

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Karla Kušić

**OPERACIJE S OBLICIMA I PRIMJENA TANGRAMA
POTAKNUTA ČITANJEM PRIČE**

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

Karla Kušić

OPERACIJE S OBLICIMA I PRIMJENA TANGRAMA
POTAKNUTA ČITANJEM PRIČE

Diplomski rad

Mentorica rada:
izv. prof. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Sumentorica rada:
izv. prof. dr. sc. Marina Gabelica

Zagreb, srpanj, 2024.

Sadržaj

Sažetak.....	0
Summary.....	0
1. UVOD.....	1
2. POUČAVANJE GEOMETRIJE	3
2.1. Wittmannove fundamentalne ideje geometrije	3
2.2. Operacije s oblicima.....	4
2.2.1. Translacija.....	6
2.2.2. Osna simetrija	6
2.2.3. Centralna simetrija	7
2.2.4. Rotacija	8
2.3. Razvoj geometrijskog mišljenja.....	9
2.4. Kurikul geometrije u razrednoj nastavi.....	10
2.4.1. Geometrija u 1. razredu	11
2.4.2. Geometrija u 2. razredu	12
2.4.3. Geometrija u 3. razredu	13
2.4.4. Geometrija u 4. razredu	15
2.5. Fundamentalne ideje u kurikulu	17
3. TANGRAM.....	19
3.1. Osnovno o tangramu	19
3.1.1. Podrijetlo naziva slagalice	19
3.1.2. Legende o tangramu	20
3.1.3. Širenje tangrama.....	21
3.1.4. Izrada tangrama	24
3.1.5. Slagalice slične tangramu	26
3.2. Povezanost matematike i tangrama.....	29
3.2.1. Tangram pločice	29
3.2.2. Pitagorin poučak.....	30
3.2.3. Konveksne figure i teorem o tangramu	31
3.3. Tangram kao didaktičko sredstvo	33
3.3.1. Utjecaj tangrama na učenike.....	33
3.3.2. Tangram i razvoj geometrijskog mišljenja.....	34
3.3.3. Aktivnosti u radu s tangramom	35
4. ČITANJE PRIČA	37
4.1. Čitanje u razredu	37

4.2. Utjecaj dječje književnosti u nastavi matematike	39
4.3. Grandfather Tang's story (1990)	40
5. ISTRAŽIVANJE	41
5.1. Istraživačka pitanja	41
5.2. Sudionici	41
5.3. Instrument, postupak i analiza podataka	42
5.4. Rezultati istraživanja	43
5.4.1. Učenička anketa	43
5.4.2. Anketa za učitelje/učiteljice	52
5.4.3. Samorefleksija na održani sat	57
5.5. Zaključci istraživanja i rasprava	58
6. ZAKLJUČAK	60
Literatura	62
Prilozi	65
Izjava o izvornosti diplomskog rada	81

Sažetak

Učenici u svojem osnovnoškolskom obrazovanju u sklopu nastavnog predmeta Matematika usvajaju brojne sadržaje iz područja aritmetike i geometrije. Budući da je zastupljenost geometrijskih sadržaja u kurikulumima smanjena, a oni imaju važnu ulogu u razvijanju logičkog zaključivanja i prostornog zora, rješenje se pronalazi u izradi kurikula koji se temelji na fundamentalnim idejama. Ovaj rad stavlja naglasak na fundamentalnu ideju Operacije s oblicima. Njezina zastupljenost u trenutnom *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* je minimalna, odnosno pojavljuje se u prvom i drugom razredu osnovne škole u obliku preporuke za korištenje tangram slagalice putem koje bi učenici sastavljali i rastavljali oblike u ravnini. Upravo tangram slagalice može pomoći učenicima u razumijevanju geometrijskih sadržaja te razvijanju prostornog zora i geometrijskog mišljenja. Ovaj rad pruža pregled literature o fundamentalnim idejama i razinama geometrijskog mišljenja, o tangramu i njegovoj vezi s matematikom, utjecaju korištenja tangram slagalice kao didaktičkog sredstva na učenike i na razvoj geometrijskog mišljenja. Uz to, u radu su dani prijedlozi aktivnosti za učenike razredne nastave s tangramom s posebnim naglaskom na čitanju priča naglas te utjecaju takvog pristupa na učenike. U sklopu ovog rada detaljno je prikazana analiza rezultata istraživanja provedenog u 4. razredima osnovne škole s ciljem dobivanja uvida u učenička mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (Priča djeda Tanga). Kroz ovaj rad nastojalo se doprinijeti raspravi djelotvornijem poučavanju geometrijskih sadržaja u razrednoj nastavi te potaknuti na potrebu implementacije fundamentalne ideje Operacije s oblicima unutar kurikuluma.

Ključne riječi: geometrija, fundamentalne ideje, operacije s oblicima, tangram, čitanje naglas

Summary

Students acquire numerous contents from arithmetic and geometry filed in their primary school education. Given that the proportion of geometric content in curricula is reduced, but they play an important role in developing logical reasoning and spatial awareness, the solution is found in creating a curriculum based on fundamental ideas. This paper emphasizes the fundamental idea of Operation with shapes. Its representation in the current Curriculum for mathematics for elementary schools and gymnasias is minimal, that is, it appears in the first and second grade of primary school in the form of a recommendation for using a tangram puzzle through which students would split shapes into parts and combine them back onto a plane. The tangram puzzle can help students understand geometric content, develop spatial awareness and geometric thinking. This paper provides an overview of the literature on the fundamental ideas and levels of geometric thinking, the overview of the literature on the tangram puzzle and its connection with mathematics, as well as the impact of using the tangram puzzle as a didactic tool on the development of students' geometric thinking. In addition, the paper offers suggestions for activities with tangram puzzle for students in lower primary grades, emphasizing reading stories aloud and the impact of such an approach on students. As part of this work, a detailed analysis of the results of the research conducted in the 4th grade of primary school is presented to gain insight into the students' and teachers' opinions about the experience of using a tangram puzzle in combination with reading the story *Grandfather Tang's story*. Through this study, an effort has been made to contribute to the discussion on more effective teaching of geometric content in classroom teaching and to highlight the need for implementation of the fundamental idea of Operations with shapes within the curriculum.

Key words: geometry, fundamental ideas, operations with shapes, tangram, reading aloud

1. UVOD

Osnovnoškolsko obrazovanje učenicima pruža usvajanje temeljnih znanja iz brojnih predmeta te razvoj vještina i sposobnosti. Usporedbom kurikuluma obaveznih nastavnih predmeta za razrednu nastavu po broju sati na godišnjoj razini, Matematika se sa svojih 140 nastavnih sati nalazi odmah iza najzastupljenijeg predmeta, Hrvatskoga jezika. Matematika, kao nastavni predmet u osnovnoškolskom obrazovanju, svojim sadržajima iz područja aritmetike i geometrije te drugih matematičkih disciplina stvara temelje za daljnju nadogradnju sadržaja kroz školovanje, a koje pojedinac na svjesnoj ili nesvjesnoj razini primjenjuje u svakodnevnom životu. Matematika je u dokumentu *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, [MZO], 2019) podijeljena u pet domena, a posljednjih desetljeća zamijećeno je da se geometrijski sadržaji sve više smanjuju u nacionalnim kurikulumima (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019) pa tako ni domena Oblik i prostor, koja se odnosi na područje geometrije, u prva tri razreda osnovne škole ne obuhvaća ni četvrtinu ishoda tog nastavnog predmeta (MZO, 2019). Stoga se među istraživačima postavlja pitanje kvalitetnog kurikuluma za geometriju. Jedan od pristupa je razvoj kurikuluma oko tzv. fundamentalnih ideja, o kojima će biti riječi u drugom poglavlju ovog rada. Od sedam fundamentalnih ideja geometrije, Operacije s oblicima će biti od posebne važnosti u ovom radu pa će se objasniti što se točno podrazumijeva pod operacijama s oblicima, objasniti će se pojmovi izometrije ravnine: translacija, osna simetrija, centralna simetrija i rotacija, a time će se i ukazati na problematiku njihova nedostatka u Kurikulumu razredne nastave, a čija prisutnost bi imala utjecaj na razvoj geometrijskog mišljenja, povećanje motivacije kod učenika, vizualnih sposobnosti, sposobnosti rješavanja problema, razvoja fine motorike i komunikacije (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024). Drugo poglavlje detaljnije objašnjava razvoj geometrijskog mišljenja prema Van Hiele-u te spominje tangram slagalicu kao didaktičko sredstvo kojim se može poučavati geometrijski sadržaji, uočavati odnosi među oblicima i potaknuti na kreativno razmišljanje. Također, drugo poglavlje prikazuje analizu geometrijskih sadržaja pod domenom Oblik i prostor unutar Kurikuluma te stavlja poseban naglasak na prisutnost i/ili nedostatak upotrebe tangram slagalice u pojedinim razredima. Nakon analize domene, opisat će se prisutnost opisanih fundamentalnih ideja u *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* (MZO, 2019), a time će se i otvoriti pitanje potrebe implementacije fundamentalne ideje Operacije s oblicima unutar kurikuluma.

Iduće poglavlje odnosi se na tangram slagalicu. Tangram slagalica, čija popularnost raste iz dana u dan, može pomoći pri motivaciji učenika, približavanju geometrijskog sadržaja učenicima, može potaknuti učenike na zapažanje, analizu oblika, logično razmišljanje, razvoj geometrijskog prostornog razmišljanja s posebnim naglaskom na razvoj geometrijske imaginacije koja predstavlja sposobnost predodžbe geometrijskih oblika, njihovih veličina, položaja te promjene položaja i oblika u prostoru (Khairiree, 2015).

U trećem poglavlju opisana je tangram slagalica i podrijetlo njezina naziva. Opisano je i nekoliko legendi o tangramu, opisano je širenje tangrama kroz povijest, izrada tangrama te su navedene i prikazane neke slagalice slične tangramu. Treće poglavlje odnosi se i na povezanost matematike i tangrama gdje su prvo opisani dijelovi tangrama - tanovi. Prikazana je matematička pozadina tangrama: Pitagorin poučak, konveksne figure i teorem o tangramu. Također, treće poglavlje sagledava tangram slagalicu kao didaktičko sredstvo te se opisuju utjecaj njezine primjene na učenike i na razvoj njihovog geometrijskog mišljenja te se na kraju opisuju aktivnosti koje se mogu provesti s učenicima. Budući da tangram slagalicom možemo prikazati različite tangram likove, u ovom se radu ona povezuje i s čitanjem priča. Stoga je u četvrtom poglavlju opisano čitanje priča naglas, njihov utjecaj na djecu, važnost primjene te utjecaj čitanja naglas u razredu. Posebno će biti riječi o utjecaju dječje književnosti u nastavi matematike s posebnim opisom knjige *Grandfather Tang's story* (1990) koja omogućuje učenicima da prikažu likove iz priče pomoću tangram slagalice.

Budući da tangram slagalica i čitanje priča naglas imaju brojne pozitivne učinke na učenike, u sklopu ovog rada provedeno je i kvalitativno istraživanje, opisano u petom poglavlju. Istraživanje je provedeno u svibnju 2024. godine u deset četvrtih razreda u tri osnovne škole na području Grada Zagreba s ciljem dobivanja uvida u učenička mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (1990), kao i dobivanje uvida u mišljenje učitelj/učiteljica na nastavni sat. Analizom anketa, odnosno rezultatima istraživanja, nastoji se prikazati mogućnost djelotvornijeg i inovativnijeg poučavanja geometrijskih sadržaja u razrednoj nastavi te potaknuti na potrebu implementacije fundamentalne ideje Operacije s oblicima unutar kurikuluma.

2. POUČAVANJE GEOMETRIJE

2.1. Wittmannove fundamentalne ideje geometrije

Smanjenje geometrijskog sadržaja u kurikulumima i kriza koja je zavlada u nastavi geometrije otvorila je i potaknula brojne diskusije među istraživačima matematičkog obrazovanja, a rješenje pronalaze u izradi koherentnog kurikula geometrije temeljenog na tzv. fundamentalnim idejama. Također, ističe se nužnost razmatranja ciljeva nastave geometrije i usklađivanja geometrijskog obrazovanja među državama (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Fundamentalne ideje mogu se opisati „kao matematičke ideje koje su snažno povezane s realnošću i mogu se iskoristiti za stvaranje različitih aspekata i pristupa matematici“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b, str. 148). Također, fundamentalne ideje se mogu opisati i kao skup tehnika koje se mogu pronaći u povijesnom razvoju matematike, koje se protežu čitavom vertikalom u kurikulu, a koje nastavu čine transparentnijom i fleksibilnijom te uključuju i odgovarajući lingvistički ili akcijski prototip svakodnevnog života (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b).

Njemački metodičar matematike Erich Wittmann predložio je sedam fundamentalnih ideja oko kojih bi školska geometrija trebala biti organizirana. U tablici 1 nalazi se svih sedam fundamentalnih ideja i opisi svake od njih, a to su: Geometrijski oblici i njihove konstrukcije, Operacije s oblicima, Koordinate, Mjerenje, Uzorci, Oblici iz svakodnevnice i Geometrizacija (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Fundamentalne ideje odgovaraju smjernicama ICMI studije za kreiranje novih kurikuluma geometrije te one mogu poslužiti kao dobar temelj u stvaranju novih kurikuluma, kao i u razmatranju prohodnosti opisanih ideja obrazovnom vertikalom (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Fundamentalna ideja Operacije s oblicima bit će od posebne važnosti u ovom radu, a detaljnije će biti obrađena u idućem potpoglavlju.

Tablica 1.

Wittmannove fundamentalne ideje (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b)

FUNDAMENTALNA IDEJA	OPIS
Geometrijski oblici i njihove konstrukcije	Temelji se na trodimenzionalnom prostoru, te se usredotočuje na sposobnost usvajanja i spoznavanja jednodimenzionalnih, dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata – geometrijskih tijela i ostalih dijelova prostora, koje je moguće prikazati na brojne načine kojima se obilježavaju njihova svojstva, npr. materijalima, crtanjem i geometrijskim priborom.

Operacije s oblicima	Razumijevanje raznih geometrijskih operacija, npr. translacije, rotacije, zrcaljenja, centralne simetrije, homotetije, kombinacije preslikavanja te njihovog utjecaja na svojstva objekata s kojima se operira.
Koordinate	Različiti načini opisivanja pozicije različitih geometrijskih objekata moguća je pomoću koordinatnog sustava.
Mjerenje	Svaki geometrijski objekt može se kvalitativno i kvantitativno opisati, npr. obujam, površina.
Uzorci	Za nastajanje brojnih geometrijskih uzoraka, postoje brojne mogućnosti povezivanja točaka, pravaca, likova i tijela.
Oblici iz svakodnevnice	Stvarni objekti, npr. skulpture i slike, te operacije među njima moguće je opisati pomoću geometrije.
Geometrization	Objekte, svojstva i probleme iz okruženja moguće je prevesti u jezik geometrije, a u tom kontekstu važnu ulogu ima deskriptivna geometrija sa svojim projekcijama.

2.2. Operacije s oblicima

Geometrijski oblici omogućuju izvođenje različitih operacija poput translacije, rotacije, zrcaljenja, mogu se smanjivati ili povećavati, projicirati na ravnini, smicati, dijeliti na razne dijelove te kombinirati s drugim figurama i oblicima kako bi se formirali složeniji oblici, no potrebno je i istražiti kako manipulacija svakog oblika utječe na njihov prostorni odnos i svojstva (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019a). Istraživanje provedeno s učenicima 1.- 4. razreda osnovne škole s ciljem otkrivenja zastupljenosti fundamentalnih ideja u geometriji i analizom njihovih crteža o tome što oni misli da je geometrija, pokazalo je najveću zastupljenost fundamentalne ideje Geometrijski oblici i njihove konstrukcije (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019a). Fundamentalne ideje Operacije s oblicima i Geometrization uopće nisu bile zastupljene, no i razina zastupljenosti ostalih fundamentalnih ideja pokazala se poprilično niskom (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019a). Na temelju rezultata istraživanja, zaključeno je kako učenici imaju usku sliku o tome što je geometrija te se „ukazuju na dodatna promišljanja školskog kurikula za matematiku vezano uz višedimenzionalnost i raznolikost geometrije“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019a, str. 34). Novim istraživanjem, autorice Glasnović Gracin i Kuzle (2024) navode kako se fundamentalna ideja Operacije s oblicima nalazi samo u 1. i 2. razredu i to u obliku preporuke za korištenje tangram slagalice kojom bi učenici sastavljali i rastavljali oblike u ravnini.

„U kurikulumu primarnog obrazovanja od velike su važnosti sadržaji simetrije, sastavljanja, presavijanja i popločavanja“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024, str. 93). Autorice objašnjavaju kako je za početno učenje geometrije bitno usvojiti koncept sastavljanja i

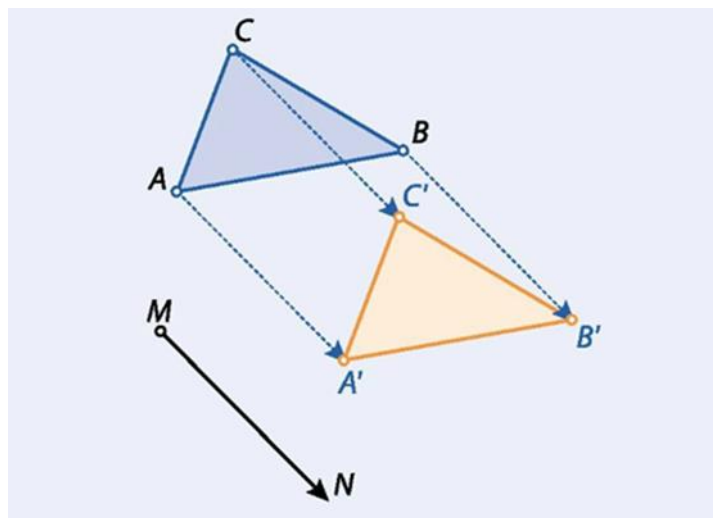
rastavljanja jer to čini temelj za mjerenje površine, oplošja ili volumena koje će učenici provoditi u višim razredima. Također, autorice napominju da aktivnosti presavijanja i rasklapanja uopće nisu prisutne u analiziranim matematičkim kurikulumima u Hrvatskoj, a od velike su važnosti jer njihovom upotrebom dolazi do „povećanja učeničke motivacije, poticanja geometrijskog mišljenja, vizualnih sposobnosti, rješavanja problema, komunikacije i poboljšanja fine motorike“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024, str. 93). Jones (2002) ističe da ključne ideje geometrije uključuju invarijantnost, simetriju i transformaciju pa ih je time potrebno implementirati u sve dijelove geometrijskoga kurikula. Simetrija, koja se pojavljuje u opisu fundamentalne ideje Operacije s oblicima, temeljni je dio geometrije, prirode i oblika te je od temeljne važnosti za naše prostorno razumijevanje i stvaranja obrazaca koji nam olakšavaju konceptualno organizirati naš svijet (Knuchel, 2004). Glasnović Gracin i Kuzle (2024) navode kako simetrija u primarnom obrazovanju pomaže u „razvijanju vizualnih i prostornih sposobnosti te potiče kreativnost i maštu“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024, str. 93). Također, Knuchel (2004) objašnjava kako je simetriju moguće pronaći svuda oko nas te da ljudi često u svojim zanimanjima koriste koncepte simetrije, uključujući translaciju, rotaciju, refleksiju i popločavanje, a da toga nisu ni svjesni. Stoga, bavljenje simetrijama u nastavi geometrije dok se učenici još nalaze na osnovnoj razini može biti značajno za razumijevanje i prepoznavanje simetrije u njihovom okružju (Knuchel, 2004).

Osim fizičke rotacije oblika, koja se također pojavljuje u opisu fundamentalne ideje Operacije s oblicima, dolazi i do mentalne rotacije. Mentalna rotacija je sposobnost brze i precizne dvodimenzionalne ili trodimenzionalne rotacije objekte koja se događa u našem umu (Linn i Peterson, 1985; prema Lin i Chen, 2016). Djeca mlađa od sedam godina mogu zapamtiti samo početan i konačan položaj objekta, a ne mogu zapamtiti i reproducirati ono što se događa između, no djeca koja imaju više od sedam godina imaju sposobnost razvijanja mentalne rotacije (Estes, 1998; Kerr i sur., 1980; prema Lin i Chen, 2016). Također, „građenje i manipulacija mentalnog prikaza dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika i percipiranje objekata iz različitih perspektiva važan je aspekt geometrijskog mišljenja“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 37-38). Kako bi se geometrijski pojmovi usvojili i razumjeli, učenici bi trebali pokazati svoje znanje i sposobnost prikazivanja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika kroz crtanje, konstrukcijama kockica, dramatizacijom i riječima te bi trebali analizirati i proučiti oblike koje nastaju dekompozicijom, odnosno rastavljanjem i sastavljanjem nekih novih oblika (Vlasnović i Cindrić, 2014).

2.2.1. Translacija

Izometrija ravnine je preslikavanje koje čuva udaljenost između točaka, što znači da je udaljenost između slika tih točaka jednaka, a čine ju: translacija, rotacija, osna simetrija i centralna simetrija (Antunović Piton i sur., 2022).

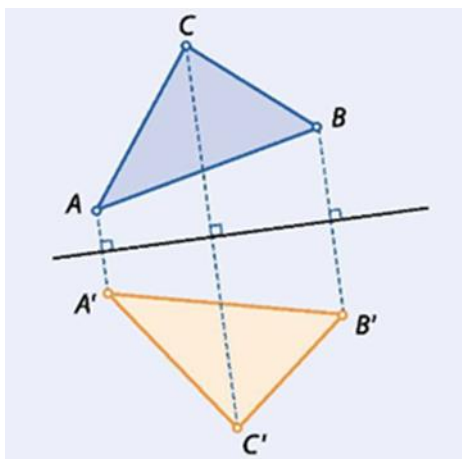
Translacija je „preslikavanje ravnine pri kojem usporedno preslikavamo skupove točaka za istu udaljenost. Smjer, duljinu i orijentaciju translacije određuje vektor kojim je translacija zadana“ (Antunović Piton i sur., 2022, str. 146). Slika 1 prikazuje trokut $\triangle ABC$ i njegovu translaciju tako da vrijedi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{MN}$.



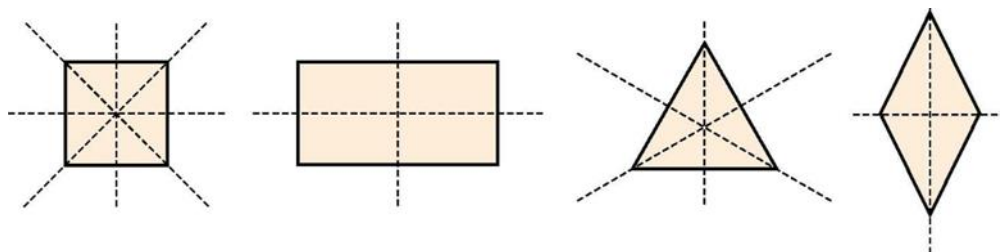
Slika 1. Translacija (Antunović Piton i sur., 2022, str. 147)

2.2.2. Osna simetrija

Osna simetrija čuva udaljenost među točkama pa tako i veličine kutova te se svaki geometrijski lik pri osnoj simetriji preslika u sukladan lik, a za lik kažemo da je osnosimetričan ako postoji najmanje jedan pravac (os simetrije) s obzirom na koji se lik preslika u sama sebe (Antunović Piton i sur., 2022). Slika 2 prikazuje osnosimetričnu sliku trokuta $\triangle ABC$ s obzirom na pravac p , stoga vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Slika 3 prikazuje osnosimetrične likove i njihove osi simetrije (Antunović Piton i sur., 2022).



