognih objekata, otkrivanje analognih svojstava i provođenje analognih postupaka. U nastavku će biti prikazana prva dva zbog moguće primjene u razrednoj nastavi matematike.

##### a) uočavanje srodnih, analognih objekata

Upoznavanje učenika s analogijom može početi otkrivanjem analognih objekata, npr. kvadrat i kocka.

Slika 11. Kocka i kvadrat

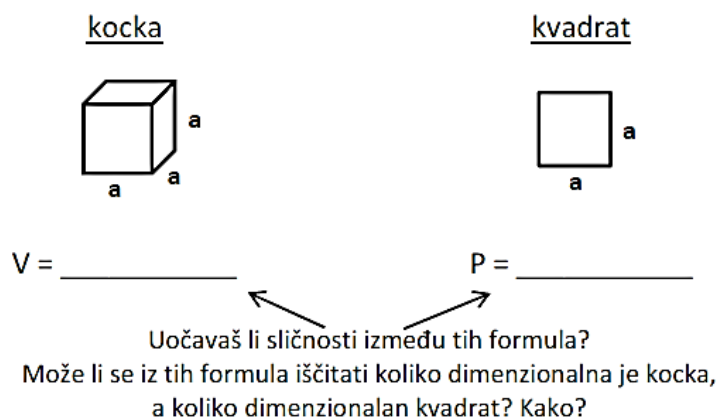


Kvadrat je geometrijski lik omeđen s četiri stranice jednake duljine. Nasuprotne stranice su paralelne, susjedne stranice su okomite, a dijagonale se raspolavljaju pod pravim kutem. Kocka je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest sukladnih strana (kvadrata). Nasuprotne strane su paralelne, susjedne strane su okomite, a dijagonale se raspolavljaju pod pravim kutem. S ovim se objektima učenici upoznaju rano i poželjno je da sami uočavaju njihovu srodnost. Treba također znati da analogija ne mora uvijek biti jednoznačna. Neki objekt može imati više analogona.

b) otkrivanje analognih svojstava

Površina je jedan od najpoznatijih matematičkih pojmova. Mjerenje obujma skupova točaka u prostoru slična je teoriji mjerenja površine skupova točaka u ravnini (Kurnik, 2009). Između tema *Površina pravokutnika i kvadrata* i *Obujam kocke u Nastavnom planu i programu* postoje druge teme iz aritmetike (MZOS, 2006). U udžbenicima iz 4. razreda (npr. Markovac, 2014) se između nastavne jedinice koja obrađuje pojam površine i nastavne jedinice koja obrađuje pojam obujam nalaze nastavne jedinice iz aritmetike te se pojmovi površina i obujam najčešće promatraju odvojeno. Da se proučavaju zajedno učenici bi ih možda lakše i uspješnije usvojili. Horvatek (2006) je pripremila prezentaciju *Analogije među formulama* i pripadajući nastavni listić za učenike 8. razreda. Takav zadatak (Slika 12) može se ponuditi i učenicima 4. razreda.

Slika 12. Kocka i kvadrat – analogija



Izvor: Horvatek (2006)<sup>4</sup>

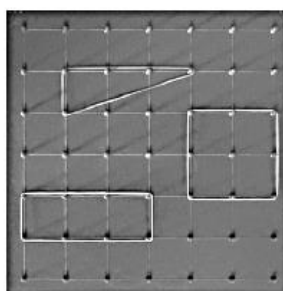
Analogiju treba primjenjivati od nižih razreda osnovne škole. Osim što omogućuje aktivnije sudjelovanje učenika u nastavnom procesu i razvoj ueničkog mišljenja, nastavno gradivo se povezuje, predavanje pojednostavnjuje, određeno ranije usvojeno gradivo se obnavlja i utvrđuje, a novo brže i lakše svladava (Kurnik, 2009).

<sup>4</sup> Dostupno na: <http://www.antonija-horvatek.from.hr/8-razred/05-Geometrijska-tijela/Analogije-medju-osnovnim-formulama-Radni-list.pdf> (preuzeto 18. 9. 2015).

#### 4.5. Primjena *geoploče* u nastavi matematike

Geoploča je ploča s čavlicima koji su raspoređeni u kvadratnu mrežu oko kojih je moguće rastezati elastične (gumene) vrpce (Slika 13). Osmislio ju je egipatski matematičar Caleb Gattegno 1952. godine, a potom izradio i prve nastavne materijale za primjenu geoploče u nastavi geometrije (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Slika 13: Primjer geoploče



Izvor: Čižmešija, Soucie i Svedrec (2012, str. 25)

Geoploča se lako može izraditi i kod kuće – od drva ili deblje plutene ploče s 25 čavlića raspoređenih u kvadratnu mrežu (5 x 5), na jednakim udaljenostima, primjerice 1 cm. Također je moguće koristiti samo točkasti papir umjesto rada na konkretnoj geoploči (Slika 14). Postoje i besplatne elektronske aplikacije geoploče. Jedna od njih je dostupna na adresi <http://www.mathplayground.com/geoboard.html> (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Slika 14: Geoploča na papiru



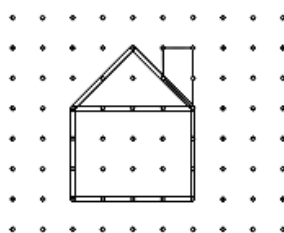
Izvor: Čižmešija, Soucie i Svedrec (2012, str. 26)

Kao nastavno pomagalo primjenjiva je u osnovnoškolskoj nastavi matematike kao pomoć pri istraživanju koncepata kao što su opseg, površina i svojstva geometrijskih likova. Geoploča učenicima omogućava vizualizaciju i pruža im mogućnost da

samostalno otkrivaju matematiku rješavanjem matematičkih problema. Između ostalog, potiče na istraživanje, sustavnost, kreativnost, ustrajnost u radu te na aktivno sudjelovanje u nastavnom procesu (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Nakon upoznavanja s geopločom, učenicima se može zadati zadatak da na svojoj geoploči „crtaju“ unaprijed pripremljenu sliku (primjer Slika 15) prikazanu pomoću grafoskopa ili geoploče. Pritom učenici imenuju likove na slici (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Slika 15: Primjer slike na geoploči

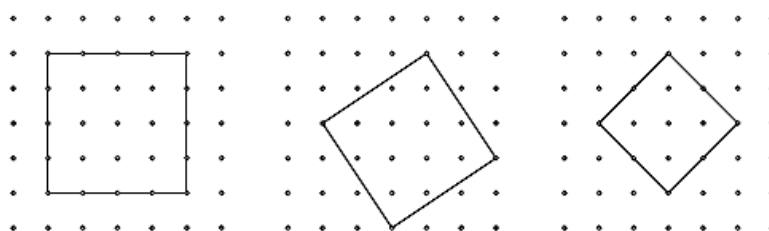


Izvor: Čižmešija, Soucie i Svedrec (2012, str. 28)

Učenici mogu sami „crtati“ svoju sliku na geoploči i imenovati likove koje su koristili za izradu svoje slike. Također mogu „crtati“ jednostavnu sliku i svome paru (koji ne smije vidjeti njihovu sliku) pokušati objasniti kako da nacrtaju istu na svojoj geoploči (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Geoploča je primjenjiva za istraživanje geometrijskih likova i njihovih svojstava. Učitelj na geoploči može prikazivati likove, a učenici ih imenovati. Likove pritom svakako treba prikazati u različitim položajima (Slika 16) (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Slika 16: Različiti prikazi kvadrata



Izvor: Čižmešija, Soucie i Svedrec (2012, str. 31)

Učitelj učenicima može zadati samo geometrijski lik koji trebaju prikazati ili može dati precizne upute o liku kojeg trebaju prikazati. Na primjer:

- a) Koristeći geoploču, prikaži lik koji ima četiri stranice jednakih duljina.
- b) Koristeći geoploču, prikaži pravokutnik koji nije kvadrat.
- c) Prikaži pravokutan trokut.
- d) Prikaži trokut kojemu su sve stranice jednake duljine (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

Zadatci koji mogu učenicima pomoći u razumijevanju pojmova opseg i površina u radu *Primjena geoploče u nastavi matematike* navedeni su pod aktivnostima za više razrede osnovne škole. Ako se pojednostave, učenici u 4. razredu ih također mogu rješavati. Mogu na geoploči prikazati više likova (npr. kvadrata) i onda izračunavati njihove opsege. Ako je kvadrat načinjen od samo jedne gumene vrpce, opseg je zapravo duljina te gumene vrpce. Mogu kao zadatak dobiti zadan opseg i prema njemu prikazati što više likova koji imaju zadani opseg. Također mogu izračunavati površine prikazanih likova (Čižmešija, Soucie i Svedrec, 2012).

