Strategija rješavanja problema prema Georgeu Polyau

Sedlaček, Monika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

UČITELJSKI FAKULTET

ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

MONIKA SEDLAČEK

DIPLOMSKI RAD

STRATEGIJA RJEŠAVANJA PROBLEMA PREMA GEORGEU POLYAU

Zagreb, srpanj 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

UČITELJSKI FAKULTET

ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

PETRINJA

DIPLOMSKI RAD

Ime i prezime pristupnika: Monika Sedlaček

TEMA DIPLOMSKOG RADA: Strategija rješavanja problema prema Georgeu Polyau

MENTOR: doc. dr. sc. Goran Trupčević

Zagreb, srpanj 2018.

SADRŽAJ:

Sažetak

U ovom radu objašnjene su četiri faze rada pri rješavanju problema prema Georgeu Polyau, a one su: razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana i osvrt. Navedene faze daju smjernice pomoću kojih se može riješiti problem. Korisne su za učitelje koji kod svojih učenika žele razvijati vještinu u rješavanju zadataka te za učenike koji nastoje razviti svoje vlastite sposobnosti. Učenici svoje vlastite sposobnosti stječu kroz rješavanje zadatka, primjenu stečenog znanja i diskusiju o rješenju. U radu su navedeni primjeri rješavanja zadataka po fazama rada prema Georgeu Polyau. Na kraju je dan autoetnografski prikaz vlastitog rješavanja problema prema navedenim fazama. Na umu uvijek trebamo imati da je rješenje velikog problema i veliko otkriće. U rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko.

Ključni pojmovi: George Polya, razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana, osvrt

Summary

In this work, four phases of solving problems, according to George Polya, have been explained, and they are: understanding the task, creating a plan, completing the plan and review. These phases serve as a guideline to solve the problem. They are useful for teachers who want to develop skills in solving tasks with their students and for students who want to develop their own abilities. Students acquire their own abilities through solving the task, applying the acquired knowledge, and discussing the solution. In the work, we can find examples of solving tasks according to the phase of work made by George Polya. At the end there is an auto-etnographic review of own problem solving approach according to the mentioned phases. We need to bear in mind that the solution to a great problem is a great discovery. There is something revealing in solving each problem.

Key words: George Polya, understanding the task, creating a plan, completing the plan, review

1. UVOD

George Polya jedan je od značajnih matematičara 20. stoljeća. Kao ambiciozan student želio je naučiti razumjeti nešto od matematike i fizike. Tako je pozorno slušao predavanja, čitao knjige te pokušavao shvatiti prikazana rješenja i činjenice. Pitanje koje ga je neprestano uznemiravalo bilo je:

„*Jest, rješenje je tu, čini se da je ispravno, no kako je moguće naći takvo rješenje? Jest, ovaj eksperiment čini se da uspijeva, činjenice su tu, no kako ljudi mogu otkriti takve činjenici? A kako bih ja sam mogao nešto takvo pronaći i otkriti?*“. (Polya, 1966, str. VI)

Želeći shvatiti rješenje problema, motive i postupke pri rješavanju zadataka i prenijeti ih na učenike Polya je napisao knjigu „*Kako ću riješiti matematički zadatak*“. Knjigom je htio postići da učitelji pomoću njegovih savjeta kod svojih učenika razviju vještinu u rješavanju zadataka, a da sam učenik razvije svoje vlastite sposobnosti.

Samo njegovo promišljanje i tok nastanka ove knjige motiviralo me za odabir teme diplomskoga rada u kojem se govori o njegovim fazama rada pri rješavanju zadataka. Te faze su potkrijepljene primjerima koje je Polya detaljno opisao. Njegova knjiga potakla me da po primjeru njegove četiri faze rada pri rješavanju matematičkih zadataka i sama pokušam riješiti nekoliko matematičkih zadataka s promišljanjima i pitanjima koje Polya sugerira da sebi postavljamo.

Polya sugerira da zadatke rješavamo tako da najprije shvatimo zadatak i stvorimo plan za njegovo rješavanje, a zatim izvršimo plan i ponovno se vratimo u zadatak te ustanovimo možemo li kontrolirati taj dokaz, to jest provjeriti dobiveno rješenje.

Rješenje velikog problema veliko je otkriće. U rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko. Ako neki zadatak pobudi interes i potakne kod osobe kreativnost i dosjetljivost pri njegovu rješavanju te ako se zadatak riješi vlastitim snagama, osoba koja ga je riješila proživjet će napetost i osjećat će ugodu stigavši do rješenja. Tako se može stvoriti sklonost za umni rad i ostaviti dojam na karakter i duh osobe.