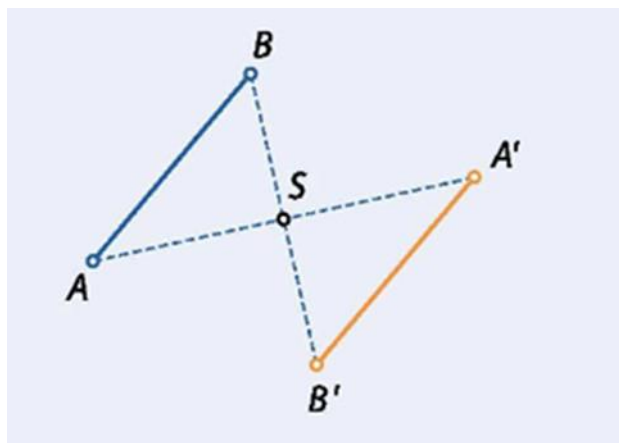
Slika 2. *Oсна симетрија* (Antunović Piton i sur., 2022, str. 148)



Slika 3. *Osnosimetrični likovi i njihove osi simetrije* (Antunović Piton i sur., 2022, str. 149)

2.2.3. Centralna simetrija

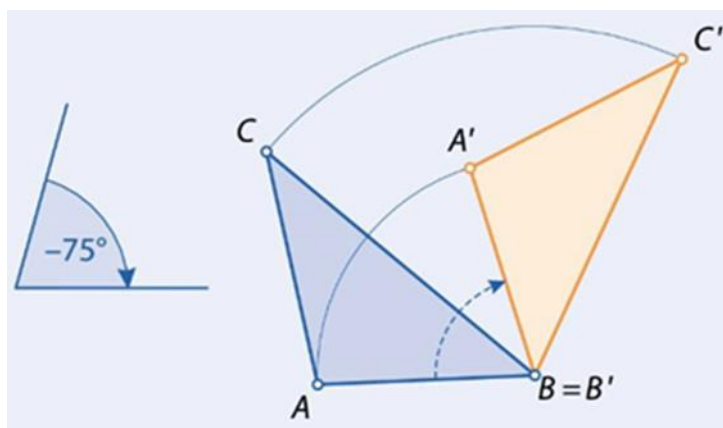
Centralna simetrija je preslikavanje ravnine, a kao i kod osne simetrije, centralna simetrija čuva udaljenost među točkama pa i veličine kutova te svaki geometrijski lik se pri centralnoj simetriji preslika u njemu sukladan lik (Antunović Piton i sur., 2022). Slika 4 prikazuje konstrukciju centralnosimetrične slike dužine. Centralnom simetrijom dužina se preslika u njoj sukladnu i usporednu dužinu, a nastaje crtanjem dužine \overline{AB} i točke S koja joj ne pripada, zatim se konstruira centralnosimetrična slika dužine \overline{AB} s obzirom na točku S, a na kraju se ravnalom ili šestarom usporede njihove duljine tako da vrijedi $|AB| = |A'B'|$ (Antunović Piton i sur., 2022).



Slika 4. Centralna simetrija (Antunović Piton i sur., 2022, str. 150)

2.2.4. Rotacija

Rotacija je preslikavanje ravnine na način da „zaokrenemo“ neki skup točaka oko jedne točke u ravnini za zadani kut (Antunović Piton i sur., 2022). Rotiramo li figuru u ravnini oko neke točke, tu točku nazivamo središte rotacije, a osim samog središta važan je i smjer rotacije koji može biti negativan ili pozitivan (Antunović Piton i sur., 2022). Smjer rotacije u smjeru gibanja kazaljki sata nazivamo negativan smjer rotacije, a smjer suprotan gibanju kazaljki na satu nazivamo pozitivan smjer rotacije (Antunović Piton i sur., 2022). Slika 5 prikazuje rotaciju trokuta $\triangle ABC$ oko jednog njegovog vrha B kao središta rotacije za kut od 75° u negativnom smjeru. Možemo uočiti da se točka B preslika u sebe samu, tj. $B = B'$. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su sukladni.



Slika 5. Rotacija (Antunović Piton i sur., 2022, str. 155)

Suvremeni pristup u poučavanju geometrije obuhvaća, između ostaloga, stavljanje naglaska na transformacije, odnosno na translaciju, rotaciju i osnu simetriju, a jedna od metoda koja bi potaknula i kreativno razmišljanje je upotreba matematičkih zagonetki. Upravo je

tangram slagalica idealno didaktičko sredstvo kojim učenici mogu uočiti odnose između svakog tana (dijela slagalice) koji će koristiti za sastavljanje određene figure, a time će i uočiti da oblik tana ostaje isti bez obzira kako se okreće, zaokreće ili povlači (Khairiree, 2015).

2.3. Razvoj geometrijskog mišljenja

Van Hiele (1999) navodi kako poučavanje geometrije prvenstveno započinje raznim aktivnostima koje učenici shvaćaju kao igru, a mogu se koristiti razni mozaici, blokovi s uzorcima i slagalice kao što je tangram te se po polasku u školu učenicima znanje iz geometrije proširuje raznim istraživanjima, ispitivanjima i uspoređivanjima (Vlasnović i Cindrić, 2014). No, mnogim učenicima učenje geometrije često predstavlja problem, a posebice „pri vizualizaciji određenih geometrijskih sadržaja, kao i pri zaključivanjima koja se na njima temelje, što je često rezultat neprimjerenog poučavanja, a ono je pak posljedica nedovoljnog poznavanja geometrijskih koncepata i razina mišljenja potrebnih za njihov razvoj“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 81). Stoga je van Hiele (1999) izdao teoriju o razinama mišljenja kroz koje učenici prolaze prilikom učenja sadržaja iz geometrije. Teorija se sastoji od pet razina mišljenja, od čega se tri ostvaruju u nižim razredima osnovne škole. „Na svakoj sljedećoj razini usvajaju se nova znanja, a da bi se dosegla sljedeća razina, potrebno je usvojiti prethodnu. To zavisi isključivo o razumijevanju određenog gradiva i percepciji cjelokupnog koncepta, a ne samo o usvajanju činjeničnog znanja“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 40).

Van Hiele (1999) objašnjava važnost neverbalnog mišljenja kao polazišta racionalnog mišljenja jer većinu stvari i osoba koje promatramo prepoznamo na neverbalnoj razini pa tako i u geometriji postoji neverbalna razina mišljenja koje je potaknuta vizualnim prikazom. Naime, učenici na razini vizualizacije prvo samo prepoznaju geometrijske likove isključivo na osnovi izgleda, bez poznavanja njihovih osobina - i to predstavlja neverbalno mišljenje. Na drugoj, deskriptivnoj razini, učenici prepoznaju svojstva, no nisu u stanju stvoriti vezu između njih, odnosno znaju nabrojati osobine, ali ih ne mogu logički poredati. Učenici izvlače zaključke induktivno, no tek na razini neformalne dedukcije učenici shvaćaju odnose između geometrijskih likova i mogu ih logično poredati (van Hiele, 1999). „Učenici mogu vidjeti da jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog, i iz toga mogu izvesti jedno svojstvo iz drugog. Mogu primijeniti ono što već znaju kako bi objasnili odnose među oblicima i kako bi formulirali definicije“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 43).

2.4. Kurikul geometrije u razrednoj nastavi

Geometrija kao vrlo važan dio matematike omogućuje „prikazivanje, opisivanje i svakodnevno snalaženje u svijetu u kojem živimo. Zato je jedan od glavnih ciljeva matematičkog obrazovanja podizanje razine geometrijskog mišljenja učenika, koje je neophodno za primjenu geometrije“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 81). Ako se geometrijski sadržaj prezentira tako da mu se može pristupiti problemski i istraživački, tada takav rad učenicima može „pomoći u razvijanju logičkog zaključivanja i rješavanju nekih algebarskih i aritmetičkih problema. Razvijanje prostornog zora važan je oblik rješavanja problema, a rješavanje problema jedan je od glavnih temelja učenja matematike“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 39).

U posljednjih nekoliko desetljeća u mnogim državama zamjetno je smanjen udio geometrijskih sadržaja u nacionalnim kurikulumima, a pretpostavlja se da su uzrok tomu razni pokušaji uvođenja novijih matematičkih disciplina u nastavu matematike, kao što su algebra, vjerojatnost i statistika (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019). *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* je polazišni dokument cjelokupnog obrazovanja u Republici Hrvatskoj po pitanju matematičkog obrazovanja, a time i za obrazovanje učenika razredne nastave. „Učenje i poučavanje nastavnoga predmeta Matematika ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena“ (MZO, 2019, str. 243). Pod matematičkim procesima podrazumijevamo prikazivanje i komunikaciju, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjenu tehnologije, dok su matematičke domene: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost (MZO, 2019).

Domena Oblik i prostor uključuje proučavanje oblika, njihovih položaja i odnosa, a posebno se ističe važnost prostornog zora koji uz geometrijsko rasuđivanje omogućuje razvoj sposobnosti misaone predodžbe objekta i prostornih odnosa. Učenici će u sklopu ove domene rastavljanjem i sastavljanjem oblika uspoređivati svojstva i stvarati veze između njih te na temelju istih izvoditi pretpostavke i tvrdnje koje će dokazivati crtežima i algebarskim izrazima. Također, učenici će geometrijskim priborom i tehnologijom vršiti geometrijske transformacije, istraživanja, shvatiti koncepte sukladnosti i sličnosti te će moći prepoznati ravninske i prostorne oblike, njihova svojstva u svakodnevnom okruženju i upotrebljavati iste za opis i analizu svijeta koji ih okružuje (MZO, 2019).

2.4.1. Geometrija u 1. razredu

Geometrijski sadržaji u prvom razredu osnovne škole, kao što je navedeno u tablici 1, kreću se od upoznavanja i imenovanja geometrijskih tijela: kugla, valjak, kocka, kvadar, piramida, stožac na konkretnim modelima i njihovim povezivanjem s oblicima objekata u prostoru, a preko ploha geometrijskih tijela učenici upoznaju geometrijske likove: trokut, kvadrat, pravokutnik i krug. Uz geometrijska tijela i likove, učenici će naučiti prepoznati ravne i zakrivljene plohe te moći prepoznati i istaknuti točke (MZO, 2019). „Različita obrazovna istraživanja potvrđuju da učenici spomenute vještine mogu razvijati kroz ciljano odabrane i primjereno osmišljene tangram aktivnosti“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 81 – 82). Upravo se u dokumentu *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije za ostvarenje odgojno-obrazovnog ishoda MAT OŠ C.1.1.*, pod preporukama za ostvarivanje tog odgojno-obrazovnog ishoda, vidljivog u tablici 2, naglašava važnost korištenja konkretnih materijala u nastavi, poput slagalice tangram. kojom bi se provodile aktivnosti u kojima učenici slažu i razlažu različite modele geometrijskih oblika, počevši prvo od slaganja prema zadanom predlošku, a potom do slaganja likova prema zadanim kriterijima (MZO, 2019). Takve aktivnosti omogućuju učenicima da samostalno uoče odnose veličina i oblika između dijelova slagalice, a u dokumentu se također navodi i činjenica da se provođenjem takvih aktivnosti mogu postaviti dobri temelji za učenje množenja i dijeljenja i objašnjavanje pojmova cjeline i polovine (MZO, 2019).

Tablica 2.

Domena C – Oblik i prostor – 1. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda	Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda
MAT OŠ C.1.1. Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okružju.	- Imenuje i opisuje kuglu, valjak, kocku, kvadar, piramidu i stožac. - Imenuje ravne i zakrivljene plohe. - Ravne plohe geometrijskih tijela imenuje kao geometrijske likove: kvadrat, pravokutnik, trokut i krug.	- S učenicima je potrebno provoditi niz aktivnosti koje uključuju slaganja i razlaganja modela geometrijskih oblika te slaganja različitih slagalica geometrijskim oblicima, poput tangrama. - Pritom bi slagalice najprije slagali prema zadanome predlošku, a potom bi smislene likove kreirali sami prema zadanim kriterijima.

MAT OŠ C.1.2. Crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte.	<ul style="list-style-type: none"> - Razlikuje i crta ravne i zakrivljene crte. - Koristi se ravnalom. Prošireni sadržaji: <ul style="list-style-type: none"> - Razlikuje i crta otvorene, zatvorene i izlomljene crte. 	
MAT OŠ C.1.3. Prepoznaje i ističe točke.	<ul style="list-style-type: none"> - Prepoznaje istaknute točke i označava ih velikim tiskanim slovima. - Određuje vrhove geometrijskih tijela i likova kao točke. - Crta (ističe) točke. 	

2.4.2. Geometrija u 2. razredu

U drugom razredu, učenici povezuju poznate geometrijske objekte tako da na geometrijskim tijelima promatraju geometrijske likove, bridove kao dužine te vrhove kao točke (tablica 2). Kao i u prvom razredu, u tablici 3, u stupcu preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoga ishoda MAT OŠ C.2.2. spominje se slagalica tangram koja kako je opisano u dokumentu *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* omogućuje učenicima samostalno analiziranje i istraživanje odnosa među veličinama i oblicima dijelova slagalice „te im se na taj način postupno može prikazati i objasniti, uz već poznat pojam cjeline (cijeloga) i polovine, i pojam četvrtine i osmine“ (MZO, 2019, str. 29).

Tablica 3.

Domena C – Oblik i prostor – 2. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda	Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoga ishoda
MAT OŠ C.2.1. Opisuje i crta dužine.	<ul style="list-style-type: none"> - Spaja točke crtama. - Opisuje dužinu kao najkraću spojnicu dviju točaka. - Određuje krajnje točke dužine. 	

	<ul style="list-style-type: none"> - Crta dužinu i primjenjuje oznaku za dužinu. - Određuje pripadnost točaka dužini. - Određuje bridove geometrijskih tijela i stranice geometrijskih likova kao dužine. 	
<p>MAT OŠ C.2.2.</p> <p>Povezuje poznate geometrijske objekte.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Opisuje plohe (strane) kocke, kvadra i piramide kao likove, bridove kao dužine, a vrhove kao točke. - Opisuje stranice i vrhove trokuta, pravokutnika i kvadrata kao dužine, odnosno točke. 	<ul style="list-style-type: none"> - S učenicima je poželjno osmisliti što više aktivnosti koje uključuju slaganja i razlaganja modela geometrijskih oblika te slaganja različitih slagalica geometrijskim oblicima, poput tangrama. - Pritom bi slagalice najprije slagali prema zadanome predlošku, a potom bi smislene likove kreirali sami prema zadanim kriterijima.

2.4.3. Geometrija u 3. razredu

U trećem razredu, kao što je navedeno u tablici 4, učenici iz geometrije usvajaju pojam pravac koji crtaju u različitim međusobnim odnosima – okomito i uspravno, usvajaju pojam polupravac i dužinu i opisuju razlike između njih te se za crtanje i konstruiranje kružnica, pravokutnika i kvadrata učenici služe šestarom. Također, u tablici 5 navedeni su ishodi MAT OŠ D.3.1. i MAT OŠ D.3.3. koji su vezani uz mjerenje, a kojim se od učenika očekuje da usvoje pretvaranje mjernih jedinica za duljinu: kilometar, metar, decimetar, centimetar i milimetar te određivanje opsega likova (MZO, 2019). Za razliku od prvog i drugog razreda, u trećem razredu se ne spominje upotreba tangram slagalice.

Tablica 4.

Domena C – Oblik i prostor – 3. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
<p>MAT OŠ C.3.1.</p> <p>Opisuje i crta točku, dužinu, polupravac i pravac te njihove odnose.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Crta i označava točke i dužine. Upoznaje pravac kao neograničenu ravnu crtu. - Crta i označava pravac i polupravac.

	<ul style="list-style-type: none"> - Crta dužinu kao dio pravca i ističe njezine krajnje točke. - Određuje i crta pripadnost točaka pravcu.
<p>MAT OŠ C.3.2.</p> <p>Prepoznaje i crta pravce u različitim međusobnim odnosima.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Crta pravac i njegove dijelove. - Crta usporedne pravce i pravce koji se sijeku (uključujući okomite). Pravcima koji se sijeku određuje sjecište. - Primjenjuje matematičke oznake za okomitost i usporednost dvaju pravaca.
<p>MAT OŠ C.3.3.</p> <p>Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Koristi se šestarom kao dijelom geometrijskoga pribora. - Šestarom se služi u crtanju i prenošenju dužine određene duljine. - Konstruira kružnicu. - Crta pravokutnik i kvadrat određene duljine stranica.

Tablica 5.

Domena D – Mjerenje – 3. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
<p>MAT OŠ D.3.1.</p> <p>Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Procjenjuje duljinu dužine (milimetar, centimetar, decimetar) i udaljenosti (metar, kilometar) odabirući optimalnu mjernu jedinicu. - Računa s jedinicama za mjerenje dužine (u skupu brojeva do 1000). <p>Prošireni sadržaji:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Preračunava mjerne jedinice.
<p>MAT OŠ D.3.3.</p> <p>Određuje opseg likova</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Opisuje opseg kao duljinu ruba bilo kojega geometrijskog lika. - Mjeri duljinu dužine. - Određuje opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroj duljina njihovih stranica. - Procjenjuje i mjeri opseg lika objašnjavajući postupak.

2.4.4. Geometrija u 4. razredu

U tablici 6 možemo vidjeti da je sadržaj geometrije u četvrtom razredu nešto više zastupljen, a učenici određuju i crtaju pravi, šiljasti i tupi kut te upoznaju različite vrste trokuta s obzirom na duljinu stranice i konstruiraju ih, a to su: jednakostranični, raznostranični i jednakokračni trokuti. Učenici uče konstruirati krug i opisati njegove elemente te uočiti razliku između kruga i kružnice. Učenici u četvrtom razredu povezuju sve usvojene geometrijske pojmove kako bi opisali geometrijske objekte, a to uključuje vrhove, strane, stranice, bridove i kutove. Također, u sklopu domene Mjerenje prikazane u tablici 7, učenici uspoređuju površine između geometrijskih likova i mjere ih jediničnim kvadratima. Za razliku od prvog i drugog razreda, ni u trećem razredu, a ni u četvrtom razredu se u kurikulumu ne spominje upotreba tangram slagalice.

Tablica 6.

Domena C – Oblik i prostor – 4. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
MAT OŠ C.4.1. Određuje i crta kut.	<ul style="list-style-type: none">- Opisuje pojam kuta.- Prepoznaje, uspoređuje i crta pravi, šiljasti i tupi kut. Imenuje vrh i krakove kuta.- Prepoznaje i ističe točke koje (ne) pripadaju kutu.- Koristi se oznakom kuta (kut aVb) pazeći na orijentaciju (suprotno od kretanja kazaljki na satu).
MAT OŠ C.4.2. Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.	<ul style="list-style-type: none">- Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica i dijeli ih na jednakostranične, raznostranične i jednakokračne trokute.- Razlikuje i opisuje pravokutni trokut u odnosu na druge trokute.
MAT OŠ C.4.3. Opisuje i konstruira krug i njegove elemente.	<ul style="list-style-type: none">- Opisuje i konstruira krug i njegove elemente (kružnica, polumjer i središte).- Opisuje odnos kruga i kružnice. Prepoznaje polumjer i središte kruga i kružnice.
MAT OŠ C.4.4. Crta i konstruira geometrijske likove.	<ul style="list-style-type: none">- Geometrijskim priborom crta osnovne geometrijske likove (raznostranični i pravokutni trokut, pravokutnik i kvadrat).- Konstruira jednakostranične, raznostranične i jednakokračne trokute.

<p>MAT OŠ C.4.5.</p> <p>Povezuje sve poznate geometrijske oblike.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Označava vrhove, stranice i kutove trokuta te trokut zapisuje simbolima ($\triangle ABC$). - Povezuje sve geometrijske pojmove u opisivanju geometrijskih objekata (vrhovi, strane, stranice, bridovi, kutovi).
---	---

Tablica 7.

Domena D – Mjerenje – 4. razred (MZO, 2019)

Odgojno-obrazovni ishodi	Razrada ishoda
<p>MAT OŠ D.4.2.</p> <p>Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - U ravnini uspoređuje likove različitih površina prema veličini dijela ravnine koju zauzimaju te tako upoznaje pojam površine. - Mjeri površinu likova ucrtanih u kvadratnoj mreži prebrojavanjem kvadrata. - Ucrtava u kvadratnu mrežu likove zadane površine. - Mjeri površine pravokutnih likova prekrivanjem površine jediničnim kvadratom. - Poznaje standardne mjere za površinu (centimetar kvadratni, decimetar kvadratni, metar kvadratni). - Mjeri pravokutne površine u neposrednoj okolini. <p>Prošireni sadržaji:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Preračunava mjerne jedinice.

Međutim, Vlasnović i Cindrić (2014) ističu kako učenici nakon prvih dvaju razreda pokazuju nesigurnost prilikom prepoznavanja npr. trokuta u nekom neobičnom položaju, iako uče geometrijske pojmove, karakteristike geometrijskih likova i tijela, proučavaju njihove odnose, crtaju ih i konstruiraju. Jedan od razloga zašto se to događa je što i sami učitelji vide nastavu geometrije kao zabavu, smatraju da je manje važna od aritmetika, stoga smanjuju broj sati iz geometrije iako su već i u samim kurikulu reducirani sadržaji (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Također, analiza udžbenika pokazala je da su u geometriji pretežito zastupljeni zadatci koji se svode na računanje i korištenje formula, a da je razumijevanje odnosa između geometrijskih objekata kao i razvoj geometrijskog mišljenja zanemareno. Time se postavljaju brojna pitanja o samoj svrsi poučavanja geometrije i zašto učenici sve više imaju negativan stav

prema učenju geometrije, zašto im je teška i s kojim kompetencijama će učenici ustvari na kraju raspolagati (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b).

Kako bi učenik mogao razvijati geometrijske kompetencije, učitelj je taj koji treba osvijestiti koje su mogućnosti pojedinog učenika, odnosno koliko oni shvaćaju i poimaju prostor i oblik oko sebe jer „osobe s osjećajem za prostor imaju osjećaja za geometrijske aspekte svojeg okruženja i oblike sastavljene od objekata u okolišu“ (Vlasnović i Cindrić, 2014, str. 39-40). Sustavnim radom s oblicima i prostornim odnosima učenik može razviti osjećaj za prostor, no ako učenik nema doticaj s geometrijskim oblicima, kao posljedica manjka geometrijskog iskustva, učenik će teško moći napredovati u stjecanju osjećaja za prostor, no na svakom učitelju je da oblikuje nastavni sadržaj i odabere adekvatan nastavni materijal za uspješno poučavanje geometrijskog sadržaja i omogućiti razvoj kompetencija iz domene Oblik i prostor (Vlasnović i Cindrić, 2014).

2.5. Fundamentalne ideje u kurikulu

Implementacija fundamentalnih ideja u nacionalne kurikule iz matematike već je zaživjela u nekim državama, a u njemačkom kurikulu za matematiku u razrednoj nastavi mogu se pronaći čak svih sedam fundamentalnih ideja od kojih dominiraju Geometrijski oblici i njihove konstrukcije i Mjerenje. Analizom hrvatskog Nastavnog plana i programa za razrednu nastavu iz 2006. godine, Glasnović Gracin i Kuzle (2019b) ističu kako do četvrtog razreda osnovne škole dominiraju dvije fundamentalne ideje, Geometrijski oblici i njihove konstrukcije i Mjerenja, a da se do osmog razreda spominje pet od sedam fundamentalnih ideja. Također, fundamentalne ideje Operacije s oblicima, Koordinate i Oblici u svakodnevnicu jedva su zastupljeni, iako se u teorijskom dijelu Nastavnog plana i program za razrednu nastavu navodi i ideja o primjeni geometrije u svakodnevnom životu (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Novi rezultati istraživanja koje su provele Glasnović Gracin i Kuzle (2024) pokazuju da je fundamentalna ideja Geometrijski oblici i njihove konstrukcije zastupljena u svakom razredu, no da je i fundamentalna ideja Koordinate prisutna u prva tri razreda, a da je Mjerenje prisutno u 1., 3. i 4. razredu. Nadalje, autorice navode da se fundamentalna ideju Geometrijski oblici u okolini spominju samo u prvom razredu, a da Operacije s oblicima, Uzorci i Geometrizacija nisu uopće prisutne u hrvatskom Nastavnom planu i programu za razrednu nastavu iz 2006. godine (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024).