## 5. PROJEKTNA NASTAVA MATEMATIKE

### 5.1. Nastava matematike usmjerena na učenika

U suvremenom obrazovanju se planiranje i programiranje stavlja u kontekst kurikuluma, a *Nacionalni okvirni kurikulum* „promiče odgoj i obrazovanje usmjeren na dijete i učenika“ (MZOS, 2010, str. 30). Prevladava mišljenje da je najbolja ona nastava koja je usmjerena na učenika, odnosno nastava koja predstavlja zajednički rad nastavnika i učenika i podrazumijeva primjenu raznovrsnih aktivnosti. Učenik se postavlja u prvi plan, od izbora ciljeva do izbora uvjeta za organiziranje nastavnih aktivnosti i izbora modela vrjednovanja i ocjenjivanja (Matijević i Radovanović, 2011). Stoga se i suvremena nastava matematike obično opisuje kao „nastava orijentirana prema učenicima“ (Glasnović Gracin, 2009).

Tradicionalna nastava matematike u Hrvatskoj najčešće je ograničena nastavnim planom i programom jer je usmjerena na njegovu realizaciju (Čižmešija, 2006). Mnogim je nastavnicima glavni zadatak da učenici usvoje što više propisanog sadržaja (Kurnik, 2009). U nastavi usmjerenoj na učenika ključna je usmjerenost na učenička postignuća, odnosno kompetencije. U prosincu 2006. godine Parlament i Vijeće Europske unije zajednički su donijeli *Preporuke o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje* u kojima je navedeno osam ključnih kompetencija. Matematička kompetencija je definirana kao „sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Uz dobru numeričku pismenost (vladanje brojevima i računskim operacijama), naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja (logičko i prostorno mišljenje) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).“ (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, str. 143) S navedenom su kompetencijom usklađeni odgojno-obrazovni ciljevi matematičkog područja u *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*. Prema njima, učenici će:

- usvojiti temeljna matematička znanja, vještine i procese te uspostaviti i razumjeti matematičke odnose i veze,
- biti osposobljeni za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada,

- razviti pozitivan odnos prema matematici, odgovornost za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim postignućima,
- prepoznati i razumjeti povijesnu i društvenu ulogu matematike u znanosti, kulturi, umjetnosti i tehnologiji te njezin potencijal za budućnost društva,
- biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje,
- učinkovito komunicirati matematička znanja, ideje i rezultate služeći se različitim prikazima,
- učinkovito primjenjivati tehnologiju,
- steći čvrste temelje za cjeloživotno učenje i nastavak obrazovanja (MZOS, 2010, str. 115-116).

U drugom poglavlju ovog rada navedeno je da su u *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* očekivana učenička postignuća organizirana u dvije dimenzije – matematičke procese i matematičke koncepte. Matematički procesi, koji opisuju opće matematičke kompetencije, su:

1. Prikazivanje i komunikacija,
2. Povezivanje,
3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje,
4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje, te
5. Primjena tehnologije (MZOS, 2010).

Navedene matematičke kompetencije su zapravo procesi putem kojih učenici usvajaju i primjenjuju matematičko znanje i vještine. Svi su procesi međusobno povezani i ne poučavaju se kao zasebne nastavne cjeline, već se trebaju uklopiti u sve nastavne sadržaje i sve godine učenja matematike. Da bi stekli navedene kompetencije, učenici trebaju imati dovoljno prilika za njihovo primjenjivanje nizom raznih aktivnosti u nastavi, što znači da u nastavi matematike trebaju prevladavati tzv. metode aktivne nastave (Čižmešija, Svedrec, Radović i Soucie, 2010). „Aktivnim učenjem smatramo svaki oblik učenja u kojemu učenik nije pasivni promatrač nego sudionik koji radom na izvršenju određenoga zadatka ili više zadataka pridonosi svom razvoju u kognitivnom, afektivnom ili motoričkom području povezanim s ciljem učenja.“ (Matijević i Radovanović, 2011, str. 68)

Kompetencije uključuju znanja, vještine, sposobnosti, vrijednosti i stavove (MZOS, 2010), što znači da stjecanje kompetencija podrazumijeva učenje u kognitivnom, afektivnom i motoričkom području (Matijević i Radovanović, 2011). Tradicionalna nastava je usmjerena uglavnom na kognitivno područje, dok se afektivno i motoričko zanemaruju (Mirković, 2012). U kognitivnom području se očekuje stjecanje znanja i mogućnost rješavanja problema uz pomoć tih znanja. U motoričkom području očekuje se stjecanje vještina za izrađivanje ili rješavanje praktičnih pitanja u svakodnevnom životu (Matijević i Radovanović, 2011). Afektivno područje pretpostavlja emocionalni (subjektivni) aspekt ponašanja pri učenju, a odnosi se na osjećaje, međuljudske odnose i razumijevanje drugih, stavove i vrijednosti. Afektivno područje ima također važan utjecaj na izgradnju kompetencija (Kraljević i Čižmešija, 2009). Navedena su područja poznata u literaturi pod nazivom *Bloomova taksonomija*. Bloomova taksonomija je najpoznatija taksonomija u području psihologije učenja i poučavanja, a donosi razine usvojenosti u navedenim područjima i glagole koji objašnjavaju i konkretiziraju te razine. Taksonomija može biti od pomoći nastavnicima pri konkretizaciji i operacionalizaciji ciljeva za konkretan nastavni sat ili čitav nastavni predmet te za procjenjivanje individualnih ili kolektivnih napredovanja u usvajanju kompetencija (Matijević i Radovanović, 2011).

Dakle, nastavne aktivnosti trebaju pridonijeti stjecanju raznih kompetencija, vještina, sposobnosti i kvaliteta osobe, što se ne može ostvariti u predavačko-prikazivačkoj nastavi u kojoj nastavnik nosi ulogu predavača, a učenici ulogu slušatelja (Matijević i Radovanović, 2011). Nastava usmjerena na učenika zahtijeva promjenu uloge nastavnika u organizatora, menadžera, mentora, instruktora i suradnika. Odabirom suvremenih didaktičkih strategija nastavnik može stvoriti razne metodičke scenarije te tako poboljšati kvalitetu nastave i povećati interes i motivaciju učenika. Važno je njegovo samovrednovanje radi unapređivanja odgojno-obrazovnog procesa i stvaranja ugodnog i poticajnog ozračja. U svom radu treba pokazati i razvijati svoj integritet, osobnu snagu, profesionalizam i sposobnost upravljanja. Za uspješan rad, nastavnik mora biti osposobljen za nove načine rada, koristiti nove metode u nastavi, pokazati svoju kreativnost i potaknuti učenike na aktivno učenje (Mirković, 2012).

U nastavku, Tablica 8 prikazuje osnovne karakteristike i razlike tradicionalne nastave i nastave usmjerene na učenika (Mirković, 2012).



Tablica 8: Karakteristike tradicionalne nastave i nastave usmjerene na učenika (Mirković, 2012)

<b>Tradicionalna nastava</b>	<b>Nastava usmjerena na učenika</b>
Pružanje informacija	Razmjena informacija
Činjenično, zasnovano na znanju	Kritičko mišljenje, informirano donošenje odluka
Učenici primaju informacije	Učenici preispituju i rješavaju probleme
Formalni izgled učionice	Fleksibilno, promjenjivo okruženje
Naglasak na učenju u svrhu pamćenja	Naglasak na razumijevanju/primjeni
Ocjenjivanje uglavnom tradicionalnim ispitivanjem	Raznoliko ocjenjivanje, uključujući rad na projektima
Pasivno učenje	Aktivno učenje zasnovano na istraživanjima
Jedan medij	Multimedija
Stimulacija jednog osjetila	Stimulacija više osjetila

Postoje različite metode i strategije za ostvarivanje ciljeva u nastavi koja je usmjerena na učenika. Jedna od njih je projektna nastava (Matijević i Radovanović, 2011).