2. BIOGRAFIJA GEORGEA POLYAE

George Polya rođen je u Budimpešti 13. prosinca 1887. godine. Nakon osnovne škole upisuje gimnaziju u kojoj uči mnoge jezike kao što su grčki, latinski, njemački i mađarski. Na sveučilištu u Budimpešti, 1905. godine upisuje pravo. Nakon prvog semestra shvaća da mu je taj studij dosadan te se stoga prebacuj na studij jezika i književnosti. Nakon dvije godine ponosno stječe zvanje profesora latinskog i mađarskog jezika. Nadalje se počinje zanimati za filozofiju, a njegov profesor filozofije ga nagovara da upiše tečaj iz fizike i matematike kako bi bolje shvatio filozofiju. Polya tada shvaća da je je matematika predmet kojeg želi proučavati. Studirajući na sveučilištu u Beču uz studij, Polya je podučavao barunovog sina Gregora koji nije imao nikakvog talenta. Radi toga, Polya je posvećivao svoje vrijeme pronalasku metode rješavanja problema koja bi pomogla barunovom sinu. Zaključio je da se vještina rješavanja problema može naučiti i da nije urođena vještina. Svoju doktorsku disertaciju iz matematike predaje nakon povratka u Budimpeštu gdje u međuvremenu upoznaje svog budućeg najboljeg suradnika, Gábora Szegu.

Godine 1913. odlazi na Göttingen na postdoktorski studij, a već je sljedeće godine pozvan da predaje u Zürichu studentima među kojima su bili Röntgen i Einstein. Svoju buduću suprugu Stellu upoznaje surađujući s doktorom E. H. Weberom. Ona je bila doktorova kćer te je s njom proveo 67 godina u braku sve do svoje smrti. Polya odlazi u Englesku 1924. godine i tamo provodi narednih godinu dana na Oxfordu i Cambridgeu. Zajedno sa Szegom sljedeće godine objavljuje jednu od svojih najutjecajnijih knjiga „*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*“. U njoj su klasificirali matematičke probleme po metodi rješavanja, a ne po njihovoj tematici. 1937. godine objavljen je „*Polya Enumeration Theorem*“, jedno od njegovih najpoznatijih otkrića. To otkriće je posljedica, koje se bavi prebrojavanjem broja bojanja u N boja konačnog skupa na kojem djeluje konačna grupa G. Kemijske strukture i moguće konfiguracije benzenskog prstena bile su motivacija za taj problem.

1940. godine zajedno sa svojom suprugom, Polya emigrira u Palo Alto u SAD zbog ratnih prilika i svojih židovskih korijena. Nakon Brown Universitya, do mirovine radi na Stanfordu. Poznat je po svojim istraživanjima i poučavanju rješavanja problema.

Poučavao je mnoge profesore u osnovnoj i srednjoj školi kako da motiviraju svoje učenike i razviju im vještine rješavanja problema.

Knjigu „*Kako riješiti matematički zadatak*“ objavljuje 1945. godine. Ona je prevedena na 17 jezika, a prodana u gotovo milijun primjeraka. Osim ove knjige, Polya se istaknuo s još njih koje su značajne za matematičku edukaciju. Knjiga „*Matematika i uvjerljivo zaključivanje*“ iz 1954. godine prevedena je na šest jezika, a „*Matematičko otkriće*“ iz 1962. godine na devet jezika.

Gotovo do dana svoje smrti posjećivao je srednje škole na zapadu SAD-a te držao predavanja. Tako je okupljao mnogo mladih koji su bili zainteresirani za matematiku i posjećivali njegove seminare na Stanfordu. Umro je u Palo Altu 7. rujna 1985.

3. RJEŠAVANJE ZADATAKA U UČIONICI

Najvažnija učiteljeva dužnost je pomoći svojim učenicima, a za to je potrebno vrijeme, praksa i predanost. Prema Polyau (1966) učenik bi se trebao što više osamostaliti, ali bez dovoljne pomoći učitelja on neće napredovati. U suprotnom, ukoliko učitelj pomaže učeniku previše, učenik dobiva rješenje bez samostalnog razmišljanja i ne preostaje mu ništa za rad. Stoga bi učitelj trebao pomagati učeniku u određenoj mjeri oprezno i nenametljivo, ali mu i omogućiti da sudjeluje u radu. Učitelj treba pomagati na prirodan način te se postaviti na učenikovo mjesto i gledati situaciju s njegovog stajališta. Polya (1966) navodi kako će učitelj pomaganjem doći do postavljanja istih pitanja (npr.: *Što je nepoznato? Što želiš pronaći? Što zapravo tražiš*?) čime će usmjeriti učenikovu pažnju na nepoznanicu te će učenika upozoravati na iste postupke. Nepoznanicu iz zadatka potrebno je usporediti s istom ili sličnom nepoznanicom iz poznatog nam zadatka i prisjetiti se metode kojom smo je spoznali. Učitelj ima dvostruki cilj obraćajući se svojim učenicima. On želi pomoći učeniku da riješi svoj zadatak te da razvije umne sposobnosti kako bi ubuduće sam mogao riješiti zadatak. Polya (1966) navodi da je rješavanje zadataka praktična vještina u kojoj osoba koja rješava zadatak mora promatrati i oponašati ono što drugi čine kada rješavaju zadatke te tako uči sastavljati nove zadatke radeći na njima. Ako učitelj kod svojih učenika želi razviti sposobnost rješavanja zadataka, mora im pobuditi interes za zadatke te im dati dovoljno vremena za oponašanje i vježbanje. Prema Polyau (1966), želi li učitelj kod svojih učenika razvijati misaone operacije, postavljat će učenicima pitanja sve do trenutka dok pitanja nisu usiljena. Tako učenik otkriva pravilno korištenje pitanja i preporuka.