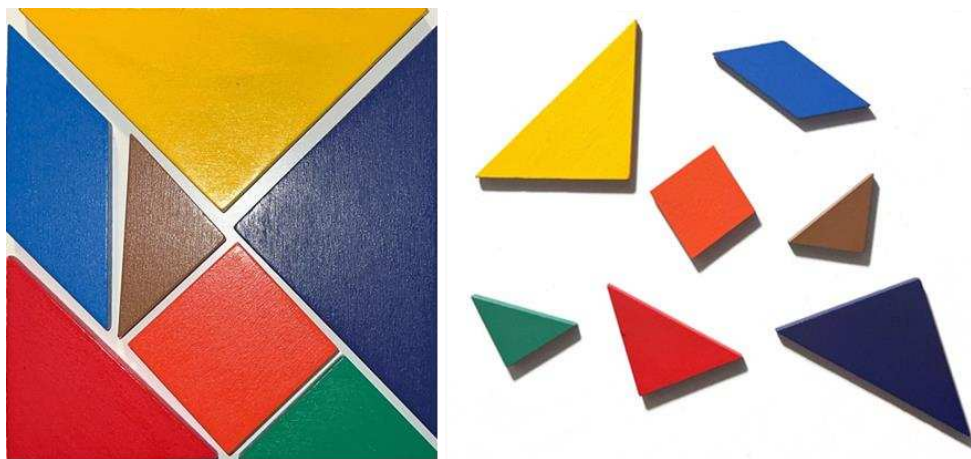
Novi predmetni kurikulum za matematiku, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* (MZO, 2019) pokazuje napredak u implementaciji fundamentalnih ideja u odnosu na stari Nastavni plan i program. Naime, uvedeni su sadržaji koji se tiču prikaza i analize podataka, spominju se i neki pojmovi iz vjerojatnosti te je uvedena nova fundamentalna ideja Uzorci, no količina 3D geometrijskog sadržaja je smanjena jer se kocka i kvadara te obujam kocke usvaja tek u 5. razredu (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Time se od učenika očekuje da zna samo imenovati geometrijska tijela u prvom razredu te prepoznati brid kao dužinu u drugom razredu, a za razliku od Hrvatske, njemački kurikulum sadrži i sadržaje povezane uz osnu simetriju i prostorni zor (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Usporedbom fundamentalnih ideja u Nastavnom planu i programu (NPP) s *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Glasnović Gracin i Kuzle (2024) dolaze do rezultata koji prikazuju nedostatke u fundamentalnim idejama Operacije s oblicima, Uzorci i Geometrizacija i u NPP i u Kurikulumu, no usporedba je pokazala da Kurikulum sadrži veću raznolikost jer sadrži svih sedam fundamentalnih ideja od kojih se Geometrijski oblici i konstrukcije, Koordinate i Mjerenje prisutne u svim razredima razredne nastave.

Tom analizom, Glasnović Gracin i Kuzle (2019b) otvaraju pitanje o idealnom načinu kojim bi se oblikovala školska geometrija u kojoj su sadržaji, zahtjevi i ishodi usko povezani uz fundamentalne ideje, a koje bi se trebale kontinuirao i vertikalno protezati svim stupnjevima obrazovanja te biti prilagođene svakom učeniku. Također, javlja se „zabrinutost obzirom na mogućnosti koje nastava geometrije treba donijeti, poput kritičkog mišljenja i intuicije, razvoja vještina vizualizacije te rješavanja problema i logičkog argumentiranja“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024, str. 93). Sudjelovanje učenika u nastavi geometrije utemeljenoj na fundamentalnim idejama, pruža učeniku mogućnost produbljenja i proširenja slike o geometriji te priliku za upoznavanje višedimenzionalne prirode geometrije (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b). Autorice (2019b) ističu potrebu implementacije fundamentalnih ideja unutar kurikuluma na „svim razinama matematičkog obrazovanja i obrazovnih politika“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b, str. 150) upravo zbog uloge koju razvitak prostornog zora ima u cjelokupnom razvoju učenika.

3. TANGRAM

3.1. Osnovno o tangramu

Tangram je drevna kineska slagalica, a njezina popularnost neprestano se širi. Slagalica tangram formira se rezanjem kvadrata na sedam dijelova koji čine geometrijske likove (Slocum, 2003). Slika 6 prikazuje kako se rezanjem pločice na sedam dijelova, dobiva pet jednakokračnih pravokutnih trokuta, jedan kvadrat i jedan paralelogram, a od tih pet jednakokračnih pravokutnih trokuta, dva trokuta su manja, jedan je srednje veličine i dva su velika trokuta (Slocum, 2003). Svi ti geometrijski likovi čine tangram slagalicu, jedan lik te slagalice naziva se tan, a sam lik koji je oblikovan pomoću svih sedam tanova naziva se tangram lik (Baranović i Lehman, 2018).



Slika 6. Prikaz dijelova tangram slagalice (autorski rad)

3.1.1. Podrijetlo naziva slagalice

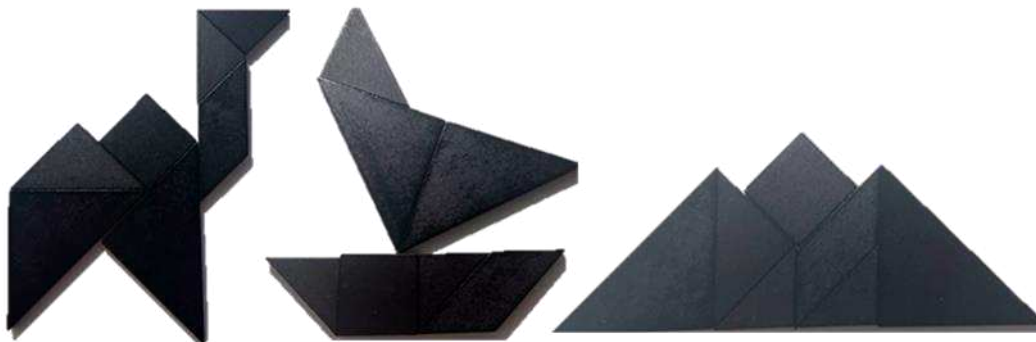
Riječ tangram u kineskom jeziku poznata je kao *Ch'i ch'iao t'u*, što u prijevodu znači *Sedam pločica mudrosti* ili *Slika napravljena od sedam pametnih pločica* (Slocum, 2003). Podrijetlo same riječi tangram dugi se niz godina smatrao nepoznanicom. „Prema nekim izvorima smatra se da ta riječ izvedena iz imena Tanka riječnih ljudi iz Kine, koji su bili veliki trgovci opijumom, te su mornare iz zapadnih krajeva upoznali s tom drevnom igrom“ (Jukić, 2009, str. 13). No, Slocum (2003) prilaže sadržaj pisma, iz 1910. godine, Jamesa Murraya, urednika Oxfordskog engleskog rječnika, namijenjenog Henryju Dudeneyu, najpoznatijem sastavljaču matematičkih zagonetki, u kojem iznosi kako se riječ tangram nigdje ne pojavljuje u kineskom jeziku, no mogao ju je pronaći u izdanju Websterova rječnika iz 1864. godine. Iz tog razloga, Murray je tvrdio kako je naziv *tangram* nastao spajanjem kineske riječi *t'ang* (Kineska) i engleske riječi *gram* (nešto nacrtano, poput dijagrama).

Slocum (2003) navodi pojavu tog naziva nešto ranije, u Sjedinjenim Američkim Državama kada sličan pojam, *trangram*, prvi spominje James Coxe u nazivu svoje knjige *Chinese Philosophical and Mathematial Trangram*. Današnji svima poznati naziv slagalice *tangram*, „prvi je upotrijebio Thomas Hill u svojoj knjizi *Geometrijske zagonetke za mlade* koja je objavljena 1848. godine “ (Jukić, 2009, str. 13).

3.1.2. Legende o tangramu

Baranović i Lehman (2018, str. 21) navode: „O samom nastanku tangram slagalice ne zna se baš mnogo pa je to prikladan prostor za stvaranje raznih priča i legendi koje se u nedostatku dokaza ne mogu ni potvrditi ni odbaciti.“ Knjigom Samuela Loyda, koja je sadržavala oko 700 tangram uzoraka od kojih se većinu ne može realizirati, nastojalo se uvjeriti ljude da je bog Tan zaslužan za izum te igre prije 4 000, a „sedam pločica su dijelovi planeta Sunca, Mjeseca, Marsa, Venere, Merkura, Saturna i Jupitera“ (Jukić, 2009, str. 14).

Kao jednu od najpoznatijih legendi o nastanku tangrama, Gusić (2019) navodi legendu koja tvrdi da tangram datira iz vremena vladavine dinastije Song (960. – 1279.). Naime, car je tražio od najspretnijeg staklara u cijelom carstvu da izradi staklenu ploču za prvi prozor na svom dvoru. Kako bi to ostvario, staklar je morao prijeći dugačak put kako bi dostavio tu ploču, no putem se spotaknuo o kamen, a staklo se razbilo na točno 7 geometrijskih likova. U trenutku kada je staklar pokušao sastaviti staklo u prvotan oblik, shvatio je da od tih dijelova može prikazati razne figure pa je odlučio caru prikazati cijeli put kojim je prošao. Tako je slagao svoj dom, devu u pustinji, brod kojim je plovio, planinu s koje je pao (Slika 7), a car je izrazio toliko oduševljenje da je danima proveo igrajući se sa sedam staklenih pločica i tako je nastala slagalica tangram.



Slika 7. Prikaz deve, broda i planine pomoću tangrama (autorski rad)

Gusić (2019) ističe i zanimljivu legendu o zmaju Yu i Bogu grmljavine. Zmaj Yu je godinama živio s ljudima koji su ga voljeli jer je bio dobar i jer im je pomagao, no Bogu grmljavine se to nikako nije svidjelo. Jednog dana je pobjesnio i snažno udario sjekirom po nebu koje je puklo na sedam velikih crnih komada, a kako je nebo puklo tako je i nestao sav život na Zemlji. Zmaj Yu osjećao se jako tužno te je uzeo sedam komada neba i počeo ih slagati onako kako se sjećao da je zemaljski život izgledao. No, svaki put kad bi složio neku figuru od nje bi se odvojila sjena koja bi tužno lutala praznom Zemljom. Bog grmljavine čuo je taj plač, sažalio se te odlučio da svaka sjena postane jedno novo živo biće. Na taj način Zemlja je ponovno postala naseljena, a ova legenda „nije samo priča o postanku tangrama, nego i o porijeklu naše sjene. Naime, od toga događaja svi smo dobili sjenu koja nas vjerno prati na našem putu“ (Gusić, 2019, str. 35).

3.1.3. Širenje tangrama

U listopadu 1815. godine kapetan Edward M. Donaldson dobio je na poklon primjerke knjiga o tangramu (Slika 8). Došavši 1816. godine u Sjedinjene Američke Države, u Philadelphiju, nakon godinu dana, 1817. bila je tiskana prva američka knjiga o tangramu po uzoru na knjigu koju je dobio na poklon. Igra je brzo postala popularna pa su se razne kopije napravljene od drveta i slonovače proširile Engleskom, a potom i cijelom Europom (Slocum, 2003).



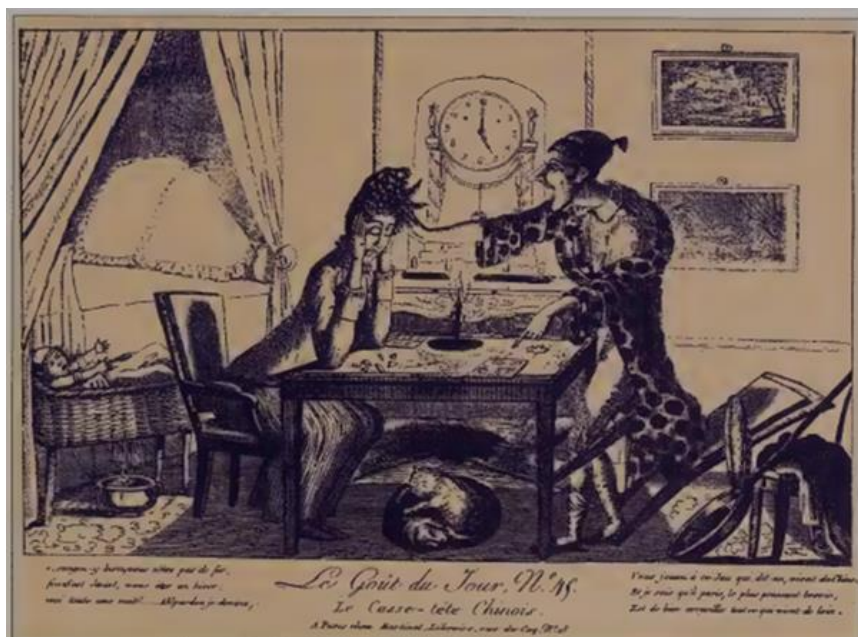
Slika 8. Knjiga *Sang-hsia-k'o* darovana Kapetanu Edwardu M. Donaldsonu 1815. (Slocum, 2003, str. 30)

Popularnost tangrama rapidno se širila Europom, a njemački autor C.L.A. Kunze opisuje igru kao „vrlo elegantnom: predlošci su isprintani na prirodnom papiru s prekrasnom kineskom rumenicom, sedam dijelova je isklesano iz drva ili bjelokosti ili školjke, a cijela igra je zatvorena u lakiranoj kutijici crne i zlatne boje“ (Slocum, 2003, str. 30). Najranije izdanje tangrama izvan kineskog područja, tiskano je u Londonu pod nazivom *Chinese Puzzle*, a dolazila je sa slagalicom u setu. Iako je ovo bilo prva knjiga tiskana u Engleskoj, Slocum (2003) ističe kako su za popularizaciju slagalice diljem Europe zaslužni John i Edward Wallis i John Wallis Mlađi izdavanjem britanskih knjiga: *The Fashionable Chinese Puzzle* i *Key* (Slocum, 2003) (Slika 9).



Slika 9. John Wallis: *The Fashionable Chinese Puzzle* izdana 1817. godine (Slocum, 2003, str. 31)

U Europi, prva knjiga tangrama, *Enigmes Chinoises* tiskana je u Francuskoj 1817. godine, a potom su tiskane i u Švicarskoj, Italiji, Nizozemskoj i Danskoj po uzoru na knjigu Johna i Edwarda Wallisa (Slocum, 2003). Zainteresiranost i zaludenost tim knjigama bila je toliko velika da je u knjizi Martineta, *Caricatures Parisiennes*, izdane 1818. godine u Parizu, prikazano kako „roditelji ignoriraju plač svoje bebe, njezine potrebe te nedovoljnu količinu topline u domu, dok ostaju budni cijelu noć rješavajući tangram slagalice“ (Slocum, 2003, str. 33) (Slika 10).



Slika 10. Karikatura para zaluđena tangram slagalicom objavljena 1818. godine u Francuskoj (Slocum, 2003, str. 37)

Slocum (2003) navodi kako se vjeruje da su i neke poznate osobe voljele ovu igru, a među njima se spominju Lewis Carrol i Edgar Allan Poe, a u nekim su se publikacijama širile glasine da je Napoleon zaslužan za izum tangrama. Budući da su kroz povijest postojale brojne izmišljene priče, Slocum (2003) ističe kako je nemoguće utvrditi jesu li oni stvarno voljeli ovu igru ili je to netko izmislio kako bi se povećala potražnja za tom knjigom i pobudio interes za igru.

Budući da je tangram bio toliko popularan, trgovci su proizvodili običan tangram za kućnu upotrebu, a luksuzne tangrame za izvoz, a proizvodili su se čak i luksuzni tangram stolovi i setove posuđa u obliku tangram pločica (Slocum, 2003). Osim za zabavu, Kavajin i Baranović (2019) navode kako se tangram i danas koristi u druge svrhe, npr. mnogi dizajneri po uzoru na tangram pločice kreiraju namještaj, posude te nakit, a neki ga čak koriste i za promidžbu. Slika 11 prikazuje šarene i suvremene stolove napravljene od drva hrasta po uzoru na tangram pločice.



Slika 11. *Tangram stol* (Dan Yeffet, <https://www.danyeffet.com/work/tangram-table>)

3.1.4. Izrada tangrama

Tradicionalno su se tangram pločice izrađivale od materijala poput kamena, životinjskih kostiju, gline ili porculana (Slocum, 2003). Na slici 12 prikazan je tradicionalni „tangram napravljen od slonovače u Kini za izvoz“ (Slocum, 2003, str. 20). Zbog svoje jednostavnosti, Jukić (2009) navodi kako se danas dijelovi tangrama mogu izraditi pomoću drveta ili plastike, a svatko može napraviti dijelove tangrama od papira ili malo tvrdog kartona na način da izreže kvadrat na određene dijelove kao što je prikazano na slici 13.



Slika 12. *Tangram napravljen od slonovače u Kini za izvoz* (Slocum, 2003, str. 20)



Slika 13. *Dijelovi tangrama napravljeni od papira (autorski rad)*

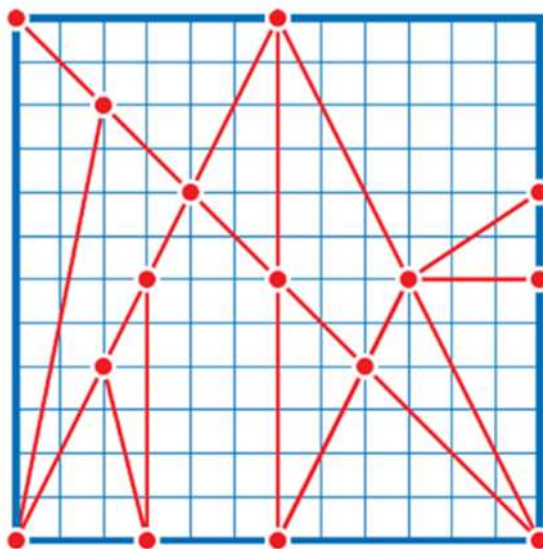
Prema Brückleru (2020) osnovni zadatak tangrama je nakon rastavljanja ponovno složiti kvadrat, no pomoću njega se može oblikovati i mnoštvo „različitih figura ljudi u pokretu, životinja, slova abeceda, geometrijski oblici i svemir“ (Slocum, 2003, str. 20). Same figure, odnosno tangram likovi, koje je potrebno prikazati tangramom prikazane su kao siluete u knjigama ili kartama koje se dobiju uz samu slagalicu, a Slocum (2003) ističe mogućnost i vlastite izrade dizajna tangram slagalice. Na slici 14 prikazane su figure: čovjek u pokretu, jabuka i mačka. Kako bi sama igra bila uspješna, potrebno je sastaviti zadanu figuru tako da je lako prepoznatljiva koristeći svih sedam komada tangrama koji se ne preklapaju (Slocum, 2003).



Slika 14. *Prikaz čovjeka u pokretu, jabuke i mačke pomoću tangrama (autorski rad)*

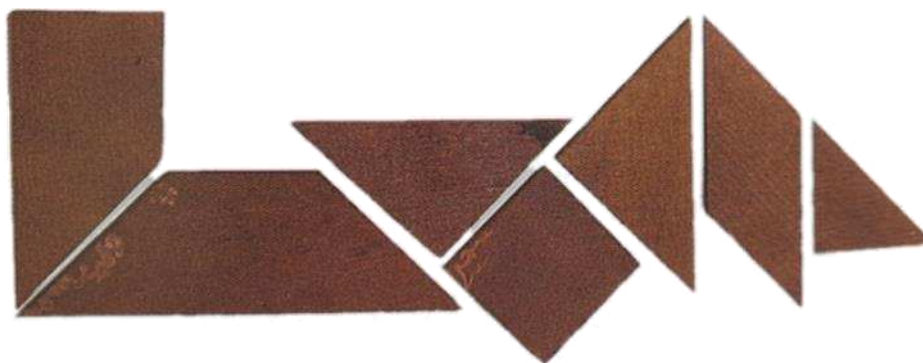
3.1.5. Slagalice slične tangramu

Tangram slagalicu karakterizira 7 tanova pomoću kojih se slaže prepoznatljiv tangram lik, no tangramu su prethodile i brojne druge slagalice, a neke su nastale i kasnije po uzoru na tangram. Dakić (2008) navodi slagalicu stomachion, poznatu još i pod nazivom Arhimedova kutija kao jednu od najstarijih slagalica na svijetu. Slika 15 prikazuje tu slagalicu koja se sastoji od 14 dijelova koje je potrebno složiti u kvadrat. Također, pomoću tih 14 dijelova moglo se složiti više od 1 000 ljudskih i životinjskih figura i predmeta, npr. slon, pas koji laje, guska koja leti i lovac koji čuči (Slocum, 2003). Brückler (2020) objašnjava kako se za razliku od tangrama koji se može složiti u kvadrat na samo jedan način, stomachion može presložiti u kvadrat na čak 536 načina, a to otkriće 2003. godine ustvrdilo se uz pomoć računala.



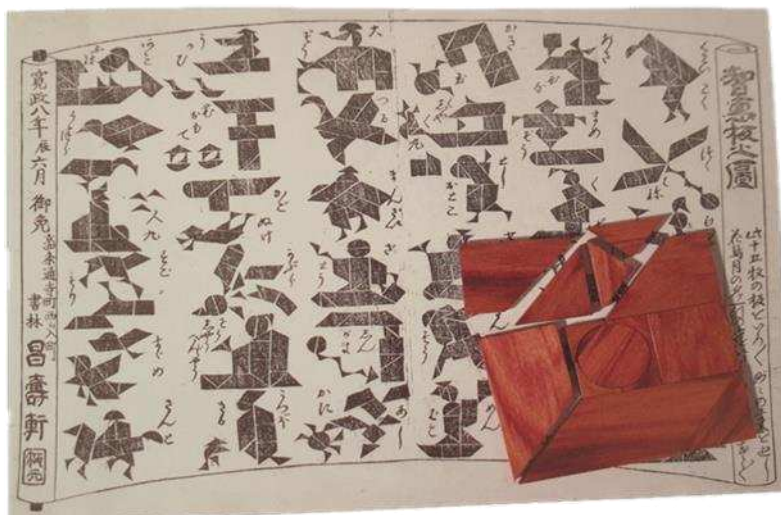
Slika 15. Kvadrat podijeljen na dijelove slagalice Stomachion (Dakić, 2008, str. 39)

Sa svojom dugom poviješću slagalica, u Japanu se u 18. stoljeću pojavila slagalica pod imenom *Sei Shonagon's Wisdom Plates*, a sastojala se kao i tangram od 7 dijelova, ali drugačijih oblika (Slika 16). Slagalica se sastojala od dva trapeza, od kojih je jedan jednakokračni, a drugi pravokutni trapez, jednog kvadrata, jednog paralelograma i tri jednakokračna pravokutna trokuta, a od tih tri jednakokračna pravokutna trokuta, dva trokuta su velika i jedan je manje veličine. Slagalicom se moglo složiti stotinjak različitih figura, a bila je toliko popularna da je popraćena dvjema knjigama koje su nudile predloške i rješenja uključujući i „drvenu kutiju sa setom od sedam drvenih dijelova umotanih u ukrašeni papir. Drvena slagalica uključena u ovaj set je najstarija slagalica za koju se zna da postoji“ (Slocum, 2003, str. 12).