## **5.2. Projektna nastava matematike**

Pojam *projekt* se u *Hrvatskom enciklopedijskom rječniku* definira kao „svaki zaokružen, cjelovit i složen pothvat čija se obilježja i cilj mogu definirati, a mora se ostvariti u određenom vremenu te zahtijeva koordinirane napore nekoliko ili većega broja ljudi, službi, poduzeća i sl.“ (prema Matijević i Radovanović, 2011, str. 165)

Projekt kao oblik rada se može iskoristiti u nastavi matematike. U razvijenim obrazovnim sustavima realizacija učeničkih projekata zauzima 30% godišnjeg broja nastavnih sati (Čižmešija, 2006). Čižmešija (2006) definira učenički matematički projekt kao rad tima učenika na složenijem matematičkom problemu. Rješavanje problema je osnova učenja matematike. Prema jednom od odgojno-obrazovnih ciljeva matematičkog područja *Nacionalnog okvirnog kurikulumu* učenici će „biti

osposobljeni za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima“ (MZOS, 2010, str. 115), a *Nastavni plan i program* navodi u cilju nastave matematike „stjecanje osnovne matematičke pismenosti i razvijanje sposobnosti i umijeća rješavanja matematičkih problema.“ (MZOS, 2006, str. 238) Pri rješavanju problema, primjenjujući svoje znanje, iskustvo i vještine, učenici ispituju i pronalaze metode kojima će doći do rješenja. U tom procesu pronalaženja metoda stječu nova znanja, vještine i razumijevanje matematičkih koncepata te razvijaju interes za matematiku (Zorić, 2013).

Projektna nastava omogućuje učenicima da budu aktivni u procesu učenja i da uče s razumijevanjem (Prodanović, 2013). Projekti trebaju biti orijentirani na proizvod (konačni produkt) koji se može prezentirati. Mogući proizvodi su matematički pano, plakat, članak, časopis, predavanja za druge učenike, radni materijali za druge učenike i sl. (Čižmešija, 2006).

U tradicionalnoj nastavi matematike zadatci su najčešće zatvorenog tipa. Zadatci zatvorenog tipa su točno određeni zadatci s najčešće jedinstvenim rješenjem i zadanom metodom rješavanja. U nastavu stoga treba uvesti više zadataka otvorenog i problemskog tipa koji podrazumijevaju samostalno istraživanje i mogućnost samostalnog izbora metode, odnosno, u nastavu treba uvesti rad na projektima (Čižmešija, 2006). Projekt pretpostavlja zadatke u kojima učenik mora samostalno istraživati kako bi pronašao metode kojima će riješiti zadatak (Zorić, 2013).

Svaki dobar projekt mora imati cilj i rezultirati proizvodom (konačnim produktom). Pretpostavlja složeniji zadatak koji se razlaže na jednostavije, rutinske. U pravilu uključuje rad više učenika (grupa) i podrazumijeva njihovu suradnju. Mora imati određeno vrijeme trajanja (Čižmešija, 2006). Projekti mogu biti različiti, a vrste projekata ovise o stupnju školovanja i nastavnim ciljevima i sadržajima. S obzirom na brojnost sudionika razlikuju se mali osobni projekti, razredni projekti i projekti cijele škole (Prodanović, 2013). Dakić (2011) navodi dva osnovna cilja koja se u projektnoj nastavi nastoje ispuniti. Prvi je svestranost obrade, odnosno, projekt mora obuhvatiti cjelinu sadržaja, iskoristiti i ona znanja koja je učenik stekao u drugim nastavnim područjima ili na neke druge načine. Drugi cilj je uvjeriti učenike u

učinkovitost matematike kao snažnog oruđa za rješavanje problema te ih poticati na učenje.

Osnovni cilj suvremene nastave matematike jest pripremiti učenike za uspješno snalaženje u svakodnevnom životu i svijetu rada (Dakić, 2011). S druge strane, tradicionalna nastava matematike rijetko izlazi iz okvira njenih matematičkih sadržaja i rijetko se povezuje sa svijetom, realnim životom i pravim problemima (Čižmešija, 2006). Škola mora osposobiti učenike za rješavanje stvarnih problema, za donošenje utemeljenih i razumnih odluka o životnim pitanjima, za brzo snalaženje na radnom mjestu, spremnost na suradnju i timski rad, za uporabu računala i digitalne tehnologije itd. (Dakić, 2011). *Nastavni plan i program* i *Nacionalni okvirni kurikulum* naglašavaju primjenu matematičkih znanja u svakodnevnom životu. „Nastavni program naglašava primjenu matematike na koju treba gledati i kao na praktični, koristan predmet koji učenici moraju razumjeti i mogu znati primijeniti na razne probleme u svojem okruženju.“ (MZOS, 2006, str. 238) „Tijekom matematičkoga obrazovanja učenici će uvidjeti važnost matematike u svojim životima, steći uvid u povijesni razvoj ove znanosti te spoznati njezinu ulogu i važnost u društvu tijekom prošlosti, sadašnjosti i budućnosti...Bavit će se matematičkim problemima koji proizlaze iz svakodnevnih, stvarnih i smislenih situacija i time uspostaviti poveznice između matematike i svakodnevnoga života te drugih područja odgoja, obrazovanja i ljudske djelatnosti.“ (MZOS, 2010, str. 115) U projektnoj nastavi se u pravilu obrađuju teme sa sadržajem iz realnog života, što je razlog za njezinu primjenu u nastavi (Dakić, 2011). Učenici koji uče matematiku kroz primjene u realnim, životnim situacijama, postižu razumijevanje i prepoznavanje važnosti učenja matematike (Zorić, 2013). Posebno je geometrija prikladno područje za kreativan, istraživački i projektni rad. Geometrija se može pronaći u biljkama i cvijeću, životinjama, strukturi sunčevog sustava, stijenama i kristalima, ali i u ostalim različitim područjima kao što su arhitektura i umjetnost. Veći dio našeg okruženja ima elemente geometrijske forme (Vlasnović i Cindrić, 2014).

Jedno od najčešćih pitanja koje nastavnici postavljaju jest kako uklopiti rad na projektu u nastavni proces. Najjednostavniji način je odabrati projekt koji se odnosi na sadržaj koji se trenutačno obrađuje u redovnoj nastavi. Drugi način je da se za

izradu projekta odvoji neko određeno vrijeme, nekoliko dana. Najčešći način za uvođenje projekata u nastavu je projekt koji se odvija u slobodno vrijeme učenika i nastavnika, a u redovnoj nastavi se prezentiraju dobiveni rezultati (Zorić, 2013).

Pri osmišljavanju projekta potrebno je zadovoljiti određene uvjete:

- projekt treba temeljiti na životnoj situaciji koja je učenicima smisljena,
- projekt treba zainteresirati učenike,
- učenici trebaju posjedovati matematičko znanje potrebno za rješavanje problema,
- projekt treba zahtijevati analizu, kritičko mišljenje i donošenje odluka,
- projekt treba od učenika zahtijevati formiranje plana za traženje rješenja (Zorić, 2013).

Projektna nastava obuhvaća sljedeće faze (prema Čižmešija, 2006):

0. faza – Priprema projekta
1. faza – Postavljanje problema
2. faza – Rad u grupama
3. faza – Integriranje radnih rezultata
4. faza – Matematički doprinos

#### 0. faza – Priprema projekta

Priprema projekta najprije podrazumijeva odabir projektne teme (Čižmešija, 2006). Nastavnik temu odabire u području interesa učenika (Prodanović, 2013). Važno je da tema bude specijalizirana radi lakšeg određivanja ciljeva i zadataka provođenja projekta (Janeš, 2009). Ovisno o nastavnikovom zamišljenom planu projekta, priprema podrazumijeva i određenu pripremu učenika. Najvažnije je da učenik posjeduje matematičko znanje potrebno za provođenje projekta. U pripremnoj fazi rješavaju se i organizacijska pitanja kao što su vremensko trajanje projekta, mjesto izvođenja te potrebni resursi (Čižmešija, 2006).

#### 1. faza – Postavljanje problema

U ovoj fazi slijedi postavljanje problema. Problem mora biti postavljen dovoljno otvoreno i složeno te, po mogućnosti, izlaziti iz okvira matematike. Nastavnici mogu problem postaviti samostalno ili zajedno s učenicima. Pritom mogu koristiti metodu

brainstorminga (navale ideja) (Čižmešija, 2006). Ova metoda omogućuje učenicima da slobodno izraze sva pitanja kojih se dosjete unutar dogovorenog tematskog okvira (Prodanović, 2013). Potom slijedi sređivanje i grupiranje učeničkih ideja te izbor problema koji će se obraditi (Čižmešija, 2006). U drugom slučaju, nastavnik može razgovorom voditi učenike do postavljenog problema koji je zamislio. Prije provedbe projekta nastavnik treba obavijestiti učenike o načinu rada te obrazložiti svoje zahtjeve i očekivanja. Potom se organiziraju skupine. Preporučuje se da izbor članova bude slučajan, ali također treba pripaziti i na individualne karakteristike i sposobnosti članova. U složenijim projektima broj članova trebao bi biti 4-6. Nastavnik može podijeliti članovima uloge kao što su voditelj, zapisničar, kontrolor vremena, kontrolor materijala, korektor i predstavljatelj (Zorić, 2013).