4. ČETIRI FAZE RADA

Prema Polyau (1966) pri rješavanju nekog zadatka svoje stajalište mijenjamo više puta i tako neprestano zauzimamo drugi položaj. U početku će naša predodžba o zadatku biti nepotpuna, no čim je unaprijedimo naši će se vidici mijenjati sve dok zadatak ne bude riješen.

Polya (1966) navodi kako je korisno proći kroz četiri faze rada pri rješavanju zadatka:

Prvo, zadatak najprije moramo **razumjeti** i jasno vidjeti što se traži.

Drugo, moramo razmotriti međusobne povezanosti pojedinih sastavnica u zadatku. Moramo uočiti vezu između zadanih podataka i nepoznanice, kako bismo došli do **ideje rješenja** zadatka i ostvarili **plan**.

Treće, trebamo **izvršiti plan**.

Četvrto, vršimo **osvrt** na postupak rješavanja zadatka, provjeravamo napisano i raspravljamo o gotovom rješenju.

Ako učenik preskoči neku od ovih navedenih faza i vodi se svojim idejama, autor (1966) navodi kako može ispasti nešto nepoželjno. Zato je važno da učenik najprije razumije zadatak i napravi plan. Izbjeći će mnoge pogreške ako kontrolira svaki korak u izvršavanju svoga plana.

4.1. Razumijevanje zadatka

Pri rješavanju zadatka potrebno je razumijevanje i težnja za njegovo rješavanje. Zadatak bi trebao biti zanimljiv te niti prelagan niti pretežak. Učenik prvo mora shvatiti tekst, a učitelj razumijevanje teksta može kod učenika provjeriti tako da zahtijeva od njega da tekst ponovi. Polya (1966) navodi kako bi učenik morao znati formulirati zadatak i ukazati na njegove glavne dijelove to jest na nepoznanice, zadane podatke i uvjete, a učitelj ga neprestano treba poticati pitanjima vezanima uz njih:

„*Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet*?“ (Polya, 1966, str. 6)

Učenik treba pažljivo, više puta i s raznih strana preispitati glavne dijelove zadatka. Ako je zadatak vezan uz crtež, potrebno je nacrtati skicu, te na njoj istaknuti nepoznanice i oznake. Polya (1966) navodi ako je potrebno imenovati objekte, treba uvesti prikladne oznake i pritom paziti na njihov prikladan izbor. Tada je učenik prisiljen promatrati objekte koje treba obilježiti.

U tom stadiju, uz uvjet da ne očekujemo konačan odgovor već privremeni odgovor ili slutnju, korisno je pitanje:

„Je li moguće zadovoljiti uvjet?“ (Polya, 1966, str. 6)

4.1.1. Primjer prve faze rada – Razumijevanje zadatka

Zadatak: ***Kolika je dijagonala pravokutnog kvadra, kojemu su poznate dužina, širina i visina***

Polya (1966) navodi kako je za rješavanje ovog zadatka potrebno da učenici najprije znaju Pitagorin poučak i njegove detaljnije primjene, a iz dijela stereometrije su im dovoljna opća znanja.

Učitelj može zadatak učiniti interesantnijim tako da ga konkretizira.

> „Učionica ima oblik kvadra, kojemu bi se dimenzije mogle izmjeriti, a mogu se i samo grubo procijeniti. Učenici trebaju naći, „indirektno izmjeriti“, dijagonalu. Nastavnik pokazuje duljinu, širinu i visinu učionice, naznačuje pokretom ruke dijagonalu i oživljava sliku, nacrtanu na ploči, upozoravajući neprestano na učionicu.“ (Polya, 1966, str. 6)

Razgovor između nastavnika i njegovih učenika započeo bi ovako:

> Učitelj: „*Što je nepoznato*?“
>
> Učenik: *„Duljina dijagonale kvadra.“*
>
> Učitelj: *„Što je zadano?“*
>
> Učenik: *„Duljina, širina i visina kvadra.“*
>
> Učitelj: *Uvedi prikladne oznake! Kojim slovom da označimo nepoznanicu?“*
>
> Učenik: *„x“*
>
> Učitelj: *„Koja slova želiš za duljinu, širinu i visinu?“*
>
> Učenik: *„a, b, c.“*