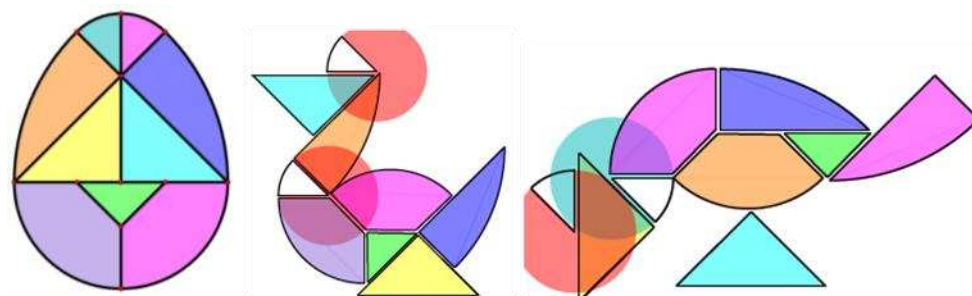
Slika 16. Slagalice Sei Shonagon's Wisdom Plates (Slocum, 2003, str. 13)

U Japanu se pojavljuje i slagalica od 15 dijelova pod nazivom Chie-ite-no-zu koja je prikazana na slici 17 te slagalica Diashinpan-chie-no-ita sa 19 dijelova (Slocum, 2003).



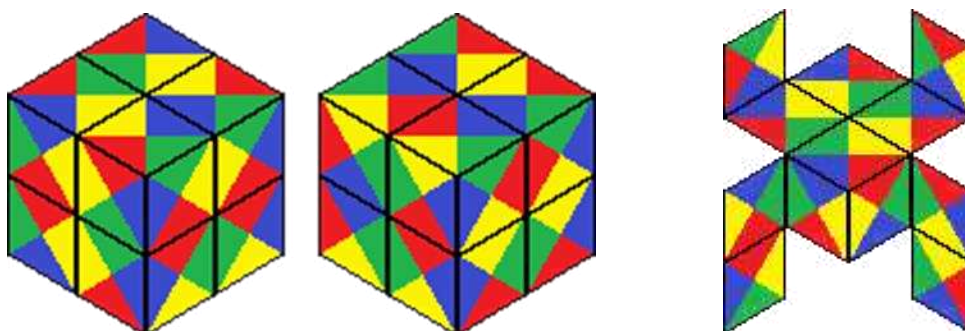
Slika 17. Slagalica Chie-ite-no-zu (Slocum, 2003, str. 13)

Postoji i slagalica Tangram jaje ili Kolumbovo jaje koja se sastoji od 9 dijelova koji mogu stvoriti razne figure, a najpopularniji među njima su figure ptica (Khairiree, 2015). Slika 18 prikazuje dijelove slagalice Tangram jaje i nekoliko figura ptica složenih pomoću svih 9 dijelova slagalice. „Postupak slaganje svih dijelova slagalice razvija kod učenika vještinu razmišljanja, rasuđivanja i vještinu rješavanja problema“ (Khairiree, 2015, str. 155).



Slika 18. *Prikaz Tangram jaja i figura ptica* (Khairiree, 2015, str. 158 – 159)

Jukić (2009) spominje i slagalicu IZZI 2 grafičkog dizajnera Franka Nicholasa koja se sastoji od 12 pločica koje imaju oblik romba, s time da svaka pločica ima različiti uzorak plavih, žutih, zelenih i crvenih trokuta (Slika 19). Potrebno je „složiti 12 pločica u šesterokut ili neki drugi zadani oblik tako da se bridovi pločica koje se dotiču podudaraju. IZZI 2 je igra koja uključuje logičko razmišljanje i kombinatorno slaganje“ (Jukić, 2009, str. 18).



Slika 19. *Izzi 2* (Jaap's Puzzle Page, <https://www.jaapsch.net/puzzles/izzi2.htm>)

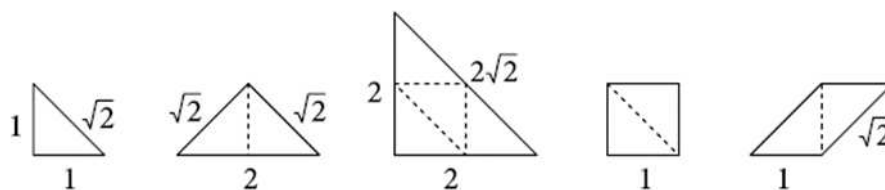
3.2. Povezanost matematike i tangrama

Iako se na prvi pogled tangram čini kao slagalica s kojom se učenici samo mogu igrati zbog svog zabavnog karaktera slaganjem i preslagivanjem pločica u određeni oblik, u njoj se ustvari kriju brojne poveznice s matematikom. Osim što je riječ o sedam pločica/tanova koji predstavljaju geometrijske likove, analiziranjem njihovih odnosa dolazimo do brojnih pravilnosti i zakonitosti koje omogućuju primjenu i u nastavi matematike, a posebice u nastavi geometrije (Baranović i Lehman, 2018).

3.2.1. Tangram pločice

Kao što je i ranije rečeno, tangram se sastoji od sedam tanova, Pet tanova ima oblik jednakokračnog trokuta, jedan oblik paralelograma, a jedan oblik kvadrata. Svi tan trokuti su jednakokračni pravokutni, stoga su i međusobno slični jer su im svi kutovi jednake mjere: 45° , 45° i 90° , a među njima se nalaze i dva para sukladnih trokuta (Baranović i Lehman, 2018). „Paralelogram je jedinstven jer se njegova simetrična slika ne može dobiti rotacijom. To je također jedini dio koji se mora preokrenuti kad se formiraju tangram uzorci“ (Jukić, 2009, str. 14). Odnosno, sve tangram pločice prilikom fizičkog okretaja na drugu stranu izgledaju isto, jedino paralelogram prilikom okretaja na drugu stranu izgleda drugačije, stoga je prilikom formiranja pojedinih tangram figura potrebno tangram pločicu paralelograma okrenuti.

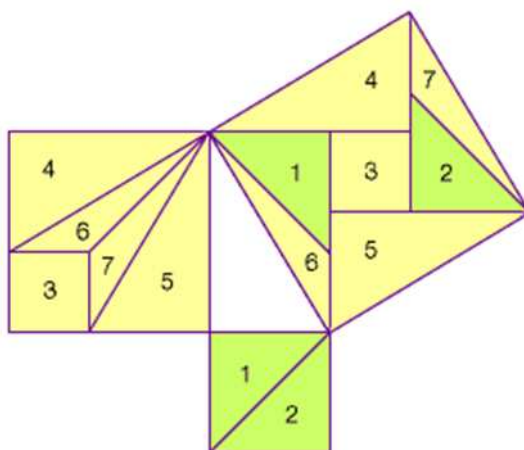
Tangram nam daje mogućnost određenja duljina stranica, „ako uzmemo da je tan jedinični kvadrat, onda su nam poznate mjere stranica svih tanova“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 22). Na slici 20 možemo uočiti da ako stranica tan kvadrata iznosi 1, onda se mogu odrediti duljine stranica ostalih tangram likova. Kod malog jednakokračnog pravokutnog trokuta duljina hipotenuze je $\sqrt{2}$, dok mu katete iznose 1. Srednji jednakokračan pravokutan trokut ima hipotenuzu duljine 2, a katete duljine $\sqrt{2}$. Možemo uočiti kako duljina hipotenuze velikog jednakokračnog trokuta iznosi $2\sqrt{2}$, a duljina kateta mu iznosi 2. Duljine stranica paralelograma iznose 1 i $\sqrt{2}$.



Slika 20. Prikaz duljina stranica tanova (Baranović i Lehman, 2018, str. 22)

3.2.2. Pitagorin poučak

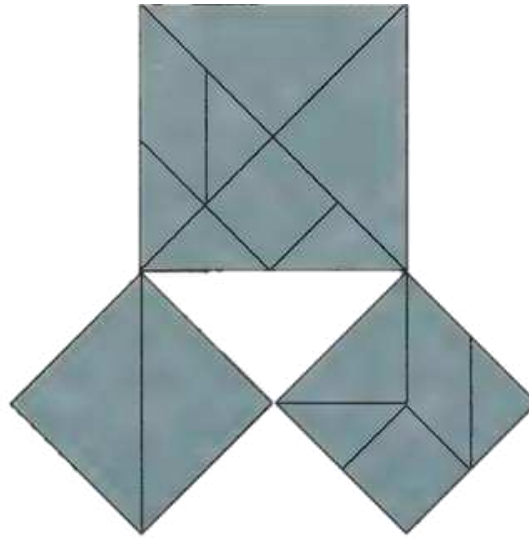
“Podrijetlo Tangrama leži unutar Pitagorinog teorema” (Slocum, 2003, str. 15) je citat koji se nalazi u predgovoru najranije poznate napisane kineske knjige o tangramu iz 1813. godine. Istražujući o podrijetlu tangrama, Slocum (2003) ističe pronalazak najranijih dokaza upotrebe Pitagorinog poučka u Kini rezanjem dva drvena kvadrata i preslagivanjem njihovih dijelova kako bi se formirao jedan veliki kvadrat. Takva metoda može se pokazati i na tangramu, a Pitagorin poučak primjenjiv je na svim tanovima jer sve tanove možemo podijeliti na manje jednakokračne pravokutne trokute. Također, formiranjem dvaju kvadrata dolazi se i do objašnjenja kako je moguće da u tangram pakiranju koje je kvadratnog oblika stanu svi tanovi (Slocum, 2003). Slocum (2003) navodi da je i za dokaz tog teorema zaslužan Liu Hui, poznati kineski matematičar, koji je u 3. stoljeću objasnio taj teorem i točno opisao metodu razdvajanja, preslagivanje te ponovno sastavljanja tanova u kvadrat. Slika 21 prikazuje dokaz Pitagorina teorema koji je Liu Hui dokazao na način da je rezo kvadrat na katetama pravokutnog trokuta i preslagivao ih kako bi odgovarali hipotenuzi kvadrata („Pythagorean theorem“, 2024).



Slika 21. Liu Hui dokaz Pitagorina teorema („Pythagorean theorem“, 2024)

Slika 22 prikazuje formiran jedan kvadrat s dva velika pravokutna trokuta na kojem je primjenjiv Pitagorin poučak i drugi kvadrat s pet preostalih tanova. Na kraju, upotrebljavajući svih sedam dijelova formiran je jedan veliki kvadrat. U sredini kao prazan prostor prikazan je pravokutan trokut. Katete tog pravokutnog trokuta čine kateta velikog jednakokračnog pravokutnog trokuta iz tanova te hipotenuza malog jednakokračnog pravokutnog trokuta iz tanova. Možemo uočiti da se hipotenuza pravokutnog trokuta u praznom prostoru sastoji od dvije hipotenuze malih jednakokračnih pravokutnih trokuta u velikome kvadratu. Takvo

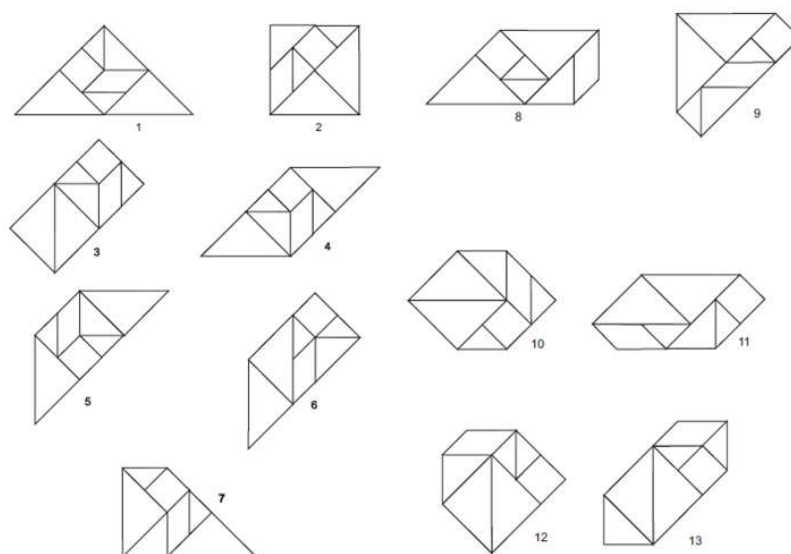
preslagivanje dokazuje postojanost Pitagorinog poučka za pravokutni trokut s dvije jednake katete.



Slika 22. Prikaz dokaza Pitagorinog poučka na tangramu (Slocum, 2003, str. 15)

3.2.3. Konveksne figure i teorem o tangramu

Godine 1942. Fu Tsinag Wang i Chuan-Chih postavili su i dokazali tzv. Teorem o tangramu koji kaže da je moguće složiti točno 13 konveksnih likova od 7 dijelova tangrama (Slika 23) (Baranović i Lehman, 2018). Za lik kažemo da je konveksan ako se bilo koje dvije točke iz unutrašnjosti tog lika mogu spojiti dužinom koja se također u potpunosti nalazi u unutrašnjosti tog lika (Jukić, 2009).



Slika 23. Prikaz 13 konveksnih figura (Jukić, 2009, str. 16)

Kako bi se dokazao ovaj teorem potrebne su četiri leme koje su detaljno objašnjenje u radu *Matematika u tangramu, tangram u matematici* (Baranović i Lehman, 2018) i diofantska jednadžba sa „6 nepoznanica i četiri uvjeta. Rješavanjem postavljene jednadžbe dobiva se skup od 20 rješenja koji predstavlja 20 konveksnih likova, među kojima je samo 13 onih koji se u potpunosti mogu prekriti tanovima“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 23).

Prva lema glasi: „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda racionalna stranica jednog trokuta ne može biti postavljena uz iracionalnu stranicu drugog trokuta“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 23). Baranović i Lehman (2018) su za razmatranje oblikovanja konveksnih likova prvotno koristili 16 malih tan trokuta, zato svaka lema sadrži 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta, a potom su odbacili one koje je nemoguće prekriti tanovima. Kako bi dokazale prvu lemu, autorice (2018) pretpostavljaju suprotno, odnosno „da se slaganjem racionalne stranice jednog trokuta uz iracionalnu stranicu drugog trokuta može formirati konveksan lik“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 23). Autorice su utvrdile da slaganjem trokuta uz pravac „tako da s jedne strane pravca budu racionalne stranice trokuta, a s druge strane iracionalne stranice, počevši od iste točke pravca, popunjavajući i praznine do konveksnog lika“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 23) neće dobiti konveksan lik, već se „racionalna stranica trokuta mora složiti uz racionalnu stranicu, a iracionalna uz iracionalnu“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 24) kako bi se dobio konveksan lik. Druga lema proizlazi iz prve leme, no kako bi se dokazao teorem potrebno je navesti odmah i treću lemu. Druga lema glasi:

„Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksan lik, onda je svaka stranica tog lika sastavljena od racionalnih ili iracionalnih stranica polaznih trokuta. Štoviše, ako su stranice konveksnog lika različitih vrsta, one se izmjenjuju, osim u slučaju kada je kut konveksnog lika pravi kut“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 24).

Treća lema glasi: „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda taj lik može najviše biti osmerokut“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 25). Dokaz ove leme, Baranović i Lehman (2018) prikazale su u svom radu *Matematika u tangramu, tangram u matematici*. Četvrta lema proizlazi iz prethodno opisanih lema, a glasi: „Ako sa 16 međusobno sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta oblikujemo konveksni lik, onda se taj lik može upisati u pravokutnik tako da sve racionalne stranice (ili sve iracionalne stranice) pripadaju stranicama pravokutnika“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 25).

Sukladno potvrđenim lemapa, utvrđivanje konveksnih likova koji se mogu složiti pomoću 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta dobiva se rješavanjem jednadžbe koju Baranović i Lehman (2018) objašnjavaju u svojem radu *Matematika u tangramu, tangram u matematici*. Autorice (2018) navode kako je rješavanje jednadžbe rezultiralo sa 48 različitih rješenja. Samo 20 rješenja čine konveksne likove, a „među 20 izdvojenih različitih konveksnih likova, 7 ih se ne može prekriti sa svih sedam tanova“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 35). Time dolazimo do zaključka da je moguće složiti 13 konveksnih likova od 7 dijelova tangrama, a to su: 1 trokut, 2 peterokuta, 4 šesterokuta i 6 četverokuta (Baranović i Lehman, 2018).

3.3. *Tangram kao didaktičko sredstvo*

Prema Baranović i Lehman (2018), tangram se može gledati kao inovativno didaktičko sredstvo koje se može upotrijebiti u nastavi matematike s učenicima svih uzrasta, a posebno mjesto pronalazi u nastavi geometrije. Slocum (2003) navodi činjenicu kako je i sam Dr. Hill u nekoliko svojih članaka i knjiga opisao i preporučio korištenje tangrama za učenje geometrije te je time pridonio početnom trendu inkorporacije fizičkih objekata u obrazovni sustav. Godine 1861. Norman Allison Calkins, pozivajući se na članke Dr. Hilla izdaje knjigu *Primary Object Lessons* u kojoj su prikazane ilustracije tangrama i kojom preporučuje upotrebu tangrama u nastavi (Slocum, 2003). „Ponekad je dovoljno samo malo volje i mašte da se stare ili već viđene stvari prikažu uz pomoć novih nastavnih sredstava te da se tako razbije svakodnevna monotonija izlaganja, poučavanja i rješavanja matematičkih zadataka“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 20). Baranović i Lehman (2018) navode kako se tangram slagalica može upotrijebiti prilikom uvođenja ili provjeravanja razumijevanja određenih koncepata, npr. razlomaka, postotaka, sličnosti, sukladnosti ili prebrojavanja. Istraživanja pokazuju i da upotreba izazovnih i zabavnih slagalica i igara potiče razvoj kreativnog razmišljanja i utječe na razvoj vještine rješavanja problema (Khairiree, 2015). No, potrebno je napomenuti da sama primjena didaktičkih sredstava u nastavi matematike ne garantira uspješno učenje, ali ono se može učiniti uspješnim ako se oblikuje okružje koje će djelovati sigurno i koje će poticati učenike na istraživački i kreativni rad, a koji će zatim biti temelj učenja matematike i razvoja matematičkog mišljenja (Kavajin i Baranović, 2019b).

3.3.1. *Utjecaj tangrama na učenike*

Prema Kavajin i Baranović (2019), osim što upotreba tangrama u nastavi omogućuje aktivnu uključenost učenika, suradničko učenje i samostalno oblikovanje znanja, upotreba tangrama može utjecati i na razvoj različitih vještina poput crtanja, konstruiranja, popločivanja,

preslagivanja te može poslužiti kao sredstvo za „uvođenje određenih pojmova ili provjeru znanja o njima, zatim na istraživanje, otkrivanje i postavljanja matematičkih zakonitosti, a time i na razvoj matematičkog (geometrijskog) rječnika i procesa mišljenja“ (Baranović i Lehman, 2018, str. 36).

Tchoshanov opisuje tangram aktivnosti kroz koje učenici poboljšavaju konceptualno razumijevanje, usavršavaju proceduralne te izgrađuju strateške vještine, razvijaju sposobnost logičkog promišljanja i kritičkog osvrta, posebno naglašavajući da kroz aktivno sudjelovanje i samostalno istraživanje učenici uspješno povezuju različite sadržaje u funkcionalnu cjelinu, a koje inače kroz nastavu matematike uče izolirano (Tchoshanov, 2011, str. 82; prema Baranović i Lehman, 2016).

Tangram je „izvršna igra za poticanje djetetove mašte i kreativnosti“ (Slocum, 2003, str. 21), a Russel i Bologna (1982; prema Khairiree, 2015) navode i kako upotreba tangrama u nastavi geometrije može potaknuti učenike na zapažanje, analizu oblika, logično razmišljanje, razvoj geometrijskog prostornog razmišljanja s posebnim naglaskom na razvoj geometrijske imaginacije koja predstavlja sposobnost predodžbe geometrijskih oblika, njihovih veličina, položaja te promjene položaja i oblika u prostoru (Khairiree, 2015).

3.3.2. Tangram i razvoj geometrijskog mišljenja

Kao što je opisano u drugom poglavlju, dolazak do zaključaka vezanih uz geometrijski sadržaj mnogim učenicima predstavlja problem, a uzrok tome je često i neprimjereno poučavanje koje je „posljedica nedovoljnog poznavanja geometrijskih koncepata i razina mišljenja potrebnih za njihov razvoj“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 81). Shodno tome je van Hiele (1999) izdao teoriju o razinama mišljenja kroz koje učenici prolaze prilikom učenja sadržaja iz geometrije.

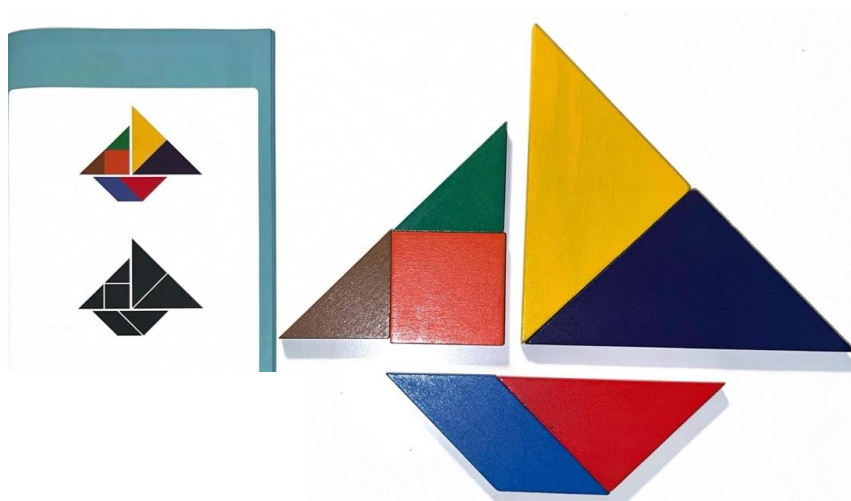
Kako bi učenici napredovali i dosegli sve razine, opisane u drugom poglavlju, potrebno ih je uključiti u aktivnosti u kojima su učenici poticani da istražuju, postepeno usvajajući pojmove i koncepte kroz razne slagalice i zagonetke, a koje na kraju u nekoj aktivnosti mogu povezati s onime što već znaju (van Hiele, 1999). Zadatak svakog učitelja je da izabere primjerne zadatke, usmjerava učenicima pažnju na geometrijska svojstva, upozna učenike s terminologijom, uključuje ih u rasprave potičući ih da koriste usvojene pojmove, a sve kako bi na kraju izgradili mišljenje i imali iskustvo u vizualnom i deskriptivnom razmišljanju (van Hiele, 1999). Upravo je tangram slagalica „jedna od značajnih nastavnih metoda pomoću koje učenici poboljšavaju svoje geometrijsko i prostorno mišljenje“ (Khairiree, 2015, str. 153).

Baranović i Lehman (2016) provodeći aktivnosti popločavanja pravokutnog trapeza tanovima i njegovim daljnjim skiciranjem u točkastu kvadratnu mrežu pritom proporcionalno umanjujući dimenzije tangram likova i smještanjem vrhova tanova u točke mreže, objašnjavaju kako te aktivnosti „potiču razvoj vizualno-prostornih vještina te uspostavljanje odnosa među pojedinim dijelovima, a te vještine osiguravaju razvoj mišljenja na 1. i 2. razini prema van Hiele-ovoj teoriji“ (Baranović i Lehman, 2016, str. 85).