## 2. faza – Rad u grupama

Najvažniji dio procesa izrade projekta je rješavanje postavljenog problema. Zadatci koje je nastavnik predvidio za učenike trebaju biti osmišljeni tako da ih učenici mogu samostalno riješiti (Janeš, 2009). Pri rješavanju zadataka učenici prikupljaju potrebne podatke, upotrebljavaju pomoćna sredstva (npr. računalo) i komuniciraju s drugim grupama ako se njihovi zadatci djelom preklapaju (Čižmešija, 2006). Pritom smišljaju strategije koje će ih dovesti do rješenja. Nastavnik treba učenike upoznati s različitim strategijama rješavanja problema, ali i uputiti ih da je najbolja strategija ona koja učeniku najbolje odgovara. U projektnom radu se tako pokazuje da različiti učenici koriste različite strategije pri rješavanju istog problema (Zorić, 2013). Pritom nastavnik cijelo vrijeme nadgleda rad na projektu i intervenira prema potrebi. Tijekom izrade se može učiniti međurezime rada, odnosno skupine mogu podnijeti izvještaj o svojim dosadašnjim rezultatima u svrhu novih smjernica za rad od ostalih skupina ili nastavnika (Čižmešija, 2006).

## 3. faza – Integriranje radnih rezultata

U ovoj fazi učenici podnose izvještaj i prezentiraju svoj rezultat. Prezentacija rezultata može biti matematički pano, plakat, predavanje za druge učenike i dr. (Čižmešija, 2006). Prezentacija zahtijeva izlaganje te razvija govorničku vještinu i oslobađa od treme pred nastupom (Janeš, 2009). Razmjena iskustava, kritika i pohvala su važan aspekt rada na projektu. Nakon prezentiranja skupina, poželjna je kratka diskusija o uspješnosti pojedinih metoda koje su učenici koristili i koje su još

metode i mogućnosti mogli iskoristiti u radu. Učenici na taj način slušaju drugačija gledišta od vlastitih, vide da postoje raznoliki pristupi i metode rješavanja problema te da nisu jedini imali dvojbe i probleme pri njegovom rješavanju. Nedostatak samopouzdanja je najvjerojatnije najveći faktor koji učenike sprječava u uspješnom rješavanju problema zbog sumnje da oni nisu u mogućnosti riješiti taj problem. Nastavnik treba pokazati učenicima da se uspješno rješavanje problema postiže samo upornom i čestom vježbom. Nakon prezentiranja rezultata svih skupina, nastavnik komentira dobivene rezultate, povezuje ih i diskutira s učenicima kako je matematika primijenjena u svakodnevnom životu. Na samom završetku vrednuje ostvareni projekt (Zorić, 2013).

#### 4. faza – Matematički doprinos

Posljednja faza podrazumijeva sređivanje matematičkih rezultata i uspostavljanje njihove veze s nastavnim programom, a provodi je nastavnik kroz diskusiju s učenicima (Čižmešija, 2006).

Nastavnik u projektu nosi ulogu menadžera projekta. Vodi projekt, usmjerava ga i njime upravlja. Najprije pronalazi temu, formulira cilj te okvirno i detaljno planira tijek projekta. Osim toga, preuzima sljedeće zadatke:

- podjela učenika u skupine, ponekad i zajednički rad s učenicima,
- vođenje pri preciziranju postavljanja zadataka,
- vođenje zajedničkih rasprava,
- organiziranje podnošenja međuizvještaja,
- priprema učenicima novih i nepoznatih matematičkih i drugih pomoćnih sredstava,
- priprema medija za rad i objavu rezultata,
- priprema pomoći u radu (Čižmešija, 2006).

Tijekom izrade projekta obilazi skupine, potiče ih i ohrabruje, savjetuje, postavlja pitanja koja pomažu u razumijevanju problema te usmjerava njihov rad (Zorić, 2013).

Da bi projektna nastava bila uspješna, nije dovoljan samo trud, rad i entuzijizam nastavnika. U izradi projekta učenici moraju biti voljni preuzeti više odgovornosti

nego u redovnoj nastavi (Zorić, 2013). Osim rješavanja zadataka, učenici kao članovi skupine moraju međusobno komunicirati i surađivati. Ključna kvalifikacija koju trebaju posjedovati jest sposobnost timskog rada. Ona podrazumijeva suradnički rad i savladavanje konflikata u grupi, posebno sposobnost artikuliranog iskazivanja vlastitog mišljenja, sposobnost prihvatanja tuđih mišljenja te razvijanje sposobnosti za uzajamnu kritiku vlastitog i tuđeg rada (Čižmešija, 2006).

Kako se mijenjaju ciljevi i metode rada, tako bi se trebale mijenjati i metode praćenja i vrednovanja. Vrednovanjem nastavnici procjenjuju učinkovitost nastave, učeničko razumijevanje i usvojenost sadržaja (Zorić, 2013). Pitanje što i kako pratiti i procjenjivati tijekom ili na kraju rada na projektu, mnogim nastavnicima predstavlja poteškoću. Projektna nastava se ne organizira samo radi učenja informacija i stjecanja znanja, nego i radi stjecanja za život potrebnih kompetencija. Stoga valja analizirati i procjenjivati proces i rezultat aktivnosti pojedinaca i skupine tijekom rada (Matijević i Radovanović, 2011). Najvažnije je da nastavnik prije početka rada na projektu odabere što želi pratiti i vrednovati – usvojenost znanja, primjenu znanja, samostalnost u radu, praktičan rad, zalaganje ili nešto drugo (Prodanović, 2013). Od učenika se može zahtijevati da provedu samovrednovanje, odnosno ocijene svoj rad, komentiraju što su naučili tijekom izrade projekta, što im se svidjelo, a što im se nije svidjelo i sl. Na kraju projekta i nastavnik treba samovrednovati svoj udio u projektu (Zorić, 2013).

Zbog tradicionalne nastave matematike, rad na projektima od nastavnika zahtijeva određenu hrabrost za odstupanje od uskih okvira nastavnog plana, drukčijeg i zahtjevnijeg oblika nastave, za primjenu drukčijih nastavnih metoda, za savladavanje mogućih neočekivanih situacija i problema te moguć neizvjestan ishod projekta (Čižmešija, 2006). Često drugačiji ishod demotivira na ponovno provođenje projekta. Nastavnik treba znati da krajnji cilj projekta nije dobivanje izvanrednih rezultata, nego poticanje učenikove kreativnosti, davanje slobode i samostalnosti, pružanje osjećaja da zna i može, da suradnički uči i da zavoli matematiku (Janeš, 2009). Osim toga, projektna nastava motivira učenike da i u redovitoj nastavi više sudjeluju i ulažu više truda. Iako možda isprva ne prihvate oduševljeno projekte zadatke, Zorić (2013) prema svom iskustvu u nastavi navodi da učenike rad na projektu veoma brzo zainteresira. Samo nastavnik ne smije zaboraviti da stalna projektna nastava postaje

jedako dosadna kao i stalna frontalna nastava. Za uspješnu nastavu matematike potrebno je izmjenjivati različite nastavne metode (Čižmešija, 2006).

### **5.3. Provedba projekata na Učiteljskom fakultetu**

Kako u Hrvatskoj ima vrlo malo kvalitetnih projekata vezanih uz nastavu matematike (osobito razrednu nastavu matematike), u sklopu kolegija Metodika matematike 2, studenti 4. godine čakovečkog odsjeka Učiteljskog fakulteta sudjelovali su u izradi projekata. Studentima su na izbor bile ponuđene dvije teme: *Nula u množenju i dijeljenju* i *Kocka ili kvadrat*. Grupe studenata su odabranu temu prikazale na zanimljiv i scenski način. Njihove ideje i radove, koji se nalaze na web stranici <http://studentski-radovi.weebly.com/>, učitelji razredne nastave mogu iskoristiti u nastavi ili im mogu služiti kao poticaj za vlastiti sličan projekt (Glasnović Gracin, 2011).



## 6. PROVEDBA PROJEKTA U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE

### 6.1. Prijedlog projekta na temu *Kocka i kvadrat*

U nastavku slijedi prijedlog projekta na temu *Kocka i kvadrat* u razrednoj nastavi matematike. Projekt nosi naziv *Razlikujmo kocku i kvadrat!* Provedba projekta je predviđena u redovnoj nastavi u 4. razredu osnovne škole, nakon obrade tema *Kvadar i kocka* te *Obujam kocke* prema nastavnom programu. Razrađen je po svim fazama. Pri planiranju projekta korišteni su udžbenik za četvrti razred osnovne škole *Matematika 4* (Markovac, 2014) i metodički priručnik za učitelje *Matematika 4* (Markovac, 2004). U nastavku slijedi plan projekta.