Učitelj: *„Kako glasi uvjet koji veže a, b, c i x?“*

Učenik: *„x je dijagonala kvadra kojemu su a, b, c duljina, širina i visina.“*

Učitelj: *„Ima li zadatak smisla? Mislim time da li je uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice?“*

Učenik: *„Da. Znamo li a, b, c, znamo kvadar. Ako je određen kvadar, određena je i dijagonala.“*

(Polya, 1966, str. 6-7)

4.2. Stvaranje plana

Polya (1966) navodi da plan imamo kada u glavnim crtama znamo račune i konstrukcije koje moramo izvesti da bi dobili nepoznanicu.

> „Put od razumijevanja zadatka do postavljanja plana može biti dug i krivudav. Ta se ideja može pojavljivati postepeno. No, ona može, nakon prividno bezuspješnih pokušaja i perioda krzmanja, i iznenada sinuti kao „sjajna ideja“. Najbolje što nastavnik može za svoje učenike učiniti jest: nenametljivo im pomoći da do takve „sjajne ideje“ dođu.“ (Polya, 1966, str. 7)

Učiteljeva pitanja i preporuke izazivaju „sjajnu ideju“. Prema autoru (1966) učitelj bi se trebao staviti u položaj učenika te obratiti pozornost na svoje vlastito iskustvo, na teškoće i uspjehe koje je i sam imao pri rješavanju zadatka. Teško je doći do dobre ideje ako predmet koji proučavamo malo poznajemo, a također je nemoguće doći do ideje ako predmet uopće ne poznajemo. Ideje se stječu iskustvom iako samo sjećanje nije dovoljno za nju. Polya ovu situaciju uspoređuje s gradnjom kuće. On (1966) navodi kako sam materijal nije dovoljan za izgradnju kuće, ali je također ne možemo izgraditi ako ga nismo prikupili. Materijal koji je potreban za rješavanje matematičkog zadatka sastoji se od ranijeg stečenog matematičkog znanja, to jest ranije riješenih zadataka i dokazanih teorema. Stoga je, prije rješavanja zadatka, dobro započeti rad pitanjem:

„Znaš li neki srodni zadatak?“ (Polya, 1966, str. 8)

Postoji mnogo zadataka koji su srodni zadatku koji nam je zadan. Od njih trebamo odabrati jedan ili nekoliko njih koji će nam koristiti. Polya (1966) daje preporuku koja nam ukazuje na bitno zajedničko svojstvo:

„Promotri nepoznanicu! I nastoj sjetiti se nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu!“ (Polya, 1966, str. 8)

Ako se sjetimo takvog poznatog nam zadatka kojeg smo ranije riješili imamo sreću i trebamo je opravdati tako da iskoristimo taj zadatak:

„Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš li ga upotrijebiti?“ (Polya, 1966, str. 8)

Ako su dosadašnja pitanja shvaćena, onda bi trebala pomoći pri pokretanju ispravnog lanca misli iako nije uvijek tako. Polya (1966) navodi kako ta pitanja nemaju čarobne moći. U slučaju da pitanja ne djeluju u ispravnom pokretanju lanca misli trebaju se tražiti nove početne točke i istraživati različite aspekte zadatka koji je ispred nas. Autor (1966) navodi kako zadatak moramo varirati, preobražavati te raditi preinake.

„Možeš li zadatak drugačije izraziti?“ (Polya, 1966, str. 8)

Do prikladnog pomoćnog pitanja može nas dovesti variranje zadatka:

„Ne možeš li riješiti postavljeni zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodni zadatak! “ (Polya, 1966, str. 8)

Prema Polyau (1966) ako pokušamo upotrijebiti poznate zadatke i teoreme te ako razmotrimo razne modifikacije i uvedemo razne pomoćne zadatke, može se dogoditi da se udaljimo od svog prvobitnog zadatka toliko da se potpuno izgubimo, sljedećim pitanjima se vraćamo ka njemu:

„*Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet*?“ (Polya, 1966, str. 8)

4.2.1. Primjer četvrte faze rada – Stvaranje plana

Polya (1996) nastavlja s primjerom kojeg smo promatrali nakon što su učenici počeli shvaćati zadatak, zainteresirali se za njega i počinju stvarati svoje ideje. Ako učitelj uvidi da učenici nemaju ideja, tada on nastavlja voditi dijalog s učenicima tako da u izmijenjenom obliku ponavlja pitanja na koja učenici ne odgovaraju. Pri tome, učitelj će se u većini slučajeva susresti sa zbunjujućom šutnjom učenika.

Primjer razgovora između učitelja i učenika pri ponavljanju pitanja na koja učenici ne odgovaraju:

Učitelj: *„Znaš li neki srodni zadatak?“*

Učitelj se susreće sa šutnjom svojih učenika.