3.3.3. Aktivnosti u radu s tangramom

Baranović i Lehman (2018) navode važnost iskustva učitelja u osmišljavanju aktivnosti za učenike. Ako se učenici prvi put susreću s tangramom, potrebno je da se prvo upoznaju s njim slažući neke unaprijed ponuđene figure, a zatim se mogu okušati u osmišljavanju vlastitih figura (Kavajin i Baranović, 2019a). Iako se na prvi pogled čini vrlo jednostavno osmisliti figuru, to nije tako jer su neke figure vrlo kompleksne za slaganje i zahtijevaju vještinu, znanje i iskustvo. Kavajin i Baranović (2019a) ističu istraživanje koje je provedeno među studentima koji su se prvi put susreli s tangramom, a kojima je bilo potrebno čak 20 minuta da slože tangram u oblik kvadrata. Učenici mlađeg uzrasta mogu oblikovati tangram figure na temelju slike koja može biti „zamišljena samo u nečijem umu, može biti umanjeni prikaz nekog originala, a može biti i kontura originala točno određene veličine“ (Kavajin i Baranović, 2019a, str. 21). Najjednostavnija aktivnost je slaganje tangrama pomoću kontura originala tehnikom popločavanja njegove površine tako da ne bude praznina i preklapanja, no na samom početku rada učenici bi se trebali okušati u slaganju tangrama na sva tri načina – kao zamišljena slika, umanjena slika originala i kontura originala određene veličine (Kavajin i Baranović, 2019a). Slika 24 prikazuje tangram figuru broda složenu na jednostavniji način uz pomoć kontura, a slika 25 prikazuje tangram figuru žirafe složenu na teži način, bez pomoći kontura.

Nakon što učenici steknu iskustvo i sigurnost, učitelj može potaknuti učenike na opisivanje, uspoređivanje i istraživanje tanova i njegovih pravilnosti i karakteristika poput odnosa stranica, površina i veličine kutova koristeći odgovarajuće definicije i termine (Baranović i Lehman, 2018). Kavajin i Baranović (2019a) ističu važnost prilagodbe tog istraživanja vještinama i predznanju učenika.



Slika 24. *Tangram figura broda složena uz pomoć kontura* (autorski rad)



Slika 25. *Tangram figura žirafe složena bez konture* (autorski rad)

Prikazane tangram figure poput broda i žirafe, prema Slocumu (2003), mogu pobuditi djetetovu maštu, a mogu biti i poticaj za prisjećanje na različite likove iz priče, stoga se u ovom radu tangram likovi povezuju s čitanjem priča, o čemu će biti riječi u sljedećem poglavlju.

4. ČITANJE PRIČA

„Čitanje djeci naglas kod kuće i u učionici je praksa koja se preporuča desetljećima“ (Jacobs i sur., 2000, str. 171). U današnje vrijeme može se reći da čitanje djeci predstavlja lijek u suzbijanju problema s kojima se učenici susreću prilikom čitanja, a za to postoje i mnogi razlozi (Meyer i sur., 1994). Već je općepoznato da djeca koja kreću u školu i znaju čitati su uglavnom bila okružena knjigama i da su im njihovi roditelji čitali knjige (Jacobs i sur., 2000). Danas stručnjaci posebno ističu važnost čitanja naglas, a u Hrvatskoj je 2013. godine pokrenuta kampanja „Čitaj mi!“ kojoj je svrha razvijati pismenost i kulturu čitanja u obiteljima na način da se potiče roditelje da započnu čitanje naglas djetetu od najranije dobi kako bi se ono pretvorilo u aktivnost koja međusobno povezuje obitelj na emocionalnoj razini te da se potakne roditelje da sa svojom djecom posjećuju knjižnice (n.d.). Prilikom čitanja priča naglas, djeca ih slušaju, a razgovorom o radnji razvijaju sposobnost zaključivanja o zapletima i likovima. Također, priče sadrže bogatiji i složeniji rječnik prepun opisa i kompleksnih rečenica s kojima se djeca ne susreću u svakodnevnom životu, stoga kada su djeca izložena takvim pričama oni usvajaju nova značenja riječi i potaknuta su na razumijevanje složenijih gramatičkih oblika (Meyer i sur., 1994). Meyer i sur. (1994) ističu kako se izlaganjem djece čitanju priča dolazi do slučajnog usvajanja novih značenja riječi te autori ističu istraživanje provedeno sa sedmogodišnjacima i osmogodišnjacima kod kojih se pokazalo da slušanje priča dovodi do rasta u usputnom učenju riječi od čak 15% te da su takva nalazišta usporediva sa onima pronađenim u istraživanjima djece koja uče značenja riječi čitanjem. Esteves i Almeida (2019) ističu kako je upravo čitanje naglas temelj za razvoj pismenosti i da je jedna od najvažnijih aktivnosti koja utječe na uspjeh u čitanju. Pletikos Olof i Vlašić Duić (2016) osvrću se na rezultate međunarodnog istraživanja čitalačke pismenosti PIRLS i na rezultate PISA studije koji pokazuju da „postignuća hrvatskih učenika upućuju na činjenicu da desetogodišnjaci razumiju pročitano, ali da se sljedećih 5 – 6 godina vještine tumačenja, promišljanja i razumijevanja pročitana vrlo slabo razvijaju“ (Pletikos Olof i Vlašić Duić, 2016, str. 716).

4.1. Čitanje u razredu

Čitanje naglas djeci u razredu ima pozitivan utjecaj na razvoj čitalačke sposobnosti i stavova, a ujedno je i aktivnost koja se može lako organizirati (Routman, 1991; prema Jacobs i sur., 2000). Chomsky (1972; prema Jacobs i sur., 2000) objašnjava kako učenici kojima se čita napreduju u svojem jezičnom razvoju, uspješniji su u razumijevanju, zaključivanju i stvaranju uzročno-posljedičnih veza. Također, učenici koji su bili izloženi čitanju naglas ranije shvate odnos između slova i glasa, nego njihovi vršnjaci koji nisu bili izloženi čitanju naglas (Feitelson

i sur., 1986; prema Jacobs i sur., 2000). Esteves i Almeida (2019) ističu kako učitelji koji odabiru zanimljive tekstove i koji se odluče čitati ih učenicima naglas, potiču motivaciju za čitanje i kod učenika koji znaju čitati, ali svjesno ne žele. Autorice objašnjavaju kako do toga dolazi jer učenici doživljavaju svog učitelja kao uzor pa i čitanje naglas shvaćaju kao aktivnost kojom učitelj pokazuje koliko cijeni samo čitanje. Također, autorice ističu kako većina učenika smatra čitanje naglas ugodnom aktivnošću čime se razvijaju i pozitivni stavovi prema čitanju. Stoga, čitanje naglas može biti odlična aktivnost koja će zainteresirati učenike za čitanje te ih potaknuti na samostalno čitanje i na razvoj ljubavi prema čitanju (Matijević i Bernić, 2020).

Tradicija ukazuje na to da bi učitelji osnovnih škola trebali raditi stvari za koje se vjeruje da i sami roditelji vole raditi svojoj djeci, a to je čitanje priča (Meyer i sur., 1994). Meyer i sur. (1994) objašnjavaju kako učitelj svojim znanjem prilagođava tekst učenicima i tako stvara most između jezika kojim se učenik koristi u svojem domu i jezika koji se koristi u školi i školskim udžbenicima. U današnje vrijeme, ističe se važnost da učitelji čitaju djeci u školi, a Meyer i sur. (1994) ističu istraživanje koje je provedeno s učenicima prvih razreda kojima su učitelji čitali razne knjige svaki dan 20 min tijekom 6 mjeseci. Istraživanje je pokazalo da se učenicima interes za čitanjem povećao toliko da su tražili od svojih roditelja da im priušte te knjige te su ih čak i samostalno počeli čitati. Pletikos Olof i Vlašić Duić (2016) ističu istraživanje kojim se željelo utvrditi koliko često je čitanje naglas zastupljeno u nastavi, a ono je provedeno nad učiteljima razredne nastave 2013. godine. Autorice ističu kako je istraživanje pokazalo da većina učitelja, čak 91,3% čita naglas u razredu jednom do tri puta tjedno i da većina učitelja, 80,6 % potiče učenike da često čitaju u razredu. Također, istraživanje je pokazalo da učitelji najviše koriste izvedbeni stil čitanja naglas, odnosno da tijekom čitanja naglas ne prekidaju.

Iako čitanje naglas pozitivno utječe i na učenike nižih i viših razreda, istraživanje koje su proveli Jacobs i sur. (2000) pokazuje da u praksi učitelji razredne nastave češće čitaju učenicima, nego učitelji u predmetnoj nastavi te da stariji učitelji čitaju manje, nego mlađi učitelji. Do tog zaključka došle su i autorice Pletikos Olof i Vlašić Duić (2016) svojim istraživanjem koje je pokazalo da učitelji s kraćim radnim stažem više čitaju naglas i više potiču učenike na čitanje te da manje koriste zvučne snimke, a da učitelji s više radnog staža čitaju naglas manje te radije posežu za zvučnim snimkama. Jacobs i sur. (2000) objašnjavaju kako učitelji koji imaju više radnog iskustva s vremenom postanu ukorijenjeni u školski sustav i njihova nastava postaje tradicionalnija, a tradicionalna nastava opismenjavanja ne uključuje učitelje koji čitaju učenicima naglas. Također, istraživanje koje su proveli autori pokazuje da

učitelji razredne nastave najviše čitaju slikovnice, dok su dječji romani popularniji u višim razredima.

4.2. Utjecaj dječje književnosti u nastavi matematike

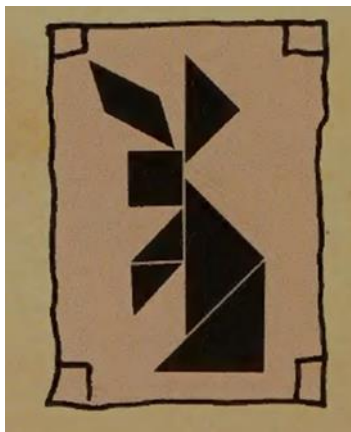
Dječja i adolescentska književnost je u posljednjih nekoliko desetljeća prepoznata kao korisno sredstvo za poučavanje matematičkih koncepata, koristeći priče kako bi učenicima matematičke ideje bile relevantne i smislene tijekom nastave, a koje istovremeno stvaraju pozitivnu atmosferu u razredu (Furner, 2018). Furner (2018) ističe dječju književnost kao sredstvo koje se može koristiti i kao oblik terapije za učenike koji osjećaju matematičku anksioznost ili za one koji se osjećaju frustrirano jer su ismijavani ili izrugivani od strane svojih vršnjaka zbog svoje darovitosti za matematiku. Istraživanje provedeno s učenicima drugog razreda, pokazalo je da korištenje dječje književnosti s tematikom vezanu uz geometriju poboljšava uspjeh u geometriji i utječe na oblikovanje pozitivnih stavova učenika prema geometriji (McAndrew i sur, 2017; prema Furner, 2018). Kako bi se to ostvarilo, učitelji trebaju stvoriti poticajno radno okruženje i ozračje u kojem se učenici mogu osjećati opušteno prilikom izražavanja svojih osjećaja o sadašnjim i prošlim matematičkim iskustvima (Furner, 2018).

Učiteljima su na raspolaganju brojne priče koje mogu koristiti u svrhu uvođenja, predstavljanja, poučavanje, učvršćivanje i povezivanja mnogih matematičkih koncepata, a Furner (2018) ističe knjigu *Math Curse* (1995) koja može pomoći onim učenicima koji su razvili strah od matematike, a knjiga *Counting on Frank* može pomoći darovitim učenicima da razviju poštovanje prema sebi i prihvate svoju darovitost za matematiku (Furner, 2018). Glasnović Gracin (2018) ističe publikaciju *Using Children's Literature to Teach Problem Solving in Math* koja može pomoći učiteljima pri upoznavanju učenika s matematičkim tekstualnim zadacima. Knjiga se sastoji od popisa pedesetak slikovnica koje se mogu koristiti od vrtića pa do petog razreda, a sadržaj slikovnica vezan je uz matematički sadržaj (Glasnović Gracin, 2018). Autorica ističe kako čitanje matematičkih slikovnicama može pomoći učenicima pri usvajaju novog vokabulara, a ilustracije da bolje razumiju apstraktne matematičke pojmove, budući da je u matematici vizualan podražaj od velike važnosti (Glasnović Gracin, 2018). Također, autorica objašnjava da ponovnim čitanjem slikovnica, koje to često i zahtijevaju, učenici mogu lakše dolaziti do rješenja problema i pomoći im da shvate osnovne tekstualne probleme i matematičke ideje (Glasnović Gracin, 2018). Tijekom poučavanja matematičkih koncepata, čitanje dječje književnosti, bajki i priča učenike može potaknuti na kreativnost i na korištenje vlastite mašte kako bi razumjeli i povezali matematički sadržaj (Furner, 2018).

Upravo povezivanje tangrama s dječjom književnošću učinit će sat učenja geometrije smislenijim, a Lee i suradnici (2009) spominju dječju knjigu *Grandfather Tang's story* (1990), autorice Ann Tompert, kao odličnu knjigu koja je prožeta ilustracijama tangrama, i koja pruža učenicima mogućnost prikazivanje likova iz priče tangramom uz pomoć ilustracija iz slikovnice.

4.3. *Grandfather Tang's story* (1990)

Autorica, Ann Tompert izrazila je svoje zanimanje za tangram slagalicu kada je vidjela neke knjige koje govore o njima u sklopu jednog kataloga i postala je toliko očarana izazovom zagonetki da je i sama počela smišljati tangram oblike i priče o njima (1990). Knjiga *Grandfather Tang's story* je kineska narodna priča koja koristi tangrame kako bi ispričala priču, a djeca mlađeg uzrasta mogu prikazati figure životinja uz pomoć crteža na kojima se vide konture tangram pločica, dok djeca starijeg uzrasta mogu prikazati figure životinja gledajući samo osnovnu konturu te figure (Furner, 2018). Kada se tijekom pričanja priče koriste tangrami, tanovi su raspoređeni tako da prikazuju određeni lik u priči, kao što je prikazano na slici 26 koja prikazuje figuru zeca, a kako se uvode novi likovi tako se i dijelovi slagalice preuređuju u te likove (1990). Izradom različitih oblika, kopiranjem oblika, a čak i ilustriranjem vlastitih priča, učenici manipulacijom predmeta razvijaju svoj osjećaj za prostor i produbljuju svoje znanje o geometriji (Lee i sur., 2009).



Slika 26. *Figura zeca* (Grandfather Tang's story, 1990)

Priča započinje tako što djed Tang i njegova unuka Mala Soo sjede ispod drva breskve, slažu različite tangram figure i tako se zabavljaju. U jednom trenutku Mala Soo traži djeda da joj ispriča priču. Djed Tang slaže dijelove tangrama u dvije vile lisice, jednu za njega i jednu za Soo. Priča glasi ovako: Lisic Chou i Wu Ling najbolji su prijatelji, no uvijek su se voljeli

međusobno natjecati kako bi utvrdili koji je bolji, a jednog dana ih je to skoro koštalo života. Naime, lisice su razgovarale o svojim čarobnim moćima i Wu Ling je započeo time da se on može pretvoriti u zeca i tako su krenuli mijenjati svoj oblik od zečeva preko pasa, vjeverica, sokola, kornjače, krokodila, zlatne ribice i gusaka. No, njihova igra je postala opasna kada je lovac podigao luk i pogodio Chou u krilo. Kako bi ga spasio, Wu Ling se pretvorio u lava i izbio lovcu luk iz ruke. Na kraju, Chou i Wu Ling su se vratili u svoj prirodni oblik lisice i ostali su u jazbini kako bi se Chou oporavio od ubodne rane. Nakon završetka priče, djed Tang i Mala Soo ostali su sjediti ispod drva, odmarati i čekati vrijeme za večeru.

5. ISTRAŽIVANJE

Nakon teorijskog prikaza u prethodnim poglavljima vidljive su brojne prednosti koje upotreba tangram slagalice i čitanje priče može imati na učenike u nastavi matematike. Budući da je u kurikulumu (MZO, 2019) tangram spomenut samo u prvom i drugom razredu, provedeno je istraživanje u obliku sata vježbanja i ponavljanja u četvrtim razredima kako bi se utvrdilo stajalište učenika i njihovih učitelja na nastavni sat geometrije u kojem se koristi tangram u kombinaciji s čitanjem priče.

5.1. Istraživačka pitanja

Cilj ispitivanja prikazanog u ovom poglavlju diplomskog rada jest dobivanje uvida u učenicka mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (1990) na hrvatskom jeziku kao i dobivanje uvida u mišljenje učitelj/učiteljica na nastavni sat. Stoga su se postavila sljedeća istraživačka pitanja usmjerena na učenike:

- Jesu li učenici upoznati s tangram slagalicom prije održanog sata i u kojoj mjeri?
- Kakav je dojam učenika o slaganju tangram slagalice na satu kroz razne aktivnosti?
- Koji dio slaganja tangram slagalice je učenicima bio zahtjevan?
- U kojoj mjeri bi učenici i dalje htjeli koristiti tangram slagalicu u nastavi Matematike?

5.2. Sudionici

Sudionici ovog istraživanja su učenici četvrtih razreda iz triju osnovnih škola na području Grada Zagreba. Istraživanje je provedeno u deset razreda, a ukupno je sudjelovalo 183

učenika. Također, u istraživanju su sudjelovale i njihove učiteljice jer o njima uvelike ovisi učeničko iskustvo s tangramom, i time je ukupno sudjelovalo deset učiteljica.

5.3. Instrument, postupak i analiza podataka

U dogovoru s mentoricama diplomskog rada kroz više sastanaka razvijeni su instrumenti za vrednovanje i samovrednovanje održanih nastavnih sati, a u skladu s istraživačkim pitanjima. Instrumenti se odnose na anketu za učenike, anketu za učitelje/učiteljice te tablicu za samovrednovanje studentice. Cilj instrumenata za vrednovanje je dobivanje uvida u učenička mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (1990) na hrvatskom jeziku kao i dobivanje uvida u mišljenje učitelj/učiteljica na nastavni sat i na povezivanje tangram slagalice s čitanjem naglas, u skladu sa istraživačkim pitanjima. Na taj način se različitim metodama i triangulacijom željelo dobiti bolji i objektivniji uvid u primjenu tangram slagalice prilikom poučavanja geometrijskih sadržaja u nastavi matematike

Instrument za vrednovanje *Učenička anketa* sastoji se od 13 pitanja (Prilog 1), a *Anketa za učitelje/učiteljice* (Prilog 2) sastoji se od 9 pitanja. Oba instrumenta sadrže zatvorena pitanja na koja ako ispitanici potvrdno odgovore, objašnjavaju svoj odgovor u okviru pripadajućeg otvorenog pitanja. Ankete ispitanici samostalno popunjavaju na kraju sata. Instrument za samovrednovanje, *Samorefleksija na održani sat* (Prilog 3) je namijenjen studentici za analizu provedenog sata, a sastoji se od tablice koja sadrži tri pitanja: *Kako sam zadovoljna satom?*, *Što treba promijeniti?*, *Što sam promijenila?*.

U prvoj etapi pripreme istraživanja obavljani su razgovori s ravnateljima odgojno-obrazovnih ustanova za provedbu istraživanja. Svi ravnatelji su odobrili provođenje istraživanja. Nadalje, poslani su *Zamolbe za pomoć pri provedbi istraživanja za ravnatelje škola*, a nakon što su ravnatelji odobrili Zamolbu, poslani su i *Pristanci za sudjelovanje u istraživanju – suglasnosti roditeljima* (Prilog 4). Prije samih slanja zamolbi, kreirala se pisana priprema za nastavni sat iz Matematike (Prilog 5) u interakciji s mentoricama rada. U Prilogu 5 se nalazi završna verzija pisane pripreme koja se izmjenjivala prvih nekoliko sati pod utjecajem samorefleksije studentice, dok u konačnici nije poprimila svoj konačni oblik. Kad su mentorice odobrile nastavnu pripravu, studentica je dogovorila nastavne satove u osnovnim školama.

Nakon što su roditelji potpisali *Pristanke za sudjelovanje u istraživanju – suglasnosti roditeljima* (Prilog 4), druga etapa istraživanja je započela. Istraživanje je provedeno u svibnju

2024. godine. U svakom 4. razredu održan je po jedan nastavni sat u trajanju od 45 minuta, a budući da je istraživanje provedeno u deset razreda, ukupno je održano deset školskih sati prema pisanoj pripravi (Prilog 5). Nakon svakog održanog sata učenici su trebali ispuniti *Učeničku anketu* (Prilog 1), a učiteljica je ispunila *Anketu za učitelje/učiteljice* (Prilog 2). Po povratku iz škola, studentica je ispunjavala svoj instrument za samovrednovanje, *Samorefleksija na održani sat* (Prilog 3) upotpunjavajući ju svojim mislima, zapažanjima i sugestijama.

Analiza podataka dobivenih provedenim istraživanjem obrađuje se u trećoj etapi istraživanja. Zadaci zatvorenog tipa iz anketa prikazali su se deskriptivnim metodama, uglavnom relativnim frekvencijama. Zadaci otvorenog tipa analizirali su se kvalitativnom tekstualnom analizom koji nam daju uvid u učenička mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (1990) na hrvatskom jeziku kao i uvid u mišljenje učitelja/učiteljica na nastavni sat. Nakon analize podataka slijedi pregled rezultata istraživanja provedenih u osnovnim školama.

5.4. Rezultati istraživanja

U nastavku prikazat će se rezultati istraživanja u skladu sa istraživačkim pitanjima, a na kraju će se opisati podatci iz upitnika za samovrednovanje, *Samorefleksija na održani sat* (Prilog 3).

5.4.1. Učenička anketa

Učenička anketa (Prilog 1) sastojala se od 13 pitanja. U skladu sa istraživačkim pitanjem *Jesu li učenici upoznati s tangram slagalicom prije održanog sata i u kojoj mjeri?*, postavljena su dva pitanja. Sudionici su bili pitani jesu li ikad čuli za tangram slagalicu prije održanog sata i jesu li ikad koristili tangram slagalicu u školi. Ako su učenici potvrdno odgovorili, naveli su gdje su čuli za tangram slagalicu i u kojem nastavnom predmetu su je koristili. Iz analize rezultata ankete (Tablica 8) vidljivo je da je 55% učenika čulo za tangram slagalicu prije održanog sata, dok je za 45% učenika ovo bio prvi put da čuju za tangram slagalicu.

Tablica 8.

Jesi li ikad čuo/čula za tangram slagalicu prije ovog sata?

Pitanje	DA	NE
Jesi li ikad čuo/čula za tangram slagalicu prije ovog sata?	55 %	45%

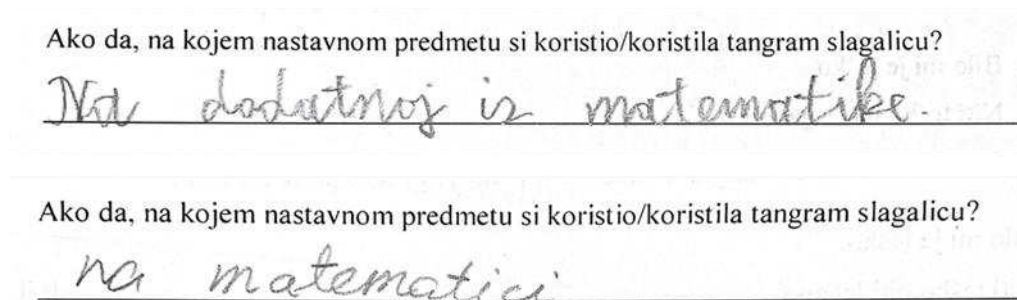
Na temelju učeničkih odgovora može se izdvojiti nekoliko kategorija mjesta gdje je učenik čuo za tangram: u obrazovnoj ustanovi, kod kuće, ostalo. Obrazovne ustanove se odnose na školu i vrtić, a neki od učenički odgovori su: „Na dodatnoj iz matematike“, „Iz matematike u jednom zadatku smo ga trebali složiti.“, „U školi.“, „Čula sam za nju na Večeri matematike u školi.“, „To su nam tete u vrtiću često davale i onda smo mi to slagali.“. Kod kuće su se ispitanici upoznali s tangramom na televiziji ili na internetu, a pod ostalim mjestima spomenut je ljetni kamp matematike i Muzej iluzija gdje se također može susresti s ovom slagalicom.