#### 0. FAZA – Priprema projekta

Tema: *Kocka i kvadrat*

Cilj: razlikovati kocku (geometrijsko tijelo) i kvadrat (geometrijski lik) obzirom na njihova obilježja.

Zadatci:

a) obrazovni (materijalni):

- definirati i opisati kocku i kvadrat
- razlikovati kocku i kvadrat
- nabrojati i objasniti razlike između kocke i kvadrata
- prepoznati kocku i kvadrat u predmetima iz svakodnevnog života

b) funkcionalni:

- razvijati sposobnosti percipiranja
- razvijati geometrijsko mišljenje i logičko zaključivanje

c) odgojni:

- razvijati pozitivan odnos prema matematici
- razvijati samostalnost i odgovornost u radu
- razvijati sposobnost za rad u skupini

Vrsta nastavnog sata: Sistematizacija i ponavljanje

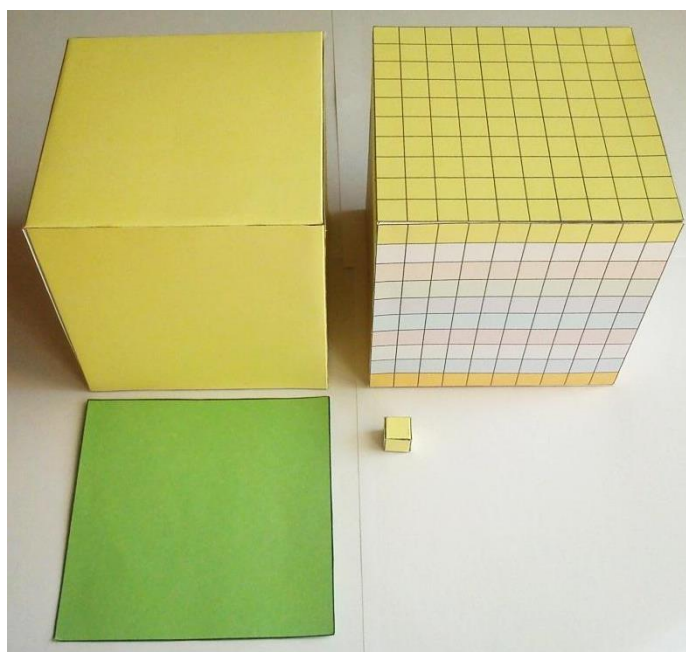
Trajanje: 90 min (blok-sat)

Mjesto izvođenja: učionica

Nastavna sredstva: udžbenik *Matematika 4*, kvadrat dimenzije 1 x 1 dm, kocka dimenzije 1 x 1 x 1 dm, kocka dimenzije 1 x 1 x 1 cm, kocka dimenzije 1 x 1 x 1 dm podijeljena na kubične centimetre, kocke od papira dimenzije 4 x 4 x 4 cm (Slika 11), fotografije ili crteži predmeta koji imaju oblik kvadrata, fotografije ili crteži predmeta koji imaju oblik kocke, rubikova kocka od papira, kocka za igru od papira, milimetarski papir.

Nastavna pomagala: geometrijski pribor, papir, pribor za pisanje, flomasteri, škare, ljepilo, plakat.

Slika 17. Nastavna sredstva



Priprema učenika za projekt na nastavnim satovima matematike:

- obrada nastavne cjeline *Kvadar i kocka*. Cjelina obuhvaća sljedeće nastavne jedinice: *Strane, bridovi, vrhovi, Jedinice za mjerenje obujma, Mjerenje obujma kocke*.

Samostalna priprema učenika:

Učenici prethodni sat dobivaju nastavni listić *Priprema za projektnu nastavu iz matematike*. Priprema obuhvaća:

- ponavljanje nastavnih cjelina *Pravokutnik i kvadrat* i *Mjerenje površina*. Cjelina *Pravokutnik i kvadrat* obuhvaća nastavne jedinice *Crtanje pravokutnika i*

*kvadrata, Opseg pravokutnika i kvadrata, a cjelina Mjerenje površina obuhvaća Jedinice za mjerenje površina, Mjerenje površine pravokutnika i kvadrata, Izračunavanje ploštine pravokutnika i kvadrata.*

- pripremu potrebnih sredstava za rad: potreban pribor (pribor za pisanje, škare, ljepilo, flomasteri), fotografije ili crteže predmeta koji imaju oblik kvadrata i predmeta koji imaju oblik kocke, kocke od papira dimenzije 4 x 4 x 4 cm. Mreža kocke nalazi se na nastavnom listiću.

### 1. FAZA – Postavljanje problema

Problem: *Zašto ponekad zamijenimo kocku i kvadrat?*

Uvodni dio projektne nastave započinje razgovorom nastavnika i učenika koji dovodi do problema. Razgovor se vodi u frontalnom načinu rada. Učenici na stolu imaju izrađenu kocku od papira. Nastavnik postavlja sljedeća pitanja (pretpostavljeni odgovori učenika nalaze se u zagradi):

- *Što držim u lijevoj, a što u desnoj ruci? (U lijevoj ruci kvadrat, u desnoj kocku – Slika 11)*
- *Što je kvadrat, a što kocka? (Kvadrat je geometrijski lik. Kocka je geometrijsko tijelo).*
- *Što znate o kvadratu? Što znate o kocki? Pokažite obilježja kocke na svojoj kocki. (Kvadrat je dio ravnine, omeđen je s četiri stranice jednake duljine, ima četiri prava kuta i četiri vrha. Kocka omeđuje prostor, omeđena je sa šest strana, strane su kvadrati, strane se sastaju u bridovima, a ima ih dvanaest, ima 8 vrhova. Obilježja kvadrata pokazuje jedan učenik na nastavnikovom kvadratu.)*
- *Što možemo izračunati iz ovog kvadrata? Što možemo izračunati iz ove kocke? (Možemo izračunati opseg kvadrata, a opseg je zbroj duljina svih stranica, kraće  $4 \cdot a$ ; možemo izračunati površinu kvadrata, a ona se izračunava množenjem duljina susjednih stranica, kraće  $a \cdot a$ . Možemo izračunati obujam kocke, obujam je prostor što ga kocka zauzima, a izračunava se množenjem duljina triju bridova koji izlaze iz istog vrha, kraće  $a \cdot a \cdot a$ .)*
- *Jeste li kad zamijenili kocku i kvadrat, rekli da je kvadrat kocka, a kocka kvadrat? Zašto?*
- *Što mislite, koliko često ljudi mijenjaju kocku i kvadrat?*

Najava projekta i određivanje cilja:

Nastavnik najavljuje projekt „Razlikujmo kocku i kvadrat!“ i određuje njegov cilj: razlikovati kocku i kvadrat obzirom na njihova obilježja. Najavljuje grupni rad u kojem će učenici raditi na zadacima iz nastavnog listića, navodi da očekuje aktivno sudjelovanje svih članova te da pri radu mogu koristiti udžbenik i sav ostali dostupni materijal.

Podjela u grupe:

Nastavnik prilagođava prostor tako da bude primjeren grupnom radu. Učenike dijeli u četiri heterogene skupine.

Priprema za rad:

Grupe pripremaju potreban materijal. Nastavnik dijeli grupama nastavne listiće s zadacima i provjerava imaju li grupe sav potreban materijal.

## 2. FAZA – Rad u grupama

Svaka grupa radi na svom projektu prema zadacima s *Nastavnog listića za projektni rad*. Dvije grupe paralelno rješavaju iste zadatke (1. i 2. grupa imaju iste zadatke, 3. i 4. grupa imaju iste zadatke). U nastavku su prikazani nastavni listići.

**Zadatak 1**

Potreban materijal: pribor za pisanje, kocka za igru, kocke od papira.

Zadatak:

Maja ima 40 kocaka za igru (vidi sliku 1). Igrala se slagajući kocke jednu do druge i jednu na drugu. Od tih 40 kocaka za igru želi na taj način složiti najveću moguću kocku koja će biti ispunjena tim kockama.

Koliko kocaka će Maja iskoristiti? Kako će biti velika ta kocka (koliki će biti njezini bridovi)? Izračunajte obujam te kocke.



Slika 1.

Prostor za računanje:

## **Zadatak 2**

Potreban materijal: pribor za pisanje, geometrijski pribor, milimetarski papir, škare, ljepilo.

### Zadatak:

Izradite „kvadratičastu“ kocku za igru. Iz milimetarskog papira izrežite kvadrat veličine  $4 \cdot 4$  cm i iz njega izradite „kvadratičastu“ kocku za igru.

Igrajte se s „kvadratičastom“ kockom kao s kockom za igru.

### Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. Može li se s „kvadratičastom“ kockom igrati na jednaki način? Opišite svoj dojam.