Učitelj: „*Promotri nepoznanicu! Znaš li neki zadatak koji sadrži istu nepoznanicu?“*

Učitelj se ponovno susreće sa šutnjom svojih učenika.

Učitelj: „*No, što je nepoznato?“*

Učenik: *„Dijagonala kvadrata.“*

Učitelj: *„Znaš li neki zadatak s istom nepoznanicom?“*

Učenik: *„Ne. Još nismo imali zadatak o dijagonali kvadra.“*

Učitelj: „*Znate li zadatak sa sličnom nepoznanicom?“*

Učitelj se iznova susreće sa šutnjom svojih učenika.

Učitelj: „*Vidite, dijagonala je dužina. Jeste li rješavali zadatak u kome je bila nepoznanica duljina neke dužine?“*

Učenik: „*Da, da, svakako, jesmo. Tražili smo, na primjer, stranicu pravokutnog trokuta.“*

Učitelj: „*Dobro! To je zadatak koji je srodan vašem, a već je riješen. Možete li ga upotrijebiti?“*

Učenici ponovno šute.

Učitelj: „*Vi se srećom sjećate jednog zadatka koji ste već prije riješili, a srodan je vašem sadašnjem. Biste li uveli neki pomoćni element da budete u mogućnosti upotrijebiti taj zadatak?“*

Učenici šute i dalje.

Učitelj: „*Pazite! Zadatak kojega ste se sjetili obrađuje trokut. Imate li na svojoj slici kakav trokut?“*

(Polya, 1966, str. 9)

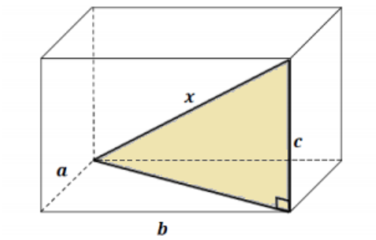
Polya (1966) navodi da se možemo nadati da je ova uputa bila dovoljno eksplicitna da ih navede na ideju rješenja koja se sastoji u tome da uvedemo pravokutni trokut (slika 1.), kojemu je tražena dijagonala hipotenuza. Također navodi da učitelj treba biti spreman i na slučaj da ni to pitanje neće biti dovoljno da „probudi" učenike. Ako do toga dođe, učitelj mora imati u rezervi dodatne još jasnije upute:

„Biste li htjeli imati na slici trokut?

Koju vrstu trokuta biste najradije imali?

Dijagonalu još ne znate naći, a kažete da biste mogli naći stranicu trokuta. No, što ćete učiniti?

Biste li mogli odrediti dijagonalu kada bi ona bila stranica trokuta?" (Polya, 1996, str. 10)



Slika 1. Pravokutni trokut kojemu je hipotenuza dijagonala kvadrata *x*

Kada učenici uspiju pronaći pravokutni trokut i označiti ga na skici, učitelj se u to treba uvjeriti kako bi ih mogao potaknuti na izračunavanje:

> Učitelj: *„Mislim da je bila dobra ideja nacrtati taj trokut. Sada imate taj trokut, no imate li nepoznanicu?"*
>
> Učenik: *„Nepoznanica je hipotenuza tog trokuta. Mi je možemo izračunati po Pitagorinom poučku."*
>
> Učitelj: *„Možete, ako su poznate obje katete. Jesu li one poznate?"*
>
> Učenik: *„Jedna je kateta zadana , to je c. A drugu, mislim nije teško naći. Pa da – druga kateta je hipotenuza jednog drugog pravokutnog trokuta."*
>
> Učitelj: *„Vrlo dobro! Sada vidim da imate plan."*
>
> (Polya, 1966, str. 10)

4.3. Izvršavanje plana

Da bi stvorili plan potrebna su nam ranije stečena znanja, koncentracija na cilj i sreća. Izvršiti plan je mnogo lakše nego stvoriti ga i za to je potrebno mnogo strpljenja. Strpljivo moramo ispitivati redom detalje dok nam sve ne bude jasno.

Prema Polyau (1966) učitelj ima malo posla ako je učenik uistinu shvatio plan, ali opasnost bi se mogla pojaviti ako učenik plan zaboravi. To se većinom događa kada učenik primi plan na osnovu učiteljevog autoriteta to jest izvana.

Polya (1966) navodi ako učenik provodi plan kojeg je izradio sam takvu ideju neće lako zaboraviti jer je praćena unutarnjim zadovoljstvom.

Učitelj treba zahtijevati da učenik kontrolira svaki korak. U ispravnost nekog koraka možemo se uvjeriti „intuitivno“ ili „formalno“. Potrebno je koncentrirati se na plan sve dok ne prestanemo sumnjati i uvidimo ispravnost tog koraka ili ga razjasniti prema formalnim pravilima.