Također, iz analize rezultata ankete (Tablica 9) vidljivo je da je samo 19% učenika koristilo tangram slagalicu u školi, dok ju čak 81% učenika nikad nije imalo priliku koristiti u školi. Najčešći odgovori učenika na pitanje vezano uz nastavni predmet u sklopu kojeg su koristili tangram slagalicu skenirani su i prikazani na slici 27: „Na dodatnoj iz matematike“, „Na matematici.“.

Tablica 9.

Jesi li ikad koristio/koristila tangram slagalicu u školi?

Pitanje	DA	NE
Jesi li ikad koristio/koristila tangram slagalicu u školi?	19%	81%



Slika 27. Skenirani učenički odgovori

Zaključno, rezultati istraživanja na prvo istraživačko pitanje *Jesu li učenici upoznati s tangram slagalicom prije održanog sata i u kojoj mjeri?*, jasno su pokazali da je malo više od polovice ispitanika upoznato s tangram slagalicom, no u sklopu škole je samo manji postotak ispitanika imalo priliku koristiti tangram slagalicu i to u nastavnom predmetu Matematika.

U skladu s istraživačkim pitanjem *Kakav je dojam učenika o slaganju tangram slagalice na satu kroz razne aktivnosti?*, postavljena su četiri zatvorena pitanja kao što je vidljivo u tablici 10. Na pitanje *Sviđa li ti se slaganje tangram slagalice?*, od učenika se dodatno tražilo da objasne svoj odgovor, a na peto otvoreno pitanje: *Što ti se svidjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?*, od učenika se tražilo da navedu i objasne svoj odabir i iskažu svoje mišljenje. Iz analize rezultata ankete (Tablica 10) vidljivo je da se 91% ispitanih učenika sviđa slaganje tangram slagalice.

Tablica 10.

Prikaz analize podataka za ispitivanje učeničkih dojмова na nastavni sat

Pitanje	DA	NE
Sviđa li ti se slaganje tangram slagalice?	91%	9%
Sviđa li ti se način na koji smo ponavljali geometrijske likove i njihova svojstva?	96%	4%
Sviđa li ti se aktivnost kada si likove iz <i>Priče djeda Tanga</i> prikazao/la tangram slagalicom?	95%	5%
Sviđa li ti se što si slušao/slušala priču?	98%	2%

Na temelju učeničkih odgovora mogu se izdvojiti dvije kategorije razloga zašto im se sviđa slaganje tangram slagalice: izazov i zabava (Slika 28). Unutar kategorije izazov neki od učeničkih odgovora su: „Zato što je to kao izazov.“, „Zato što mi se sviđa kad okrećemo ili se zbunjujemo gdje što ide.“, „Jer je komplicirano, a ja volim komplicirano.“, „Zato što razvijam motoriku i strpljenje.“, „Sviđa mi se zato što moram razmišljati kako je složiti, a volim razmišljati.“, „Jer treba mozgati“. Unutar kategorije zabava neki od učeničkih odgovora su: „Zabavno je, razvijaš svoje znanje i kreativnost.“, „Volim je slagati jer je jako zabavno i volim malo izazivati samu sebe.“, „Vježbamo mozak, a i zabavno je!“, „Zato što se zabavljamo s oblicima.“, „Zato što volim pogađati koji lik gdje stoji.“.

Objasni zašto.

Zato što je to kao izazov.

Objasni zašto.

Zabavno je, razvijáš svoje znanje i kreativnost.

Objasni zašto.

Volim je slagati jer je jako zabavno i volim malo izazvati samu sebe.

Objasni zašto.

Užebamo mozak a i zabavno je!

Objasni zašto.

ZATO ŠTO MI SE SVIĐA KAD OKREĆEMO
LI SE ZBUNJIVJEMO GDI ŠTA IDE

Objasni zašto.

Zato što se zabavljam za oblicima.

Objasni zašto.

Jer je komplicirano a ja volim
komplicirano

Objasni zašto.

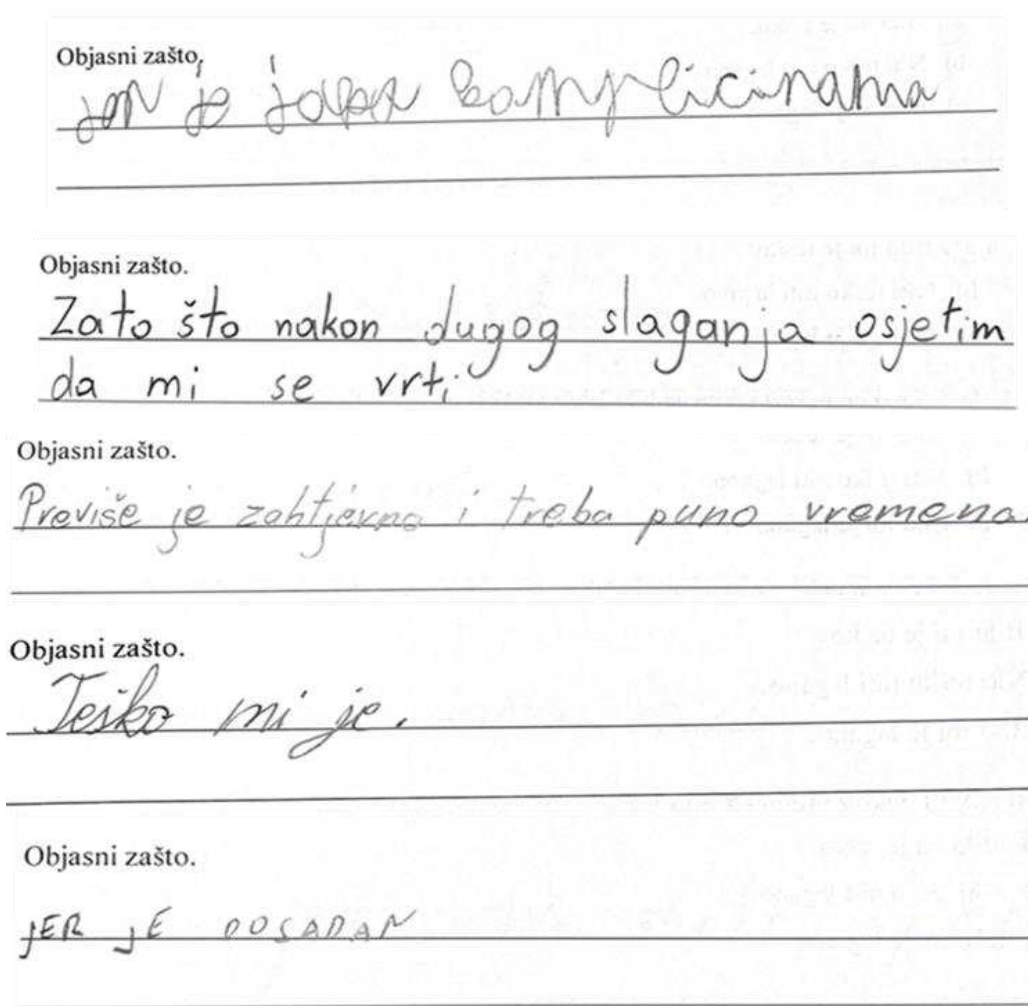
Zato što razvijam motoriku i strpljenje.

Objasni zašto.

Sviđa mi se zato što moram razmišljati
kako je složiti, a volim razmišljati

Slika 28. Skenirana objašnjenja učenika – pozitivna

Učenici koji su odgovorili da im se ne sviđa slaganje tangram slagalice, obrazložili su svoj odgovor uglavnom spominjući zahtjevnost ove aktivnosti: „Jer je jako komplicirano.“, „Zato što nakon dugog slaganja osjetim da mi se vrti.“, „Jer je dosadan.“, „Teško mi je.“, „Previše je zahtjevno i treba puno vremena.“ (Slika 29).



Slika 29. Skenirana objašnjenja učenika - negativna

Daljnjom analizom rezultata anketa (Tablica 10) vidljivo je da se čak 96% učenika sviđa način na koji su ponavljali geometrijske likove i njihova svojstava, 95% učenika se svidjelo oblikovati likove iz *Priče djeda Tanga* te se čak 98% učenika svidjelo što su slušali priču.

Na peto otvoreno pitanje: *Što ti se svidjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?*, od učenika se tražilo da navedu što oni smatraju zanimljivim na nastavnom satu (koji detalj) i da objasne svoj odgovor. Na temelju učeničkih odgovora može se izdvojiti nekoliko kategorija: odgovori koji se odnose na priču/legendu, slaganje ili oboje. Neki od odgovora prikazani su na slici 30. Odgovori koji se odnose na priču/legendu su: „Bila mi je zanimljiva priča.“, „Povijest

tangrama.“, „Bilo mi je zanimljivo kad je učiteljica čitala priču.“, „Priča o djedu Tangu.“, „Bila mi je zanimljiva priča o Kini.“. Većini učenika sviđjelo se slaganje: „Sviđjelo mi se kad smo slagali životinje.“, „Bilo mi je zanimljivo slagati likove od tangrama.“, „Bilo mi je zanimljivo slagati tangram slagalicu i praviti razne oblike s njom.“, „Kada smo sami pokušali slagati jabuku, brod, itd.“, „Sviđjelo mi se kad smo slagali geometrijske oblike.“, „Kad smo pokušali slagati likove sami.“. A nekim učenicima sviđjelo se i slušanje priče i slaganje: „Bilo mi je zanimljivo kako se mogu životinje slagati i priča.“, „Sviđjela mi se priča, a zanimljivo mi je bilo slagati životinje iz priče.“ Još neki odgovori učenika o tome što im je bilo zanimljivo glase: „Slagalice i kviz.“, „Na koji način smo ponovili oblike.“, „To što smo radili nešto novo.“.

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

Sviđjela mi se priča, a zanimljivo mi je bilo slagati životinje iz priče.

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

Bilo mi je zanimljivo slagati tangram slagalicu i praviti razne oblike s njom.

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

Kad smo sami pokušali slagati jabuku, brod itd.

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

Sviđjela mi se tema a bilo mi je zanimljivo legenda o tangram slagalici

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

Bila mi je zanimljiva priča o Kini.
LEGENDA

7. Što ti se sviđjelo na nastavnom satu, što ti je bilo zanimljivo?

To što smo radili nešto novo. Sve.

Slika 30. Skenirana objašnjenja učenika

Sumarno, rezultati istraživanja na drugo istraživačko pitanje *Kakav je dojam učenika o slaganju tangram slagalice na satu kroz razne aktivnosti?*, u velikoj mjeri pokazuju pozitivan dojam za sve aktivnosti koje su se odvijale tijekom nastavnog sata. Učenicima se najviše svidjelo slušati priču, slagati likove iz priče, slagati figure iz legende i općenito čuti i naučiti nešto novo. A slaganje tangram slagalice im se svidjelo jer je izazovno, zabavno, komplicirano i jer trebaju razmišljati.

U skladu s istraživačkim pitanjem *Koji dio slaganja tangram slagalice je učenicima bio zahtjevan?*, postavljeno je pet zatvorenih pitanja. Iz analize rezultata ankete (Tablica 11) vidljivo je da je 66% učenika smatra da im slaganje tangram slagalice nije bilo niti teško niti lagano, 16% učenika smatra da im je bilo teško slagati tangram slagalicu, a 18% da im je bilo lagano.

Tablica 11.

Prikaz analize podataka za ispitivanje težine slaganja tangram slagalice

Pitanje	Bilo je teško	Niti teško niti lagano	Bilo je lagano
Je li ti slaganje tangram slagalice bilo teško ili lagano?	16%	66%	18%
Je li ti bilo teško oblikovati tangram lik kada si vidio/vidjela konture pločica?	11%	39%	50%
Je li ti bilo teško oblikovati tangram lik kada konture pločica nisu bile vidljive?	57%	33%	10%

Od učenika kojima je bilo teško slagati tangram slagalicu, tražilo se da objasne što im je to točno bilo teško (Slika 31). Na temelju učeničkih odgovora mogu se izdvojiti dvije kategorije, kategorija vezana uz slaganje tangram likove i kategorija vezana uz operacije s oblicima. Odgovori učenika kojima je bilo teško slagati tangram likove su: „Složiti planinu.“, „Da se ne preklapa.“, „Kad je bio oblik koji trebao složiti, ali ne i kako trebamo složiti.“, „Saznati kako upotrijebiti sve oblike.“, „Deva i planina.“, „Kada ne znam gdje da stavim kvadrat.“, „Kad nismo imali crte.“, „Bilo mi je teško slagati oblike sama, a lakše kada sam vidjela bridove oblika.“, „Bilo mi je teško slagati likove gdje dobiješ samo obris.“. U kategoriju

vezanu uz operacije s oblicima pripadaju odgovori: „Nisam mogao skužiti kako okrenuti lik.“, „Teško mi je bilo rotirati.“, „Rotirati oblike.“, „Nekada nisam znala kako što okrenuti ili gdje što staviti.“.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Nisam mogao skužiti kako okrenuti lik.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Teško mi je bilo rotirati.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Saznati kako upotrijebiti sve oblike.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Najteže su mi bile planine.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Rotirati oblike.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Nekada nisam znala kako što okrenuti ili gdje što staviti.

Ako ti je bilo teško, što ti je bilo teško?
Bilo mi je teško slagati oblike sama, a lakše kada sam vidjela bridove oblika.

Slika 31. Skenirana objašnjenja učenika

Nadalje, iz analize rezultata ankete (Tablica 11) vidljivo je da je za 50% učenika bilo lagano oblikovati tangram likove kada su im bile vidljive konture pločica, 39% učenika smatra da im nije bilo niti teško niti lagano, a 11% učenika smatra teškim oblikovati tangram likove i kada su vidljive konture pločica. Također, 57% učenika je bilo teško oblikovati tangram lik kada konture pločica nisu bile vidljive, 33% učenika nije bilo niti teško niti lagano, a samo 10% učenika smatra da im je lagano oblikovati tangram likove bez vidljivih kontura pločica. U tablici 12 prikazano je kako 86% učenika smatra da im je nakon nekog vremena bilo lakše složiti tangram likove, dok 14% učenika ne dijeli isto mišljenje. No, čak 60% učenika i nakon nekog vremena, nije uspjelo složiti tangram likove samo opipom tangram pločica, odnosno geometrijskih likova, a njih 40% je uspjelo u tome.

Tablica 12.

Prikaz analize podataka za ispitivanje težine slaganja tangram slagalice

Pitanje	DA	NE
Je li ti nakon nekog vremena bilo lakše složiti tangram likove?	86%	14%
Jesi li uspio/uspjela složiti tangram lik samo opipom, bez da puno gledaš u geometrijske likove?	40%	60%

Rezultati istraživanja na treće istraživačko pitanje *Koji dio slaganja tangram slagalice je učenicima bio zahtjevan?*, pokazuju da učenicima slaganje tangram slagalice nije bilo niti teško niti lagano, polovica učenika smatra oblikovanje tangram lika kada se vide konture pločica lagano, no više od polovici učenika je bilo teško oblikovati tangram lik kada konture pločica nisu bile vidljive. S vremenom, većini učenika je bilo lakše slagati tangram likove, no i dalje znatan broj učenika nije uspio složiti tangram lik samo opipom, odnosno da ne gledaju puno u svoje tangram pločice.

U skladu s četvrtim istraživačkim pitanjem *U kojoj mjeri bi učenici i dalje htjeli koristiti tangram slagalicu u nastavi Matematike*, postavljeno je jedno pitanje i iz tablice 13 vidljivo je kako velika većina učenika, čak 85% bi voljelo koristiti tangram slagalicu u nastavi Matematike.

Tablica 13.

Prikaz analize podataka za daljnje korištenje tangram slagalice u nastavi Matematike

Pitanje	DA	NE
Htio/htjela bih i dalje koristiti tangram slagalicu u nastavi Matematike.	85%	15%

5.4.2. Anketa za učitelje/učiteljice

U ovom dijelu rada prikazat će podatci iz *Anketa za učitelje/učiteljice* (Prilog 2). Anketa za učitelje/učiteljice sastojala se od 9 pitanja i ukupno je sudjelovalo 10 učiteljica, budući da se istraživanje održalo u 10 razreda. Ispitanicima su prvo postavljena dva pitanja. Na prvo pitanje, *Jeste li ikad čuli za tangram slagalicu prije ovog sata?*, ako su potvrdno odgovorili na pitanje, tražilo se da navedu gdje su se imali priliku susresti s tangram slagalicom. Analizom rezultata anketa (Tablica 14), vidljivo je da su sve uključene učiteljice čule za tangram slagalicu prije održanog sata, a neki od odgovora o susretu s tangram slagalicom su: „Slobodno vrijeme, učenje, izvannastavne aktivnosti.“, „U starijoj dobi, nakon fakulteta.“, „U školi, knjigama.“, „Kod kuće kao razonoda.“, „Individualno usavršavanje“, „Tijekom svog školovanja u osnovnoj školi.“, „Imam ga kod kuće, na Večeri matematike.“, „Rad u produženom boravku.“ (Slika 32).

Tablica 14.

Jeste li ikad čuli za tangram slagalicu prije ovog sata? - Broj odgovora

Pitanje	DA	NE	Ukupno
Jeste li ikad čuli za tangram slagalicu prije ovog sata?	10	0	10

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, molim vas da navedete gdje ste imali priliku susresti se s tangram slagalicom.

Slobodno vrijeme, učenje, izvannastavne aktivnosti

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, molim vas da navedete gdje ste imali priliku susresti se s tangram slagalicom.

Rad u produženom boravku.

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, molim vas da navedete gdje ste imali priliku susresti se s tangram slagalicom.

- individualno usavršavanje

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, molim vas da navedete gdje ste imali priliku susresti se s tangram slagalicom.

Imam ga kod kuće, na Večeri matematike

Slika 32. Skenirani odgovori učitelja/učiteljica

Na drugo pitanje: *Koliko ste često s učenicima koristili tangram slagalicu na nastavi u sklopu bilo kakve aktivnosti?*, u tablici 15 vidljivo je da šest učitelj/učiteljica rijetko koriste tangram slagalicu, njih troje nikad nisu koristili, a samo jedna osoba je rekla da često koristi tangram slagalicu na nastavi. Iz ovih podataka možemo zaključiti da su učitelji/učiteljice dobro upoznati/upoznate s tangram slagalicom, ali da ju rijetko upotrebljavaju na nastavi.

Tablica 15.

Rezultati analize podataka anketa o korištenju tangram slagalice na nastavi

Pitanje	Nikad	Rijetko	Često	Vrlo često	Ukupno
Koliko ste često s učenicima koristili tangram slagalicu na nastavi u sklopu bilo kakve aktivnosti?	3	6	1	0	10

U skladu s pitanjem *Kakav je dojam učitelj/učiteljica na nastavni sat?*, postavljena su tri pitanja. Na prvo pitanje: *Jeste li ikada vidjeli sat osmišljen na ovakav način?*, iz tablice 16 možemo vidjeti da je za devet učitelja/učiteljica ovo bio prvi susret sa satom koji je organiziran na način opisan u pisanoj pripravi (Prilog 5), dok je samo jednoj učiteljici ovakav sat već bio poznat i objasnila je da „Često i sama na sličan način artikuliram sat.“.

Tablica 16.

Rezultati anketa za ispitivanje dojmova na nastavni sat

Pitanje	DA	NE	Ukupno
Jeste li ikada vidjeli sat osmišljen na ovakav način?	1	9	10
Biste li promijenili nešto na ovom satu?	0	10	10

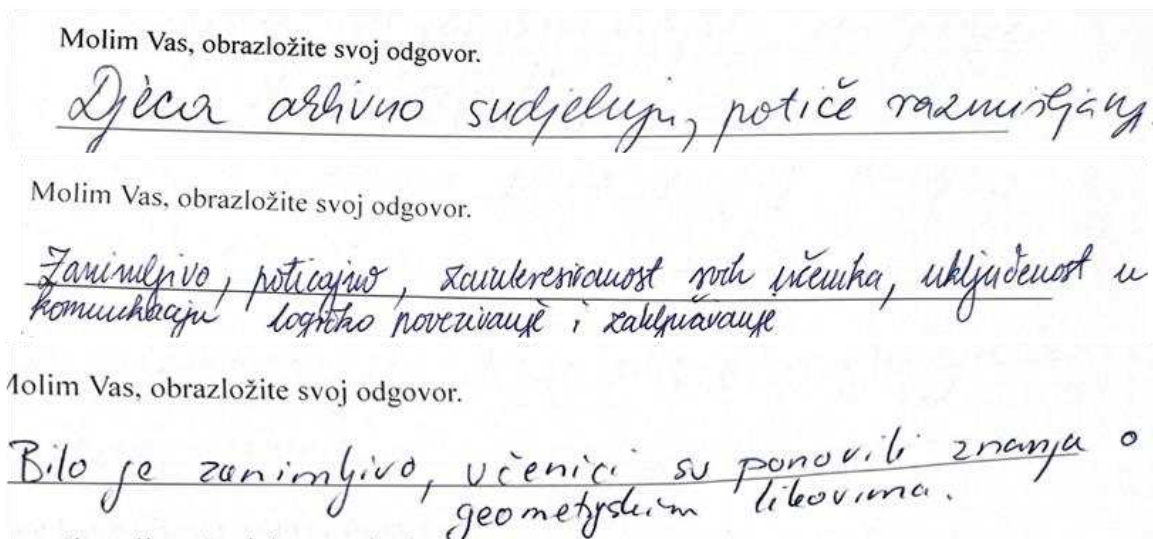
U tablici 17 možemo vidjeti da su se svim učiteljima/učiteljicama jako svidjele aktivnosti s tangramom, svoj odgovor objasnili su na sljedeći način: „Bilo je zanimljivo i poučno.“, „Zanimljivo, dinamično, slaganje uz priču.“, „Djeca aktivno sudjeluju, potiče razmišljanje.“, „Bilo je zanimljivo, učenici su ponovili znanja o geometrijskim likovima.“, „Odlično je što se potiču učenici da zaključuju na koji način složiti određene oblike.“, „Zanimljivo, poticajno, zainteresiranost svih učenika, uključenost u komunikaciju, logičko povezivanje i zaključivanje.“ (Slika 33). Također, uz to što su se svim učiteljima/učiteljicama

svidjele provedene aktivnosti s tangramom, iz tablice 16 vidljivo je da nitko ne bi promijenio ništa u provedenom satu.

Tablica 17.