---

---

---

2. Promotrite „kvadratičastu“ kocku i kocku za igru. Po čemu se one razlikuju?

---

---

---

3. Koja su obilježja kvadrata, a koja su obilježja kocke? Imaju li kocka i kvadrat zajednička obilježja?

---

---

---

---

### **Zadatak 3**

Potreban materijal: papir, pribor za pisanje, geometrijski pribor, flomasteri, markeri, plakat, milimetarski papir, škare, ljepilo, kocke od papira, kocka za igru, fotografije i crteži predmeta oblika kocke ili kvadrata.

#### Zadatak:

Izradite plakat na temu „Kocka i kvadrat“.

Plakat treba sadržavati: – naslov

- crtež kvadrata i model kocke
- obilježja kocke i kvadrata
- savjete kako razlikovati kocku i kvadrat
- primjere iz svakodnevnog života (crteže i fotografije predmeta oblika kocke i kvadrata).

**Zadatak 1**

Potreban materijal: pribor za pisanje, rubikova kocka od papira, kocke od papira.

Zadatak:

Trgovina igračkaka ima 40 rubikovih kocaka (vidi sliku 1). Trgovac želi od tih 40 rubikovih kocaka, slagajući ih jednu do druge i jednu na drugu, načiniti najveću moguću kocku kako bi privukao kupce.

Koliko kocaka će trgovac iskoristiti? Kako će biti velika ta kocka (koliki će biti njezini bridovi)? Izračunajte obujam te kocke.



Slika 1.

Prostor za računanje:



## **Zadatak 2**

Potreban materijal: pribor za pisanje, geometrijski pribor, papir, milimetarski papir, škare, ljepilo, rubikova kocka.

### Zadatak:

Izradite „kvadratičastu“ rubikovu kocku. Iz milimetarskog papira izrežite kvadrat veličine  $4 \cdot 4$  cm i iz njega izradite „kvadratičastu“ rubikovu kocku.

Igrajte se s „kvadratičastom“ rubikovom kockom kao s rubikovom kockom.

### Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. Može li se s „kvadratičastom“ rubikovom kockom igrati na jednaki način? Opišite svoj dojam.

---

---

---

2. Promotrite „kvadratičastu“ rubikovu kocku i rubikovu kocku. Po čemu se one razlikuju?

---

---

---

3. Koja su obilježja kvadrata, a koja su obilježja kocke? Imaju li kocka i kvadrat zajednička obilježja?

---

---

---

---

### **Zadatak 3**

Potreban materijal: papir, pribor za pisanje, geometrijski pribor, flomasteri, markeri, plakat, milimetarski papir, škare, ljepilo, kocke od papira, rubikova kocka od papira, fotografije i crteži predmeta oblika kocke ili kvadrata.

#### Zadatak:

Izradite plakat na temu „Kocka i kvadrat“.

Plakat treba sadržavati: – naslov

- crtež kvadrata i model kocke
- obilježja kocke i kvadrata
- savjete kako razlikovati kocku i kvadrat
- primjere iz svakodnevnog života (crteže i fotografije predmeta oblika kocke i kvadrata).

#### 3. FAZA – Integriranje radnih rezultata

Grupe prezentiraju svoj rezultat rada. Predstavnik grupe se u kratkom izlaganju osvrne na proces rada na projektu, a potom ukratko predstavi plakat kao rezultat rada. Vrednovanje se provodi u obliku usmenog objavljivanja dojmova, odnosno učenici u frontalnom načinu rada usmeno izražavaju svoje dojmove o radu na projektu.

#### 4. FAZA – Matematički doprinos

Nastavnik u frontalnom načinu rada pita učenike što je najvažnije od onoga što su učili u ovoj projektnoj nastavi matematike. Po potrebi nadopunjava odgovore učenika te zaključava projekt.

## **6.2. Provedba projekta *Razlikujmo kocku i kvadrat!***

Projekt *Razlikujmo kocku i kvadrat!* proveden je u jednoj osnovnoj školi u Čakovcu u 4. razredu. Razred se sastojao od 24 učenika. U nastavku je opisana provedba projekta po fazama. Projekt se odvijao u blok-satu.

### 0. FAZA – Priprema projekta

Učenici su sat prije provedbe projekta obrađivali nastavne jedinice *Jedinice za mjerenje obujma* i *Mjerenje obujma kocke*. Na kraju tog sata dobili su nastavni listić *Priprema za projektnu nastavu iz matematike*.

### 1. FAZA – Postavljanje problema

Učenici su prije početka sata pripremili izrađene kocke od papira. Neki učenici su ih zaboravili donijeti, pa im je iste podijelila učiteljica. Uslijedio je razgovor u frontalnom načinu rada o kocki i kvadratu. Svrha tog razgovora bila je ponoviti obilježja kocke i kvadrata. Učenici su uglavnom znali odgovoriti na postavljena pitanja. Nešto teže od nabiranja i pokazivanja obilježja bilo im je određivanje opsega i površine kvadrata te obujma kocke. Nakon zajedničkog razgovora, učiteljica je ukratko ponovila bitna obilježja kvadrata i kocke koristeći metodu analogije. Potom je ponovila obujam kocke uz pomoć kocke dimenzije 1 x 1 x 1 dm podijeljene na kubične centimetre i kocke dimenzije 1 x 1 x 1 cm. Na pitanje „Jeste li kad zamijenili kocku i kvadrat?“ učenici nisu znali odmah odgovoriti, pa im je učiteljica postavila podpitanje kakve dresove nose hrvatski nogometaši. Odgovor je glasio „kockaste.“ Nakon toga, naveli su još dva primjera, bilježnicu na „kockice“ i „kockaste“ podne pločice. Na pitanje zašto ljudi mijenjaju kocku i kvadrat davali su odgovore zato jer su slični i zato jer je kvadrat strana kocke.

Učiteljica je potom najavila projekt, odredila njegov cilj te ukratko opisala provedbu projekta. Navela je svoja očekivanja od učenika te da učenici pri radu mogu koristiti sav dostupan materijal. Učenike je podijelila u četiri grupe od šest članova prije početka projekta. Nakon pripreme materijala, učenici su započeli s radom.

## 2. FAZA – Rad u grupama

Učenici su radili na svojim zadacima s Nastavnog listića za projektni rad. Učiteljica je stalno obilazila učenike i pratila njihov rad. Druga grupa je samostalno riješila 1. zadatak, dok su treća i četvrta grupa zadatak riješile uz malu pomoć učiteljice. Prva grupa nije uspjela riješiti zadatak unatoč danim uputama. U 2. zadatku su sve grupe izradile „kvadratičaste“ kocke, no nisu odgovorile na sva pitanja. Učiteljica je, zbog nedostatka vremena, uputila učenike da prijeđu na 3. zadatak. Također zbog nedostatka vremena, prva i druga grupa te treća i četvrta su izrađivale plakat zajedno.

## 3. FAZA – Integriranje radnih rezultata

Grupe su prezentirale svoj plakat. Plakati se nalaze u prilogima ovog rada. Predstavnici grupa su ukratko predstavili plakat kratkim izlaganjem što su sve prikazali na njemu. Učenici su potom iznosili svoje dojmove o radu na projektu, što su naučili, mišljenja o tome što im se sviđelo, što im se nije sviđelo, što im je bilo zanimljivo i što im je bilo teško. Naučili su razlikovati kocku i kvadrat po obilježjima. Najviše im se sviđela izrada plakata. To im je ujedno bilo i najzanimljivije, a najteži dio im je bio rješavanje zadataka. Zadatci su im još bili dosadni zato jer su trebali razmišljati.

## 4. FAZA – Matematički doprinos

Učiteljica je na kraju u razgovoru s učenicima zaključila što je najvažnije znati o kocki i kvadratu te zašto kocku i kvadrat ne smijemo zamijeniti.

### **6.3. Osobni osvrt na provedbu projekta**

Prvo s čime sam se suočavala bila je nezainteresiranost učenika. Morala sam ih neprestano i puno poticati na rad. To je povlačilo za sobom nesudjelovanje u grupi. U svakoj grupi je samo nekoliko učenika radilo na projektu. Nekoliko puta su učenici tužili druge što ne žele sudjelovati. Zbog takve atmosfere učenici su se duže zadržali na prvom zadatku nego što sam predviđjela. Tako sam, kad su bili na drugom zadatku, zbog nedostatka vremena i zbog toga jer i dalje nisu svi sudjelovali u radu, rekla da preskoče drugi zadatak i prijeđu na izradu plakata. Iz istog sam razloga spojila grupe tako da su dvije grupe zajedno izrađivale jedan plakat.