Polya (1966) navodi da učenik treba biti uvjeren u ispravnost svakog koraka pri rješavanju zadatka, a učitelj će u izvjesnim slučajevima naglasiti razliku između „uvidjeti“ i „dokazati“ pitanjima:

„Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan? Možeš li i dokazati da je korak ispravan?“ (Polya, 1966, str. 11)

4.3.1. Primjer treće faze rada – Izvršavanje plana

Sada učenik napokon ima ideju rješenja zadatka. Na slici, učenik vidi pravokutni trokut kojemu je nepoznata hipotenuza označena sa x, jedna kateta je zadana visina c, a druga kateta je dijagonala jednog pravokutnika. Prema Polyau (1966), učenik treba uvesti prikladne oznake, pa pretpostavimo da je s y označio drugu katetu, dijagonalu pravokutnika sa stranicama a i b. Nakon što su se uvele oznake, ideja rješenja bi se trebala javnije vidjeti, a sastoji se u tome da se uvede pomoćni zadatak s nepoznanicom y. Učenik najprije treba analizirati jedan, a potom drugi pravokutni trokut obraćajući pozornost na sliku 1.

Analizirajući, učenik će dobiti:

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

A odatle, eliminiranje pomoćne nepoznanice *y*:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Polya, 1966, str. 12)

Ako se točno izvodi korak po korak, učitelj nema razloga prekidati rad učenika, osim u slučaju kada želi naglasiti učenicima da pažljivo kontroliraju korak po korak.

Učitelj može postaviti pitanje:

„*Možeš li jasno vidjeti da je trokut sa stranicama x, y, c pravokutan*?“ (Polya, 1966, str. 12)

4.4. Osvrt

Učenici gotovo uvijek nakon riješenog zadatka zaklapaju svoje bilježnice i čekaju daljnju uputu za rad. Time izostavljaju važnu i poučnu fazu rada, osvrt.

„Osvrtom na gotovo rješenje, ponovnim razmatranjem i preispitivanjem rezultata i puta koji je do njega doveo, oni bi mogli učvrstiti svoje znanje i povećati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka.“ (Polya, 1966, str. 12)

Prema Polyau (1966), učitelj bi i nakon što su učenici riješili zadatak trebao dati do znanja da ima još posla oko njega te da uvijek svojom marljivošću možemo poboljšati rješenje kako bismo ga bolje razumjeli.

> „Učenik je dakle izvršio svoj plan. Napisao je rješenje kontrolirajući pri tom svaki korak. Prema tome, imao bi razlog vjerovati da mu je rješenje ispravno. Ipak: pogreške su uvijek moguće, naročito ako je dokazivanje bilo dugo i zapleteno. Stoga je provjeravanje poželjno.“ (Polya, 1966, str. 13)

Polya (1966) navodi pitanja za brz i intuitivni postupak provjeravanja rezultata:

„Možeš li provjeriti rezultat? Možeš li provjeriti dokaz?" (Polya, 1966, str. 13)

Također navodi dva dokaza kojima se preko osjetila gledanja i dodirivanja može uvjeriti u ispravnost rješenja:

„Možemo li rezultat izvesti drugačije? Možeš li ga uočiti na prvi pogled?" (Polya, 1966, str. 13)

Polya (1966) smatra da je jedna od glavnih dužnosti učitelja da njegovi učenici ne steknu dojam da su matematički problemi nepovezani kako međusobno, tako i s bilo čim drugim (npr. različitim dijelovima matematike i stvarnog života). Promišljanje o riješenom zadatku prilika je da se istraže te veze. Nakon riješenog zadatka, učenicima će biti interesantno pogledati zadatak unatrag, posebno ako su pri rješavanju uložili veliki trud. Učenici će tada željeti uvidjeti što još mogu postići kroz taj napor te kako mogu i neki drugi put postupiti jednako dobro.

Učitelj može potaknuti učenike na promišljanje o riješenom zadatku tako da zamisle slučajeve u kojima bi mogli iskoristiti upotrijebljeni postupak ili primijeniti dobiveni rezultat:

„*Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak?*". (Polya, 1966, str. 13)

4.4.1. Primjer četvrte faze rada - Osvrt

Prema Polyau (1966) u fazi izvršavanja plana učenici su došli do rješenja i shvatili da ako su a, b i c tri brida kvadra koja izlaze iz istog vrha, dijagonala je:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

„*Možeš li provjeriti rezultat?"* (Polya, 1966, str. 13)

Na ovakvo pitanje ne može se očekivati dobar odgovor od neiskusnih osoba.

Polya (1966) navodi kako bi učenici trebali rano uvidjeti da zadatci „sa slovima" imaju prednost pred numeričkim zadatcima. Zadatke „sa slovima" možemo provjeriti na razne načine, za razliku od numeričkih zadataka kojima bi neki od takvog načina provjeravanja bio nezgodan. Učitelj može raznim pitanjima o rezultatu diskutirati s učenicima. Prema Polyau (1966), učenici bi trebali lako odgovarati na takva pitanja s odgovorima „da“, dok bi odgovor „ne“ upućivao na mogućnost da postoji pogreška u zadatku.