Rezultati anketa za ispitivanje dojmova na nastavni sat

Pitanje	Jako su mi se svidjele	Svidjele su mi se, ali mislim da bi se trebale drugačije provesti	Nisu mi se svidjele	Ukupno
U kojoj mjeri su Vam se svidjele aktivnosti s tangramom?	10	0	0	10



Slika 33. Skenirana objašnjena učitelja/učiteljica

S obzirom na pitanje *Kakav je dojam učitelj/učiteljica na nastavni sat?*, iz ovih podataka možemo zaključiti da je ovo učiteljima/učiteljicama bio prvi susret s ovakvim satom i da imaju vrlo pozitivan stav, sve provedene aktivnosti su im se jako svidjele jer su potaknule učenike na aktivno sudjelovanje, logičko razmišljanje, zaključivanje, komunikaciju i iz razloga što su učenici na zanimljiv način ponovili geometrijske likove.

U skladu s pitanjem *U kojoj mjeri učitelji/učiteljice čitaju učenicima naglas i smatraju li kombinaciju čitanja naglas i slaganje tangram slagalice dobrim pristupom na usvajanje sadržaja?*, postavljena su tri zatvorena pitanja u obliku Likertove ljestvice, a u sklopu kojih se

mogao dodati i komentar. Iz analize podataka prikazane u tablici 18, vidljivo je da većina učitelja/učiteljica, njih osmero, svakodnevno čitaju svojim učenicima naglas.

Tablica 18.

Rezultati analize podataka o čitanju učenicima naglas

Pitanje	Svakodnevno	Otprilike 2 – 3 puta tjedno	Otprilike jednom tjedno	Otprilike nekoliko puta mjesečno	Gotovo nikad	Ukupno
Čitate li svojim učenicima naglas?	8	2	0	0	0	10

U sklopu održanog sata, učenicima se čitala priča naglas, 8 učitelja/učiteljica (Tablica 19) smatra da je tijekom konkretnog sata čitanje priče, bez vizualnog uporišta teksta bilo dovoljno da shvate sadržaj priče jer „Potiče se razumijevanje slušanog teksta te i sama koncentracija.“, dok 2 učitelja/učiteljica smatra da je potrebno imati vizualan poticaj, To su objasnili na sljedeći način: „Lakše shvate priču kad je vide.“, „Zbog holističkog pristupa, nekim učenicima je lakše imati i vizualno uporište.“. Na pitanje: *Smatrate li povezivanje tangram slagalice s čitanjem priče dobrim pristupom za usvajanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika?*, (Tablica 20) 6 učitelja/učiteljica je odgovorilo da se u potpunosti slažu s tom tvrdnjom, dok su 4 učitelja/učiteljica odgovorili/le da se slažu s tom tvrdnjom, a objasnili su svoje mišljenje sljedećim objašnjenjima: „Povezivanje gradiva uvijek je dobro.“, „Važno je povezivati različita područja.“, „Uključena su sva osjetila, a i motivacija je puno bolja i lakša.“.

Tablica 19.

Rezultati analize podataka o čitanju učenicima naglas na održanom satu

Pitanje	Čitanje priče je dovoljno.	Potrebno je staviti tekst na prezentaciju ili im isprintati.	Ukupno
Smatrate li da je čitanje priče učenicima bilo dovoljno da shvate sadržaj priče ili su učenici trebali imati vizualno uporište teksta	8	2	10

na prezentaciji ili ispred sebe isprintano na papiru?			
---	--	--	--

Tablica 20.

Rezultati analize podataka za povezivanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika

Pitanje	U potpunosti se slažem	Slažem se	Niti se slažem niti se ne slažem	Ne slažem se	Ukupno
Smatrate li povezivanje tangram slagalice s čitanjem priče dobrim pristupom za usvajanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika?	6	4	0	0	10

Rezultatima analize podataka s obzirom na pitanje: *U kojoj mjeri učitelji/učiteljice čitaju učenicima naglas i smatraju li kombinaciju čitanja naglas i slaganje tangram slagalice dobrim pristupom na usvajanje sadržaja?*, možemo zaključiti da većina učitelja/učiteljica svakodnevno čita svojim učenicima naglas. Većina učitelja/učiteljica se složilo kako za održani sat nije bilo potrebno vizualno uporište teksta te se većina učitelja/učiteljica u potpunosti slažu da je povezivanje tangram slagalice s čitanjem priče dobar pristup za usvajanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika.

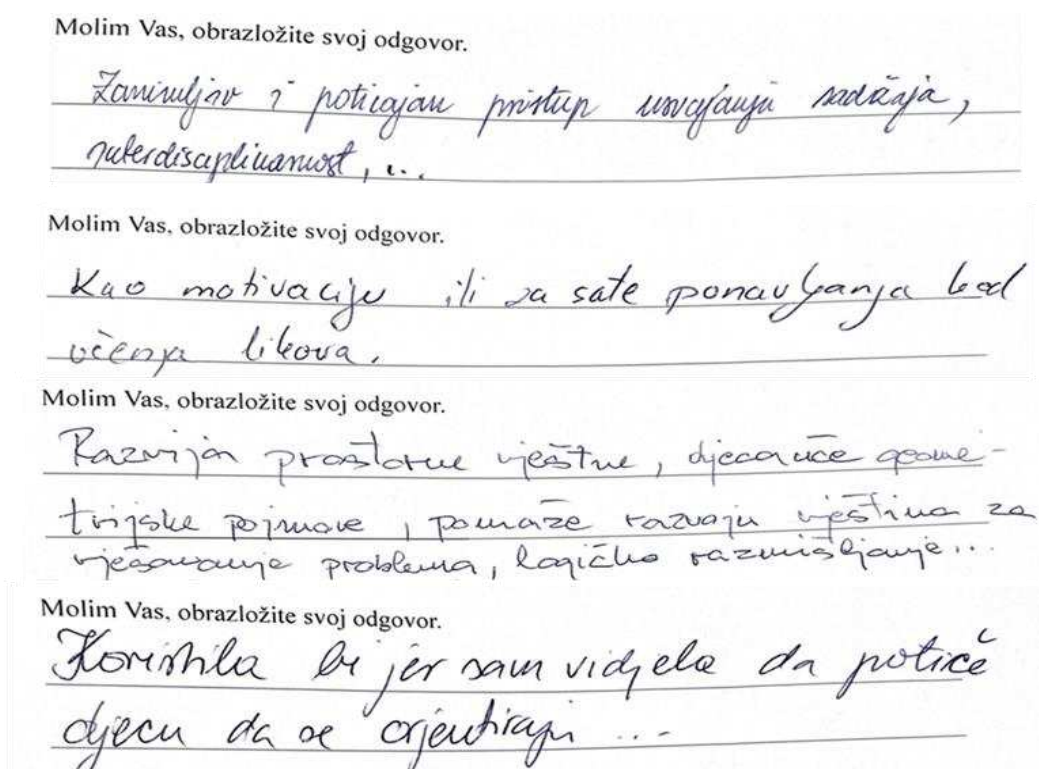
U skladu s pitanjem *U kojoj mjeri bi nakon održanog sata nastavili upotrebljavati tangram slagalicu u nastavi Matematike?*, postavljeno je jedno zatvoreno pitanje: *Biste li ikad koristili tangram slagalicu u nastavi Matematike?*, na koje su svi ispitani učitelji/učiteljice odgovorili potvrdno (Tablica 21).

Tablica 21.

Rezultati analize podataka za buduću upotrebu tangram slagalice u nastavi Matematike

Pitanje	DA	NE	Ukupno
Biste li ikad koristili tangram slagalicu u nastavi Matematike?	10	0	10

Obrazloženja tog odgovora su sljedeća: „Zanimljiv i poticajan pristup usvajanju sadržaja, interdisciplinarnost“, „Drugačiji pristup učenicima je ponekad zanimljiv.“, „Koristila sam kao poticaj učenicima koji su poznavali gradivo, stajao je magnetni tangram na ploči neko vrijeme kojim su se učenici mogli služiti.“, „Sada znam da mogu koristiti tangram i na satu HJ, do sada je to bila matematika.“, „Kao motivaciju ili za sat ponavljanja kod učenja likova.“, „Razvija prostorne vještine, djeca uče geometrijske pojmove, pomaže razvoju vještina za rješavanje problema, logičko razmišljanje.“, „U prilikama koje to dopuštaju“, „Koristila bih jer sam vidjela da potiče djecu da se orijentiraju.“ (Slika 34).



Slika 34. Skenirani odgovori učitelja/učiteljica na daljnje korištenje tangram slagalice

5.4.3. Samorefleksija na održani sat

Analizom podataka na pitanja *Kako sam zadovoljna satom?*, *Što treba promijeniti?*, *Što sam promijenila?* iz upitnika za samovrednovanje, *Samorefleksija na održani sat* (Prilog 3) primijećeno je kako je istraživačica zadovoljna provedenim satovima i da su u većina razreda sve planirane aktivnosti uspješno odrađene, no u početku su bile potrebne određene izmjene. Odmah nakon prvog održanog sata uočila se potreba smanjenja sadržaja zbog vremenske ograničenosti, stoga je nakon slaganja likova iz legende sa i bez vidljivih kontura pločica, izbačeno slaganje jabuke, svijeće i drva kojim bi učenici dodatno vježbali slaganje tangram

figura bez vidljivih kontura. Također, primijećeno je da učenici teško dolaze do zaključka prilikom pitanja: *Što ste primijetili prilikom slaganja kvadrata, kakvi su geometrijski likovi kada ih okrećemo? Mijenjaju li se? Kako izgleda trokut kad okrenemo tangram pločicu na drugu stranu?* Stoga, na drugom održanom satu, ispitivačica je nakon oblikovanja kvadrata, prilikom postavljanja navedenih pitanja fizički okretala pločice. Na taj način, učenici su s lakoćom došli do zaključka da nije potrebno okretati pravokutne jednakokračne trokute i kvadrat jer oni ne mijenjaju oblik prilikom okretanja, no da je paralelograma potrebno okretati. Učenici nisu slagali jabuku, svijeću i drvo što je omogućilo da imaju više vremena za slaganje kvadrata i likova iz legende i taj princip se primjenjivao do kraja istraživanja. Također, u svim razredima uočeno je da učenicima potrebno puno više vremena za slaganje tangram figura od predviđenog, u situacijama i kada vide konture pločica, a u dva razreda i nakon opisanih promjena dodatno se primijetilo otežano prepoznavanje, opisivanje geometrijskih likova s obzirom na njihova svojstva i dolazak do zaključaka što je rezultiralo u produljenje sata ili preskakanje planiranog razgovora o priči i kviza.

Time se može zaključiti da je svakom razredu potreban individualan pristup, što je teško primjenjivo budući da su razredi istraživanja bili nepoznati, njihovo predznanje i znanje različito, a nastavni sat ograničen na 45 minuta. Također, tijekom sata učenici su iskazali zanimanje tijekom slaganja tangram figura bez vidljivih kontura te su čak tražili dodatno vrijeme za njihovo slaganje što u većini slučajeva nije bilo moguće zbog vremenske ograničenosti pa se time može zaključiti da bi se ovakav tip istraživanja mogao provoditi u trajanju od dva školska sata. Time bi se izbjeglo požurivanje i limitiranje učenika u razmišljanju i dolaženju do rješenja te bi to zasigurno rezultiralo i u provođenju svih planiranih aktivnosti u svim razredima.

5.5. Zaključci istraživanja i rasprava

Istraživanje provedeno u deset 4. razreda na području Grada Zagreba pokazalo je da je malo više od polovice ispitanih učenika upoznato s tangramom slagalicom i da ju većina nikad nije imala priliku koristiti u školi, a ako jesu, to je bilo na satu Matematike. Analizom podataka vidljivo je kako većina učenika ima pozitivan stav prema slaganju tangram slagalice i svim provedenim aktivnostima: ponavljanje geometrijskih likova i njihovih svojstava, slušanje legende i slaganje figura, slušanje priče *Priče djeda Tanga* i oblikovanje likove iz nje te bi velika većina učenika voljelo i dalje koristiti tangram slagalicu u nastavi Matematike. Neki od razloga zašto im se sviđa tangram slagalice, učenici su navodili da im je izazovno, zabavno, komplicirano i jer trebaju razmišljati. Nadalje, istraživanje je pokazalo kako više od polovici

ispitanika slaganje tangram slagalice nije bilo niti teško niti lagano, točno polovici učenika oblikovanje tangram lika kada su bile vidljive konture pločica bilo je lagano, no više od polovici učenika je bilo teško oblikovati tangram lik kada konture pločica nisu bile vidljive. Učenici su objasnili kako im je bilo teško okretati i rotirati tangram pločice, oblikovati tangram figure, a da pritom iskoriste sve tanove i da se pločice ne preklapaju. S vremenom, većini učenika je bilo lakše slagati tangram likove, no i dalje određen broj ispitanih učenika nije uspio složiti tangram lik samo opipom, odnosno ne gledajući puno u svoje tangram pločice.

Analiza podataka dobivena popunjavanjem ankete od strane ispitanih učitelja/učiteljica pokazala je kako su svi bili upoznati s tangram slagalicom i prije održanog sata, ali da ju rijetko ili nikad ne koriste na nastavi. Ispitanim učiteljima/učiteljicama ovo je bio potpuno novi način organiziranja nastavnog sata te su se svima svidjele provedene aktivnosti iz razloga što su potaknule učenike na aktivno sudjelovanje, logičko razmišljanje, zaključivanje, komunikaciju i iz razloga što su učenici na zanimljiv način ponovili geometrijske likove. Učenicima se jako svidjelo slušanje priče, a to možemo povezati s time da su naviknuti na takvu metodu rada jer je istraživanje pokazalo da većina ispitanih učiteljica svakodnevno čita svojim učenicima naglas. Nadalje, većina učitelja/učiteljica se slaže da nije bilo potrebno vizualno uporište teksta na održanom satu te se većina u potpunosti slaže da je povezivanje tangram slagalice s čitanjem priče dobar pristup za usvajanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika. Također, učitelji/učiteljice dijele isto mišljenje kao i učenici te su voljni koristiti tangram slagalicu u daljnjoj nastavi.

Samorefleksijom i pokojom izmjenom u nastavnoj pripravi, rezultiralo je u dobivanju pozitivnih povratnih informacija, stoga osmišljeni sat s aktivnostima s tangram slagalicom nije potrebno više mijenjati, no naglašavam kako je svaki razred individua za sebe te brzina i učinkovitost ovakvog tipa nastavnog sata uveliko ovisi o učenicima i njihovim sposobnostima, znanju i želji da nauče nešto novo. Budući da je istraživanje provedeno u trajanju od 45 minuta u deset razreda, što je pritom rezultiralo u 183 ispitanika, rezultati su jasan pokazatelj kako učenici imaju određenih teškoća u slaganju tangram likova u kojima primjenjuju operacije s oblicima, poput rotacije oblika. Međutim, nastavak istraživanja mogao bi ići u smjeru povećanja provođenja istraživanja s 45 minuta na trajanje od dva školska sata. Time bi se izbjeglo požurivanje i limitiranje učenika u razmišljanju i dolaženju do rješenja te bi to zasigurno rezultiralo i u provođenju svih planiranih aktivnosti u svim razredima te bi poneki rezultati zasigurno bili drugačiji.

Također, s obzirom na pozitivne povratne informacije od strane učenika i učitelja/učiteljica, učiteljima razredne nastave preporučila bih da u svoje nastavne sate uvedu tangram slagalicu kako bi u sklopu nekog ponavljanja nastavnog sadržaja, a konstruiranog u obliku igre, potaknuli učenike i radili na njihovom razvijanju prostornog, ali i logičkog mišljenja.

6. ZAKLJUČAK

Matematika je predmet kojim pojedinac usvaja sadržaje koji često radi svoje apstraktne prirode izazivaju teškoću u razumijevaju kod učenika. Ako uz to povežemo i trend smanjenja samih geometrijskih sadržaja u kurikulumima, to dovodi do nastajanja nestabilnih temelja i određenih „rupa u znanju“, a na koje se daljnji sadržaj kroz školovanje treba nadograditi. Stoga je u ovom radu poseban naglasak stavljen na nedostatak trenutnog Kurikuluma, odnosno na nedostatak primjene fundamentalnih ideja, a naročito fundamentalne ideje Operacije s oblicima koje se odnose na operacije poput translacije, rotacije, zrcaljenja, sastavljanja, presavijanja, popločavanja, a čijim usvajanjem se u početnom učenju geometrije kod učenika stvaraju temelji za daljnje usvajanje znanja o površini, oplošju, volumenu, itd. Također, primjenom i manipulacijom geometrijskih oblika dolazi do „povećanja učeničke motivacije, poticanja geometrijskog mišljenja, vizualnih sposobnosti, rješavanja problema, komunikacije i poboljšanja fine motorike“ (Glasnović Gracin i Kuzle, 2024, str. 93). Budući da su geometrijski sadržaji u kurikulumu s vremenom reducirani, a time je i razumijevanje odnosa između geometrijskih oblika i razvoj geometrijskog mišljenja zanemareno, javlja se pitanja o samoj svrsi poučavanja geometrije te je jasno zašto je učenicima teška geometrija i zašto uglavnom dijele negativan stav prema geometrijskim sadržajima (Glasnović Gracin i Kuzle, 2019b).

Upravo se tangram slagalica može iskoristiti kao idealno didaktičko sredstvo za poučavanje geometrijskih sadržaja, a kojim će učenici sastavljati određene figure i time uočiti odnose među oblicima (Khairiree, 2015). Tangram slagalica može pomoći potaknuti učenike na aktivno sudjelovanje, pomoći pri razvoju kreativnog i logičkog promišljanja, geometrijskog i prostornog mišljenja, vještine rješavanja problema, razvoju vještina poput konstruiranja, popločavanja i preslagivanja. Tangram slagalica omogućuje učenicima da na nov, zabavan i zanimljiv način usvajaju ili ponavljaju geometrijske sadržaje kroz razne aktivnosti. U kombinaciji s čitanjem priča naglas, koje ne samo da motivira učenike na čitanje već i razvija pozitivan stav prema čitanju, u nastavi Matematike može poboljšati uspjeh učenika u geometriji te utjecati na oblikovanje pozitivnijih stavova prema geometrijskim sadržajima.

Iako se primjena tangram slagalice spominje u Kurikulumu samo u prvom i drugom razredu osnovne škole i to u obliku preporuke, rezultati provedenog istraživanja s ciljem dobivanja uvida u učenička mišljenja i mišljenja njihovih učitelja/učiteljica o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče *Grandfather Tang's story* (1990), pokazuju da i učenici četvrtih razreda, i njihovi/e učitelji/učiteljice, dijele pozitivno mišljenje prema nastavnom satu u kojem se geometrijski sadržaj ponavlja upotrebom tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče te bi većina njih koristila tangram slagalicu u daljnjoj nastavi Matematike. Rezultati istraživanja pokazali su i da učenici imaju teškoća u oblikovanju tangram likova kada im konture pločica nisu vidljive, odnosno teško im je bilo rotirati i okretati oblike što možemo povezati s manjkom prisutnosti fundamentalne ideje Operacije s oblicima koja se bavi upravo tim aspektom. Istraživanje je pokazalo da je učenicima, a i učiteljima ovakav osmišljeni sat s raznim aktivnostima kroz tangram slagalicu bio zanimljiv te im se svidio način na koji su ponavljali geometrijski sadržaj, odnosno geometrijske likove i njihova svojstva.

Današnje vrijeme, koje nosi svoje specifičnosti i teškoće kroz koje učenici prolaze sa svim stvarima kojima su okruženi i koje im smanjuju pozornost i pažnju, još je veća potreba da dopremo do svih učenika pa ako je tangram slagalica u kombinaciji s književnošću način kojim možemo doprijeti do učenika i uključiti ih u nastavu, a ovim istraživanjem to je i potvrđeno, onda je potrebno da učitelji to djelotvornije i inovativnije poučavanje geometrijskih sadržaja integriraju i u svoju nastavu.

Literatura

- Antunović Piton, B., Bogner Boros, A., Havranek Bijuković, L., Brkić, P., Karlo, M., Kuliš, M., Matić, I., Rodiger, T. i Vučić, K. (2022). *Matematika 8, udžbenik matematike u osmom razredu osnovne škole sa zadacima za rješavanje, 1. dio*. Školska knjiga.
- Baranović, N. i Lehman, S. (2016). Razvoj geometrijskog mišljenja kroz tangram aktivnosti. *Simpozijum Matematike i primene*, 7(1), 81–92.
- Baranović, N. i Lehman, S. (2018). Matematika u tangramu, tangram u matematici. *Poučak*, 19(76), 20 – 37. <https://hrcak.srce.hr/clanak/321307>
- Brückler, F. M. (2020). Tangram i Stomahion. *Matka*, 29(114), 82–83. <https://hrcak.srce.hr/255514>
- „Čitaj mi!“ (n. d.). *Čitaj mi!: Nacionalna kampanja za poticanje čitanja naglas djeci od najranije dobi*. Preuzeto 7.4.2024. s <https://www.citajmi.info/kampanja/>
- Dakić, B. (2008). Arhimedov palimpsest. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 46, 36–40.
- Esteves, S. i Almeida, A. P. (2019). Reading out loud: Perceptions and practices of primary school teachers. U Pixel (Ur.), *12th International Conference Innovation in Language Learning Proceedings* (506–511). Filodiritto Editore.
- Furner, J. M. (2018). Using children’s literature to teach mathematics: An effective vehicle in a STEM world. *European Journal of STEM Education*, 3(3), 1–12.
- Glasnović Gracin, D. (2018). Picturebooks and Problem Solving. *Libri et liberi*, 6(2), 337–339. <https://hrcak.srce.hr/clanak/285946>
- Glasnović Gracin, D. i Kuzle, A. (2019a). "What is geometry for you? Draw a picture." Young students’ understandings of geometry revealed through drawings. U D. Glasnović Gracin i G. Trupčević (Ur.), *Međunarodna znanstvena i umjetnička konferencija Suvremene teme u odgoju i obrazovanju – STOO 2019. Zbornik radova simpozija Novi izazovi u nastavi matematike* (23–34). Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet.
- Glasnović Gracin, D. i Kuzle, A. (2019b). Fundamentalne ideje za nastavu geometrije. *Matematika i škola*, (99), 147–151.

- Glasnović Gracin, D. i Kuzle A. (2024). Diversity and coherence as important aspects of curriculum: a content analysis of the two Croatian geometry curricula for primary education. *Croatian Journal of Education*, 26(1), 59–95.
- Gusić, M. (2019). Legenda o tangramu. *Matka*, 28(109), 34–35. <https://hrcak.srce.hr/239527>
- Jacobs, S. J., Morrison, T. G. i Swinyard, W. R. (2000). Reading aloud to students: A national probability study of classroom reading practices of elementary school teachers. *Reading Psychology*, 21(3), 171–193. <https://doi.org/10.1080/02702710050144331>
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. U L. Haggarty (Ur.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121–139). RoutledgeFalmer.
- Jukić, L. (2009). Matematičke slagalice. *Osječki matematički list*, 9(1), 13–20. <https://hrcak.srce.hr/42990>
- Kavajin, A. i Baranović, N. (2019a). Tangram u nastavi matematike, 1. dio. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 101, 18–26. https://www.academia.edu/42732250/Tangram_u_nastavi_matematike_1dio
- Kavajin, A. i Baranović, N. (2019b). Tangram u nastavi matematike, 2. dio. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 102, 69–74.
- Khairiree, K. (2015). Creative thinking in mathematics with tangrams and the geometer's sketchpad. *Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics*, 153–161.
- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3–8.
- Lee, J., Ok Lee, J. i Collins, D. (2009). Enhancing children's spatial sense using tangrams. *Childhood Education*, 86(2), 92–94.
- Lin, C.-H. i Chen, C.-M. (2016). Developing spatial visualization and mental rotation with a digital puzzle game at primary school level. *Computers in Human Behavior*, 57(5), 23–30.
- Matijević, K. i Bernić, R. (2020). Is there a connection between reading to children and the child's involvement in reading activities? *Croatian Journal of Education*, 22(3), 37–49.