Prisustvovala sam osobno prethodnom satu i podijelila učenicima nastavni listić pod nazivom *Priprema za projektnu nastavu iz matematike*. Malo više od nekoliko učenika nije donijelo izrađene kocke od papira. To je dovelo do premalog broja kocaka za praktično rješavanje prvog zadatka iako sam pripremila više kocaka za takvu situaciju. Kad je jedna grupa riješila zadatak, kocke sam premjestila u drugu grupu. Samo je nekoliko učenika donijelo fotografije i crteže predmeta oblika kvadrata i kocke, ali to nije bio veliki problem. Iznenadilo me što su učenici na fotografijama umjesto kocke donosili kvadar. Na plakatima (Prilog 1 i Prilog 2) ima zalijepljenih kvadara, a nekoliko puta sam još spriječila učenike da ih zalijepe. Što se tiče nacrtanih kvadara, učenik se možda trudio i nije bio toliko vješt u crtanju trodimenzionalnog tijela, ali što se tiče fotografija se pitam znaju li učenici razlikovati kocku i kvadar. Na satu obrade, kojem sam prisustvovala kao promatrač, učenici također nekoliko puta nisu prepoznali kvadar odnosno kocku. Učenici su još griješili u određivanju stranice kvadrata. Neki učenici nisu bili sigurni koji dio kvadrata je njegova stranica, što se može također vidjeti na plakatima.

Činjenica je da nisam dovoljno poznavala razred pa nisam mogla predviđati što me očekuje. Moj zaključak je da treba primjenjivati projekte u nastavi, ali učenici kojima matematika ide nešto teže trebaju imati prilagođene zadatke, a za prilagodbu zadataka treba, naravno, dobro poznavati učenike. Također, učenici trebaju imati dobre kompetencije za rad u skupini koje se razvijaju samo primjenom rada u skupini. Na kraju, za jedan blok-sat predvidjela sam previše zadataka. Učitelj koji želi u razrednu nastavu matematike uvesti projektnu nastavu trebao bi započeti s manjim projektima i postepeno uvoditi veće projekte. Učenici su uglavnom naviknuti na predavačku nastavu te im je stoga potrebno vrijeme prilagodbe na projektni rad.

## 7. ZAKLJUČAK

Nastavnici su dužni držati se nastavnog plana i programa i obraditi sav sadržaj koji se njime propisuje. Često u tome vide obvezu koja je nužna za uspješno usvajanje nastavnog sadržaja. Nastavnik matematike mora proći sve teme propisane u *Nastavnom planu i programu*, ali ono važnije na što treba biti usmjeren jest razvijanje matematičkog mišljenja kod učenika. U nastavi geometrije je to razvijanje geometrijskog mišljenja. Preduvjet uspješnog razvijanja geometrijskog mišljenja je poznavanje strukture i načina učeničkog razumijevanja i poimanja geometrijskih pojmova. Najpoznatija teorija geometrijskog mišljenja je van Hieleleova teorija. Ono se razvija u tradicionalnoj nastavi matematike u dijelu sata koje se vodi kao heuristički razgovor, ali još više će se razvijati u nastavi koja je usmjerena samo na učenika. *Nacionalni okvirni kurikulum* ističe nastavu usmjerenu na učenika kao nastavu koja bi trebala prevladavati u hrvatskim školama. Činjenica je da primjena takve nastave ne zahtijeva samo promjenu nastavnog procesa, nego zahtijeva i promjenu uloga, kako nastavnika tako i učenika. Za oboje je nova uloga izazov. Nastavnik postaje organizator i voditelj i djelomično snosi odgovornost za uspješno provođenje nastave. Reagiranje učenika na takvu nastavu ovisi o vrsti nastave kojoj je do sada bio izložen. Ako se prvi puta susreće s nastavom usmjerenom na učenika, moguće je da neće znati reagirati, da se neće opustiti i potpuno aktivno sudjelovati u nastavi, jer za učenika je to velika promjena iz pasivne u aktivnu ulogu.

Projektna nastava je jedan od oblika nastave usmjerene na učenika. *Nacionalni okvirni kurikulum* ističe njezinu primjenu i ona se sve više uvodi u hrvatske škole. Nastava matematike se uglavnom zaobilazi kao predmet koji nema sadržaj koji bi se mogao obraditi u obliku projekta. Projekt u nastavi matematike zapravo podrazumijeva grupno rješavanje složenijeg matematičkog problema. Osim potrebnog matematičkog znanja, drugi i najvažniji preduvjet za uspješno provođenje projekta jest sposobnost rada u grupi. Odnosno, učenici trebaju imati određene kompetencije za rad u grupi kako bi zajedno uspješno riješili zadatak. Između ostalog, potrebno je poznavati učenike za postavljanje zadataka određene težine. To su uvjeti koji nisu teško ostvarivi. Sposobnost rada na projektu je kompetencija koja se traži u mnogim društvenim područjima i treba se početi razvijati već od najranijih razreda osnovne škole.

## LITERATURA

1. Čižmešija, Aleksandra (2006). *Projektna nastava matematike*. Sveučilište u Zagrebu: PMF – Matematički odjel.
2. Čižmešija, Aleksandra, Soucie, Tanja, Svedrec, Renata (2012). Primjena geoploče u nastavi matematike. *Poučak – Časopis za metodiku i nastavu matematike*, 13 (50), 25-39.
3. Čižmešija, Aleksandra, Svedrec, Renata, Radović, Nikol, Soucie, Tanja (2010). Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. U Mladnić, Petar, Svedrec, Renata (Ur.), *Zbornik radova Četvrtog kongresa nastavnika matematike RH* (str. 143-162). Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo i Školska knjiga.
4. Dadić, Ž. (1992). *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Zagreb: Školska knjiga.
5. Dakić, Branimir (2011). Inovacije u nastavi matematike. *Matematika i škola*, 13 (62), 52-59.
6. De Villiers, Michael (2008). Uloga i funkcija dokaza u matematici. *Poučak – Časopis za metodiku i nastavu matematike*, 9 (35), 4-33.
7. Glasnović Gracin, Dubravka (2009). *Nove tendencije u nastavi matematike*. Preuzeto (15. 8. 2015) sa <https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/nove-tendencije-u-nastavi-matematike/>.
8. Glasnović Gracin, Dubravka (2011). Projekt u razrednoj nastavi matematike. *Matematika i škola*, 12 (60), 204-206.
9. Gleizer, G. I. (2003). *Povijest matematike za školu*. Zagreb: Školske novine.
10. Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
11. Horvatek, Antonija (2006). *Analogije među osnovnim formulama*. Radni list. Preuzeto 18. 9. 2015. sa <http://www.antonija-horvatek.from.hr/8-razred/05-Geometrijska-tijela/Analogije-medju-osnovnim-formulama-Radni-list.pdf>.
12. Horvatek, Antonija (2006). *Analogije među formulama*. Preuzeto 18. 9. 2015. sa <http://www.antonija-horvatek.from.hr/8-razred/05-Geometrijska-tijela/Analogije-medju-formulama.ppt>.
13. Janeš, Sanja (2009). Istraživanja i projekti u matematici. *Matematika i škola*, 10 (50), 220-223.

14. Johnston-Wilder, Sue, Mason, John (2005). *Developing thinking in geometry*, London: Open University.
15. Jukić Matić, Ljerka, Matić, Ivan, Pavlović, Matea (2014). Geometrija i Sherlock Holmes. *Matematika i škola*, 15 (75), 195-201.
16. Kraljević, Hrvoje, Čižmešija, Aleksandra (2009). *Matematika u Nacionalnom okvirnom kurikulumu – ishodi učenja*. PMF – Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu.
17. Kurnik, Zdravko (2001). Metodika uvođenja novih pojmova. *Matematika i škola*, 3 (12), 55-56.
18. Kurnik, Zdravko (2009). *Znanstveni okviri nastave matematike*. Zagreb: Element.
19. Liebeck, Pamela (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Zagreb: Educa.
20. Markovac, Josip (2004). *Matematika 4: metodički priručnik za učitelje*. Zagreb: Alfa.
21. Markovac, Josip (2014). *Matematika 1: udžbenik za prvi razred osnovne škole*. Zagreb: Alfa.
22. Markovac, Josip (2014). *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole*. Zagreb: Alfa.
23. Markovac, Josip (2001). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
24. Markovac, Josip, Kulušić, Đurđa (2005). *Matematika 1: metodički priručnik za učitelje*. Zagreb: Alfa.
25. Matijević, Milan, Radovanović, Diana (2011). *Nastava usmjerena na učenika*. Zagreb: Školske novine.
26. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2010). *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno srednjoškolsko obrazovanje*. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta.
27. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta.
28. Mirković, Marina (2012). *Nastava usmjerena na učenika*. Preuzeto (15. 8. 2015) sa <https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2012/04/29/nastava-usmjerena-na-ucenika/>.
29. Opačić, Nives (2009). *Reci mi to kratko i jasno*. Zagreb: Novi Liber.