- Meyer, L. A., Wardrop, J. L., Stahl, S. A. i Linn, R. L. (1994). Effects of reading storybooks aloud to children. *The Journal of Educational Research*, 88(2), 69–85. <https://doi.org/10.1080/00220671.1994.9944821>
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja [MZO] (2019). *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
- Pythagorean theorem. (2024). U Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem>
- Pletikos Olof, E. i Vlašić Duić, J. (2016). Reading aloud and interpretative reading in class. *Croatian Journal of Education*, 18(3), 697 – 726. <https://hrcak.srce.hr/clanak/247803>
- Scieszka, J. i Smith. L. (1995). *Math curse*. Viking Press.
- Slocum, J. (2003). *The tangram book*. Sterling Publishing Co.
- Tompert, A. (1990). *Grandfather Tang's story*. Crown Publishers.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310–316.
- Vlasnović, H. i Cindrić, M. (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hieleovoj teoriji. *Školski vjesnik*, 63(1-2), 37–51. <https://hrcak.srce.hr/123229>

Prilog 2: Anketa za učitelje/učiteljice

ANKETA ZA UČITELJE/UČITELJICE RAZREDNA NASTAVA – 4. RAZRED

Drage učiteljice i učitelji,

ovim se anketnim upitnikom ispituju vaši stavovi i mišljenje vezani uz održani sat nastavnog predmeta Matematika na kojem se koristila tangram slagalica. Anketni upitnik je anonim i nije ga potrebno potpisivati.

Hvala vam na vašim iskrenim mišljenjima i stavovima, suradnji i izdvojenom vremenu!

1. Jeste li ikad čuli za tangram slagalicu prije ovog sata?

- a) DA b) NE

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, molim vas da navedete gdje ste imali priliku susresti se s tangram slagalicom.

2. Koliko ste često s učenicima koristili tangram slagalicu na nastavi u sklopu bilo kakve aktivnosti?

- a) Nikad
b) Rijetko
c) Često
d) Vrlo često

3. Jeste li ikada vidjeli sat osmišljen na ovakav način?

- a) DA b) NE

Ukoliko ste potvrdno odgovorili na prethodno pitanje, opišite u kojoj prilici.

4. U kojoj mjeri su Vam se svidjele aktivnosti s tangramom?

- a) Jako su mi se svidjele
- b) Svidjele su mi se, ali mislim da bi se trebale drugačije provesti
- c) Nisu mi se svidjele

Molim Vas, obrazložite svoj odgovor.

5. Čitate li svojim učenicima naglas?

- a) Svakodnevno
- b) Otprilike 2 – 3 puta tjedno
- c) Otprilike jednom tjedno
- d) Otprilike nekoliko puta mjesečno
- e) Gotovo nikad

6. Smatrate li da je čitanje priče učenicima bilo dovoljno da shvate sadržaj priče ili su učenici trebali imati vizualno uporište teksta na prezentaciji ili ispred sebe isprintano na papiru?

- a) Čitanje priče je dovoljno.
- b) Potrebno je staviti tekst na prezentaciju ili im isprintati.

Molim Vas, objasnite ili dodajte komentar ako želite.

7. Smatrate li povezivanje tangram slagalice s čitanjem priče dobrim pristupom za usvajanje sadržaja iz Matematike i Hrvatskog jezika?

- a) U potpunosti se slažem
- b) Slažem se
- c) Niti se slažem niti se ne slažem
- d) Ne slažem se

Molim Vas, objasnite ili dodajte komentar ako želite.

Prilog 4: Pristanak za sudjelovanje u istraživanju – suglasnosti roditelja

Sveučilište u Zagrebu

Učiteljski fakultet

Savska cesta 77

10000 Zagreb

Osnovna škola _____

Ulica, mjesto, poštanski broj

Pristanak za sudjelovanje u istraživanju – suglasnosti roditelja

Poštovani roditelji,

moje ime je Karla Kušić i studentica sam Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. U svrhu izrade diplomskog rada provodim kvalitativno istraživanje na temu „Operacije s oblicima i primjena tangrama potaknuta čitanjem priče“ pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Dubravke Glasnović Gracin i izv. prof. dr. sc. Marine Gabelice. Cilj je dobivanje uvida u učenička mišljenja o iskustvu korištenja tangram slagalice u kombinaciji s čitanjem priče. Za potrebe istraživanja za diplomski rad bih u svibnju ove godine u prostorijama OŠ __ provela nastavni sat u trajanju od 45 minuta, a u sklopu kojeg će učenici na kraju sata popunjavati anketu. Anketom će učenici moći iznijeti svoje mišljenje i iskustvo o provedenim aktivnostima. O točnom terminu provedbe istraživanja bit ćete obavješteni od strane učiteljice razrednog odjeljenja. Prikupljeni podatci će biti u potpunosti anonimni i povjerljivi te dostupni samo istraživačima. Vjerujem da učenicima neće biti problem koristiti se matematičkim materijalom i podijeliti svoja razmišljanja sa mnom. Vaš eventualni pristanak moguće je u svakom trenutku povući. Također, Vaše dijete može u svakom trenutku odustati od sudjelovanja bez ikakvog objašnjenja ili posljedica.

Ako imate ikakvih pitanja, molim Vas, budite slobodni kontaktirati me.

Unaprijed zahvaljujem na Vašem vremenu.

S poštovanjem,

Karla Kušić (mail: -)

Karla Kušić

SUGLASNOST

Suglasan/na sam da moje dijete _____
sudjeluje u istraživanju. (prezime i ime, razred)

(Molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

DA

NE

Datum: _____

Potpis roditelja: _____

Prilog 5: Pisana priprava

UČITELJSKI FAKULTET

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU



Ime i prezime studenta:	Karla Kušić	Grupa: -
Voditelj vježbi:	-	Datum: -

Škola:	-	Razredni odjel: 4. razred
Učitelj mentor:	-	

PRIPRAVA ZA IZVOĐENJE NASTAVNOG SATA

MATEMATIKE

DOMENA:	Oblik i prostor
NASTAVNA JEDINICA:	Slaganje tangram slagalice slušanjem priče
	Sat vježbanja i ponavljanja
	MAT OŠ C.4.5. Povezuje sve poznate geometrijske oblike. - Povezuje sve geometrijske pojmove u opisivanju geometrijskih objekata (vrhovi, strane, stranice, bridovi, kutovi).

Odgojno-obrazovna očekivanja međupredmetnih tema i suodnosi s ostalim predmetima:

- osr A.2.3. Razvija osobne potencijale
- uku A.2.3. 3. Kreativno mišljenje
Učenik se koristi kreativnošću za oblikovanje svojih ideja i pristupa rješavanju problema.
- OŠ HJ A.4.2. Učenik sluša različite tekstove, izdvaja važne podatke i prepričava sadržaj poslušanoga teksta.

- OŠ HJ B.4.1. Učenik izražava doživljaj književnoga teksta u skladu s vlastitim čitateljskim iskustvom.

Korištene metode rada:	Metoda usmenog izlaganja, metoda razgovora, metoda demonstracije
Korišteni oblici rada:	Frontalni rad, individualni rad
Korištena nastavna sredstva:	PPT prezentacija, drveni tangram, tangrami od kartona
Korištene vrste matematičkih zadataka za učenike:	<ul style="list-style-type: none"> • Zadatci prema aktivnosti (što učenik treba raditi): Prikazivanje (oblikovanje likova tangram slagalicom: npr. oblikovanje kvadrata, planine, kuće) Interpretiranje (očitanje slike tangrama i tumačenje geometrijskih likovasa slike kao dijelova tangrama) • Zadatci prema složenosti: Jednostavni zadatci (Kakav je to pravokutan trokut?) Zadatci povezivanja (primjenjuju prethodno naučeno znanje o duljinama stranica i veličini kutova prilikom opisa tangrama) • Zadatci prema vrsti odgovora: Zadatci zatvorenog tipa (zadatci za kviz; npr. Smiju li se dijelovi tangrama rotirati?) Zadatci otvorenog tipa (Kako trokut nastaje? Opišite mi proces kako biste ga nacrtali.) • Zadatci prema kontekstu: Unutarmatematički zadatci (imenovanje kuta) Realistični zadatci (<i>Priča djeda Tanga</i>) Autentični zadatci (Pronađite pravi kut u učionici.)

TIJEK NASTAVNOG SATA

UVODNI DIO SATA: (5 min)

Uvodna motivacijska aktivnost: Upoznavanje s učenicima

Pozdravljam učenike i predstavljam im se.

S: Dobar dan!

U: Dobar dan!

S: Moje ime je Karla. Danas ćemo se zajedno družiti na satu Matematike koji će biti malo drugačiji u odnosu na sate na koje ste inače naviknuti. Naime, ja završavam svoj studij i u sklopu diplomskog rada provodim jedno istraživanje, a za to ste mi potrebni upravo vi, odnosno na kraju sata svatko od vas će dobiti jednu kratku anketu koju ćete popuniti. Vaši rezultati bit će mi od velike važnosti. A sada pogledajte prezentaciju. Na prezentaciji se nalazi jedna slika, no prekrivena je narančastim oblacima. Vaš zadatak je probati pogoditi što slika prikazuje, no probajte maknuti što manje oblaka.

Učenici dižu ruke, izabiru jedan broj koji piše na oblaku, oblak čiji broj izaberu nestaje i postupno se pojavljuje tangram figura.

S: Možete li prepoznati što prikazuje ova figura?

U: Prikazuje mačku.

S: U pravu ste.

Najava cilja sata: Upoznavanje tangram slagalice

S: Prepoznajete li od čega je oblikovana ova figura?

U: Od geometrijskih likova.

S: Od koliko geometrijskih likova je sastavljena ova figura?

U: Od sedam geometrijskih likova.

S: Jeste li ikad čuli za tangram slagalicu? Ako je netko čuo neka digne ruku.

Učenici dižu ruku i objašnjavaju gdje su se susreli s tangram slagalicom, ako jesu.

S: Upravo je ova mačka, odnosno figura mačke, oblikovana tangram slagalicom. Što mislite što ćemo danas raditi?

U: Danas ćemo naučiti što je tangram.

S: Tako je. Danas ćemo naučiti što je to tangram i zajedno ćemo slagati figure uz pomoć tangram slagalice.

GLAVNI DIO SATA: (35 min)

Vježbanje i ponavljanje:

Aktivnost: Imenovanje i opisivanje geometrijskih likova

Ishod aktivnosti: Učenik imenuje geometrijske likove, prepoznaje trokute s obzirom na duljinu stranica i veličinu kuta te razlikuje pravokutan trokut.

S: Zna li možda iz koje zemlje potječe tangram?

U: Ne.

S: Tangram je drevna kineska slagalica. Kao što ste rekli sastoji se od 7 tangram pločica, odnosno od 7 geometrijskih likova. Jedan dio, jedna pločica se naziva tan. Pogledajte na prezentaciju, od kojih se sve to geometrijskih likova sastoji tangram.

U: Sastoji se od trokuta, kvadrata i još jednog lika.

S: Od koliko se trokuta sastoji?

U: Od 5 trokuta.

S: Jesu li oni svi jednaki?

U: Nisu.

S: Po čemu se razlikuju?

U: Razliku se po duljinama stranica.

S: Pa kakvi su to trokuti s obzirom na duljinu stranica.

U: Jednakokračni trokuti.

S: Kakvi su to jednakokračni trokuti?

U: To su trokuti koji imaju dvije stranice jednakih duljina.

S: Kakvi su trokuti s obzirom na veličinu kuta?

U: Pravokutni trokuti.

S: Kakav je to pravokutan trokut?

U: To je trokut koji ima pravi kut.

S: Pronađite pravi kut u učionici.

S: A kakva su druga dva kuta?

U: Druga dva kuta su šiljasta.

S: Tako je! Dakle, riječ je o pet pravokutnih jednakokračnih trokuta. A što je to uopće trokut? Kako on nastaje? Opišite mi proces kako biste ga nacrtali?

U: Potrebne su nam točke koje onda spojimo dužinama. Dio ravnine omeđen tim dužinama je trokut, uključujući i točke tih dužina.

S: Odlično! Promotrite malo prikazane trokute. Jesu li oni jednakih veličina, odnosno imaju li svi trokuti jednake duljine stranica?

U: Nisu jednaki, neki su veći, a neki manji.

S: Vidimo dva velika trokuta, jedan srednji i dva mala trokuta. Rekli ste da se tangram još sastoji i od kvadrata. No, tu je prisutan još jedan geometrijski lik? Zna li možda kako se zove?

U: Paralelogram.

S: Zna li što je to paralelogram? Na koji geometrijski lik vas podsjeća?

U: Podsjeća na pravokutnik, samo što pravokutnik ima prave kutove, a paralelogram nema.

S: To je točno. Kakve su usporedne stranice paralelograma?

U: Jednakih su duljina.

S: Kakvi su im nasuprotni kutovi?

U: Nasuprotni kutovi su im jednaki, šiljasti i tupi.

S: Svi ovi geometrijski likovi čine tangram, a uz pomoć svih 7 tanova možemo oblikovati tangram lik/figura.

Aktivnost: Slaganje kvadrata

Ishod aktivnosti: Učenik slaže kvadrat uz pomoć svih 7 tanova i opisuje ga s obzirom na veličinu kutova i duljinu stranica.

S: Tangram se može izraditi iz različitih materijala. Ja ovdje imam tangram koji je napravljen od drva (Prilog pripreve 1), u povijesti se izrađivao od kamena, životinjskih kostiju, gline ili porculana, a svatko može napraviti tangram od papira ili kartona. Svatko od vas sada će dobiti tangram od kartona (Prilog pripreve 2). Vaš zadatak je da od svih sedam tanova probate složiti kvadrat, što znači da se svi dijelovi moraju dodirivati bez preklapanja i svi dijelovi se mogu okretati.

Učenici slažu lik kvadrata.

S: Pogledajte prezentaciju. Tko nije uspio, pogledajte i probajte sada složiti. Ima li kvadrat sve stranice jednakih duljina?

U: Sve stranice su jednakih duljina.

S: Kakvi su mu kutovi?

U: Kutovi su pravi.

S: Što ste primijetili prilikom slaganja kvadrata, kakvi su geometrijski likovi kada ih okrećemo? Mijenjaju li se? Kako izgleda trokut kad okrenemo tangram pločicu na drugu stranu?

Okrećem drvene tangram pločice kako bi učenici došli do odgovora.

U: Pravokutni jednakokrani trokuti ne mijenjaju oblik prilikom okretanja, tako da nema potrebe za okretanjem na drugu stranu, no paralelogram je potrebno okretati.

S: Tako je. No, što je bilo potrebno sa svim pločicama? Što ste najviše radili kako bi složili tangram lik?

U: Rotirali smo pločice.

Aktivnost: Slaganje tangram likova

Ishod aktivnosti: Učenik prepričava sadržaj legende, objašnjava svoje misli i osjećaje nakon slušanja legende, povezuje sadržaj, temu i motive teksta s vlastitim iskustvom i oblikuje tangram likove rotacijom tanova na temelju ispričane legende.

S: Budući da se o samom nastanku tangram slagalice ne zna puno, nastale su mnoge legende. Što je to legenda?

U: Legenda je književno djelo ili predaja o životu neke osobe ili o nekom događaju najčešće izmišljena ili obogaćena maštom.

S: Sada ću vam ispričati najpoznatiju legendu koja tvrdi da tangram dolazi iz vremena vladavine kineske dinastije Song (960. – 1279.). Naime, car je tražio od najspretnijeg staklara u cijelom carstvu da izradi staklenu ploču za prvi prozor na svom dvoru. Kako bi to ostvario, staklar je morao prijeći dugačak put kako bi dostavio tu ploču, no putem se spotaknuo o kamen, a staklo se razbilo na točno 7 geometrijskih likova. U trenutku kada je staklar pokušao sastaviti staklo u prvotan oblik, shvatio je da od tih dijelova može prikazati razne figure pa je odlučio caru prikazati cijeli put kojim je prošao. Tako je slagao svoj dom, devu u pustinji, brod kojim je plovio, planinu s koje je pao, a car je izrazio toliko oduševljenje da je danima proveo igrajući se sa sedam staklenih pločica i tako je nastala slagalica tangram. Sviđa li vam se ova legenda?

U: Da./ Ne.

S: Što se dogodilo sa staklom?

U: Staklar se spotaknuo i staklo se razbilo na 7 geometrijskih dijelova.

S: Jeste ste se i vi nekad spotaknuli i razbili nešto?

U: Da. /Ne.

S: Što je staklar shvatio kada je probao sastaviti dijelove?

U: Shvatio je da može oblikovati razne figure i tako prikazati caru što mu se dogodilo.

S: Upravo tako. Sada ćemo mi s našim tangramom prikazati ono što je i staklar prikazao caru. Tko se sjeća, što je prvo staklar složio.

U: Prvo je složio svoj dom.

S: Tako je. Složio je svoj dom. Pogledajte na prezentaciju i probajte složiti dom.

Učenici slažu kuću prema predlošku na prezentaciji, a na predlošku su vidljivi svi tanovi.

S: Što je zatim staklar složio?

U: Devu.

Učenici slažu devu prema predlošku na prezentaciji, a na predlošku su vidljivi svi tanovi.

S: Što je dalje staklar složio?

U: Složio je brod kojim je plovio.

S: Tako je. Probajte složiti brod, no sada nisu vidljivi bridovi tanova.

Učenici složu brod bez vidljivih bridova tanova, a zatim se na prezentaciji pojavljuje predložak na kojem su vidljivi svi tanovi.

S: Koja je bila zadnja figura koju je staklar oblikovao?

U: Oblikovao je planinu s koje je pao.

S: Tako je. Probajte složiti planinu, no sada bridovi tanova nisu vidljivi.

Učenici složu planinu bez vidljivih bridova tanova, a zatim se na prezentaciji pojavljuje predložak na kojem su vidljivi svi tanovi.

S: Je li teško složiti figuru bez vidljivih bridova?

U: Da./Ne.

Aktivnost: Slušanje priče

Ishod aktivnosti: Učenik oblikuje tangram likove na temelju poslušane priče, izražava svoj doživljaj, objašnjava svoje misli i osjećaje nakon slušanja priče te povezuje sadržaj, temu i motive teksta s vlastitim iskustvom

S: Sada ću vam pročitati jednu priču. Priča se zove *Grandfather Tang's story* ili *Priča djeda Tanga*. Priča djeda Tanga je kineska narodna priča, no autorica Ann Tompert je uz tu priču uklopila i tangram slagalicu. Priča je prevedena na hrvatski, a kako ću ja čitati priču, paralelno ćemo slagati likove koje ćete vidjeti na prezentaciji. Za sada se naslonite i uživajte!

Učenici slušaju priču, a kada dođe do dijela gdje likovi mijenjaju svoj oblik, učenici uzimaju svoje tangram pločice i na temelju predloška na prezentaciji oblikuju taj lik. Priča se zatim nastavlja, učenici ponovno izrađuju novi lik i tako sve do kraja priče.

S: Je li vam se svidjela priča? Tko su glavni likovi? Što su one radile? Što mislite o njihovim postupcima? Natječete li se vi nekad jedni s drugima ili jedni protiv drugih na način da bi se nekada to moglo izmaknuti kontroli? Koju su lekciju naučile vile lisice?

Učenici izražavaju svoja mišljenja na postavljena pitanja.

Sistematizacija naučenog:

S: Što smo danas novo usvojili?

U: Naučili smo što je tangram i kako oblikovati tangram lik.

S: Što smo u sklopu tangrama ponavljali.

U: Ponavljali smo što su geometrijski likovi i njihova svojstva.

S: Tako je.

ZAVRŠNI DIO SATA: (5 min)

Završna aktivnost: Kviz i anketa

Ishod aktivnosti: Učenik utvrđuje svoje znanje rješavajući kviz i ispunjava anketu

S: Sada ćemo riješiti kviz. Na prezentaciji će se prikazati pitanje. Ako znate odgovor dignite ruku. Tko digne ruku, odgovorit će na pitanje. Je li sve jasno?

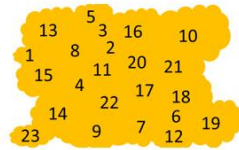
U: Da.

S: Za kraj, podijelit ću vam anketu koju sam spomenula na početku sata. Možete ju odmah početi ispunjavati, nemojte se potpisivati nigdje i budite iskreni. Hvala vam svima na sudjelovanju!

PLAN PLOČE:



Matematika

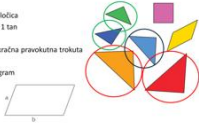


TANGRAM



TANGRAM PLOČICE

- 7 tangram pločica
- 1 pločica → 1 tan
- 5 jednakostranična pravokutna trokuta
- 1 kvadrat
- 1 paralelogram

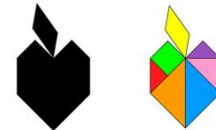


KVADRAT



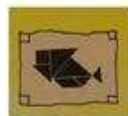
LEGENDA

• vladavina dinastije Song (960. – 1279.)



Grandfather Tang's story

Ann Tompert



1 Od koliko se geometrijskih dijelova sastoji tangram?

6 7 8

2 Nbroji sve dijelove tangrama.

Pet jednakostranična pravokutna trokuta, jedan kvadrat i jedan paralelogram.

3 Smiju li se dijelovi tangrama preklapati?
DA NE

5 Od koliko se trokuta sastoji tangram?
3 4 5

7 Od koliko se paralelograma sastoji?
2 3 1

9 Moraju li se prilikom slaganja tangram slagalice koristiti svi dijelovi?
 DA NE

4 Smiju li se dijelovi tangrama rotirati?
 DA NE

6 Od koliko se kvadrata sastoji tangram?
2 1 3

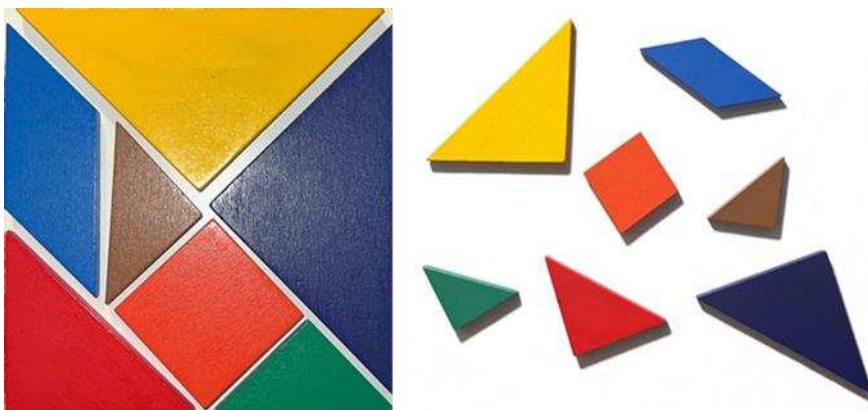
8 Iz koje zemlje potječe?
 Kina Japan Indija

Korištena literatura:

- Gusić, M. (2019). Legenda o tangramu. *Matka*, 28(109), str. 34-35.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). *Kurikulum nastavnog predmeta Hrvatski jezik za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). *Kurikulum međupredmetne teme za Osobni i socijalni razvoj za osnovne i srednje škole u Republici Hrvatskoj*.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019). *Kurikulum međupredmetne teme Učiti kako učiti za osnovne i srednje škole u Republici Hrvatskoj*.
- Slocum, J. (2003). *The tangram book*. Sterling Publishing Co.
- Tompert, A. (1990). *Grandfather Tang's story*. Crown Publishers.

Prilozi priprave:

- **Prilog priprave 1:** Tangram od drva



- **Prilog priprave 2:** Tangram od kartona



Izjava o izvornosti diplomskog rada

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istog nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

Karla Kušić