30. Prodanović, Milena (2013). *Projektna nastava*. Preuzeto (1. 9. 2015) sa [http://os-konjscina.skole.hr/upload/os-konjscina/images/static3/907/attachment/VU-Projektna\\_nastava.pps](http://os-konjscina.skole.hr/upload/os-konjscina/images/static3/907/attachment/VU-Projektna_nastava.pps).
31. Vlasnović, Helena, Cindrić, Maja (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van Hieleovoj teoriji. *Školski vjesnik – Časopis za pedagoška i školska pitanja*, 63 (1-2), 37-51.
32. Zorić, Željka (2013). Projekt: Prizemljen sunčev sustav. U Kuzmanović, Nenad (Ur.), *Zbornik radova Osmog stručno metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi* (str. 109-118). Pula: Matematičko društvo Istra.

### **Popis slika**

- Slika 1.        Kvadrat
- Slika 2.        Aktivnost *Slaganje trokuta*
- Slika 3.        Rješenje aktivnosti *Slaganje trokuta*
- Slika 4.        Aktivnost *Tangram*
- Slika 5.        Aktivnost *Grupiranje likova*
- Slika 6.        Aktivnost *Kvadrati i pravokutnici*
- Slika 7.        Aktivnost *Sastavljanje kocke*
- Slika 8.        Aktivnost *Sastavljanje geometrijskih tijela*
- Slika 9.        Aktivnost *Pogledi*
- Slika 10.       Aktivnost *Pogledi*
- Slika 11.       Kocka i kvadrat
- Slika 12.       Kocka i kvadrat – analogija
- Slika 13.       Primjer geoploče
- Slika 14.       Geoploča na papiru
- Slika 15.       Primjer slike na geoploči
- Slika 16.       Različiti prikazi kvadrata na geoploči
- Slika 17.       Nastavna sredstva

## Popis tablica

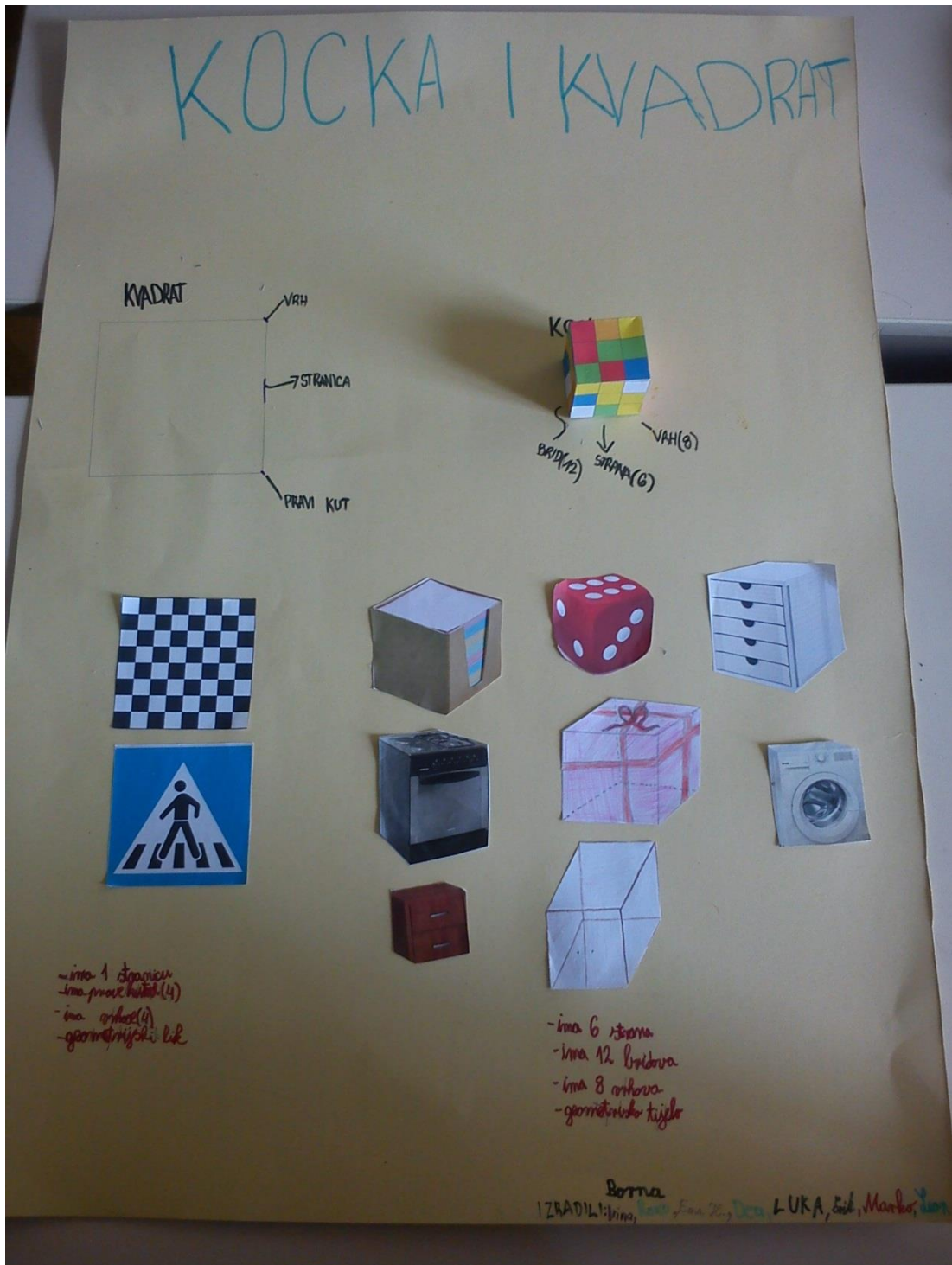
- Tablica 1. Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 1. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu*
- Tablica 2. Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 2. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu*
- Tablica 3. Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 3. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu*
- Tablica 4. Prikaz nastavnih tema iz geometrije u 4. razredu osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu*
- Tablica 5. Razine geometrijskog mišljenja
- Tablica 6. Pojam kocke i kvadrata od 1. do 4. razreda osnovne škole prema *Nastavnom planu i programu*
- Tablica 7. Pojam kocke i kvadrata u prvom odgojno-obrazovnom ciklusu prema *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*
- Tablica 8. Karakteristike tradicionalne nastave i nastave usmjerene na učenika

## PRILOZI

Prilog 1: Plakat *Kocka i kvadrat* koji su izradile prva i druga grupa



Prilog 2: Plakat *Kocka i kvadrat* koji su izradile treća i četvrta grupa



## ŽIVOTOPIS

### Osobni podaci

- **Ime i prezime:** Veronika Tkalec
- **Datum rođenja:** 22. ožujka 1992.
- **Adresa:** Miklavec 144c, 40315 Mursko Središće
- **Broj telefona:** + 385 99 845 9983
- **E-mail adresa:** tkalec.veronika5@gmail.com

### Obrazovanje

- **Fakultet:** Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet – Odsjek u Čakovcu, (2010.)
- **Srednja škola:** Ekonomska i trgovačka škola Čakovec, (2006.)

### Specifična znanja i vještine

- Rad na računalu (MS Office, Internet)
- Vozačka dozvola B kategorije
- Hrvatski znakovni jezik (polaznica III. semestra tečaja hrvatskog znakovnog jezika u Savezu Dodir)

## **Izjava o samostalnoj izradi diplomskog rada**

### **I Z J A V A**

Izjavljujem da sam diplomski rad izradila samostalno, koristeći se vlastitim znanjem i navedenom literaturom.

Zahvaljujem mentorici doc. dr. sc. Dubravki Glasnović Gracin za pomoć pri odabiru teme diplomskog rada te za sugestije i primjedbe tijekom njegove izrade. Također zahvaljujem svojoj obitelji na strpljenju i potpori tijekom studija.

**Potpis pristupnika**

---

Naziv visokog učilišta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

VČITELJSKI FAKULTET

**IZJAVA**

kojom izjavljujem da sam suglasan/suglasna da se trajno pohrani i javno objavi moj rad

naslov

KOCKA I KVADRAT KAO DIO PROJEKTNE NASTAVE MATEMATIKE

vrsta rada

DIPLOMSKI RAD

u javno dostupnom institucijskom repozitoriju

VČITELJSKOG FAKULTETA U SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).

U ČAKOVCU, 20. 11. 2015.

Ime Prezime

VERONIKA TKALEC

OIB

43028962391

Potpis

Veronika Tkalec