Primjeri pitanja koja učitelj može postaviti svojim učenicima u ovoj fazi su:

„Jesi li iskoristio sve zadano? Pojavljuju li se u tvojoj formuli za dijagonalu sve zadane veličine a, b, c? „ (Polya, 1966, str. 14)

> „*Duljina, širina visina jednako su važne u našem pitanju; naš je zadatak simetričan s obzirom n a, b, c. Je li izraz dobiven za dijagonalu, simetričan a, b, c? Ostaje li on nepromijenjen ako međusobno zamijenimo a, b, c?* Naš je zadatak stereometrijski: odrediti dijagonalu kvadra kome su zadani bridovi *a, b, c*. Taj zadatak je analogan planimetrijskom zadatku: odrediti dijagonalu pravokutnika kome su zadane stranice *a, b*. *Da li je i rezultat našeg "prostornog" zadatka analogan rezultatu našeg „ravninskog“ zadatka?* Ako se visina c smanjuje i najzad nestaje, naš kvadar postaje paralelogram. *Uvrstiš li u svoju formulu c=0, dobivaš li ispravnu formulu za dijagonalu pravokutnog paralelograma?*“ (Polya, 1966, str. 14)

Polya (1966) navodi da ako visina *c* raste, onda i dijagonala raste. *„Pokazuje li to formula?“* Ako sva tri brida *a, b, c*, kvadra rastu u istom omjeru, tada raste i dijagonala u tom istom omjeru. Zamijeni li se u formuli *a, b, c* s *10a, 10b, 10c*, izraz za dijagonalu također mora ispasti deseterostruki. *Da li je to točno?*

Prema autoru (1966), ako *a, b, c* mjerimo u decimetrima, tada formula daje i dijagonalu mjerenu u decimetrima, a ako se sve mjere pretvore u centimetre, formula mora ostati ispravna. *Da li je to točno?* Tada učenici provjeravaju promatranjem dimenzije, stoga su takva pitanja dobra radi njihovog učinka iz više razloga.

„Ponajprije inteligentnog učenika ne može, a da ne impresionira činjenica da formula odolijeva tolikim iskušenjima.“ (Polya, 1966, str. 15)

Prema Polyau (1966) učenik je prije bio uvjeren da je formula ispravna, radi toga što ju je pažljivo izveo. Sada je uvjeren još više. Zahvaljujući postavljenim pitanjima pojedinosti formule dobivaju novo značenje te se povezuju s raznim činjenicama iz područja matematike, pa će se povećati izgledi da učenici zapamte formulu. Navedena pitanja mogu se prenijeti na slične zadatke, a nakon određenog iskustva, inteligentan učenik će i sam moći zapaziti opće osnovne ideje: iskorištavanje svih bitnih podataka te njihovo variranje, simetriju i analogiju. Navikne li učenik usmjeravati svoju pažnju na takve stvari, to će biti vrlo korisno za usavršavanje vještine rješavanja zadataka.

„*Možeš li kontrolirati dokaz*?“ (Polya, 1966, str. 15)

U težim slučajevima argumentaciju se treba provjeravati korak po korak, dok je u običnim slučajevima dovoljno pri provjeravanju rezultata izvući „škakljiva“ mjesta.

U ovom zadatku vraćamo se u fazu izvršavanja plana i postavljenog pitanja:

„*Možeš li jasno vidjeti da je trokut sa stranicama x, y, c pravokutan*?“ (Polya, 1966, str. 12)

„*Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak*?“ (Polya 1966, str. 15)

Polya (1966) navodi da će uz učiteljevu potporu i primjere učenici lako pronaći primjene koje se uglavnom sastoje u tome da se apstraktnim matematičkim elementima zadatka pridaje neka konkretna interpretacija. Primjer toga jest učiteljeva konkretna interpretacija u ovom zadatku kada je za kvadar uzeo učionicu. Ako učenici iscrpe svoju fantaziju, učitelj sam može postaviti neznatno promijenjen zadatak:

„U kvadru je zadana duljina, širina i visina. Nađi udaljenost od njegova središta do jednog vrha.“ (Polya, 1966, str. 15)

Prema Polyau (1966) učenici tada, ako primijete da je tražena udaljenost polovina izračunate dijagonale, mogu primijeniti rezultat svog upravo riješenog zadatka. Također mogu primijeniti metodu uvodeći prikladne pravokutne trokute. Nadalje Polya (1966) navodi kako učitelj mora ponovno razmotriti međusobni položaj četiriju dijagonala u kvadratu i šest piramida, kojima su baze susjedne plohe kvadrata, središte kvadrata im je zajednički vrh, a poludijagonale pobočni bridovi. Učitelj, u slučaju da se kod učenika „probudila“ geometrijska fantazija, može postaviti pitanje:

„Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti za neki drugi zadatak?“ (Polya, 1966, str. 16)

Učenikova konkretna interpretacija glasila bi:

> „Na nekoj zgradi, u središtu njenog horizontalnog pravokutnog krova, dugog 21 m, širokog 16 m, treba podići jarbol za zastavu visok 8 m. Da učvrstimo jarbol, potrebna su nam četiri jednaka čelična konopa. Konopi se trebaju protezati od jednog zajedničkog mjesta na jarbolu, koje je 2 m ispod vrha jarbola, pa do četiriju ugaonih točaka na krovu. *Koliko je dugačak pojedini konop?*“ (Polya, 1966, str. 16)

Učenici bi tada trebali primijeniti svoju metodu te uvesti jedan pravokutni trokut u vertikalnoj, a drugi u horizontalnoj ravnini. Polya (1966) navodi kako osim toga mogu i upotrijebiti rezultat zamislivši pravokutni kvadar, kojem je dijagonala x od četiri konopa, dok su mu bridovi:

$$a = 10{,}5 \qquad b = 8 \qquad c = 6.$$

Upotrebom formule učenici će naći „ $x = 14{,}5$“. (Polya, 1966, str. 16)

4.5. Četiri faze rada kroz zadatak krnja piramida

4.5.1. Razumijevanje zadatka

U jeziku se često koriste metafore koje mogu biti slabe, posredne i jasne. Polya (2003) navodi kako su ga baš opće metafore dovele do geometrijske ilustracije te da su mnoge metafore međusobno ovisne.

> „One mogu biti međusobno povezane, jedinjene, više ili manje slične ili pak obrnuto međusobno slijepljene u grupi. Tako postoji opsežna porodica metafora koje istodobno imaju dvije karakteristične crte: sve se one tiču osnovnih principa rješavanja zadataka i sve one dovode do istih geometrijskih konfiguracija.“ (Polya, 2003, str. 173)

Prema Polyau (2003) naći rješenje zadatka znači utvrditi vezu između ranije diferenciranim objektima ili idejama. To znači da moramo utvrditi vezu između: objekata koje imamo i objekata koje moramo pronaći, zadanog i nepoznatog te pretpostavke i zaključka.

Istraživač zaslužuje veće priznanje time što su u početku zavisni objekti dalji. Polya (2003) navodi kako ponekada takva veza može biti zamišljena kao most.

> „Značajno otkriće zadivljuje nas kao i gradanja mosta nad dubokim ponorom koji dijeli dvije međusobno daleke ideje. Često je ta veza ostvarena pomoću lanca: dokaz stoji pred nama kao uzajamna vrsta argumenata, kao lanac – dugačak lanac izvoda. Taj lanac u cjelini nije čvršći od najslabije karike u njemu. Ako bilo koja karika nedostaje, nemamo valjano zasnovanog dokaza., nema neprekinutosti tijeka rasuđivanja.“ (Polya, 2003, str. 173-174)

Kako bi znali što je zadatak najprije moramo imati neki primjer. Polya daje primjer stereometrijskog zadatka:

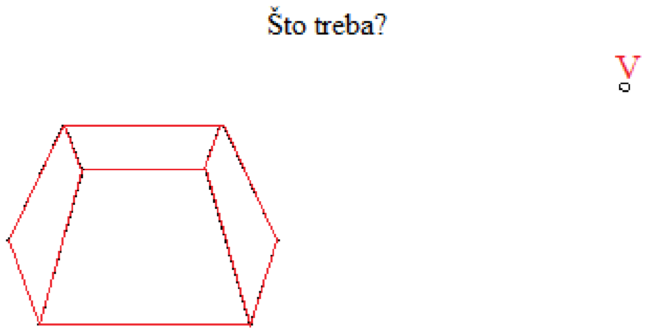
„Nađite obujam V pravilne uspravne krnje četverostrane piramide ako je zadana njezina visina h, duljina brida donje osnovice b i duljina brida gornje osnovice a.“ (Polya, 2003, str. 174)

Polya (2003) navodi da najprije treba obratiti pozornost na cilj zadatka i na to što je naš prvi korak na putu prema rješenju.

Zadajemo si pitanje: *„Što se zahtijeva?“*. (Polya, 2003, str. 174)

Nadalje, pokušavamo što jasnije zamisliti zadani oblik tijela, kojemu želimo odrediti obujam (slika 2., lijevo).

Polya (2003) navodi kako misaonu sliku možemo prirodno grafički interpretirati kao jednu točku koju označimo s *V* (slika 2., desno). Na tu točku mora biti usredotočena naša pažnja.



Slika 2. Usmjeravanje pozornosti na jedan objekt

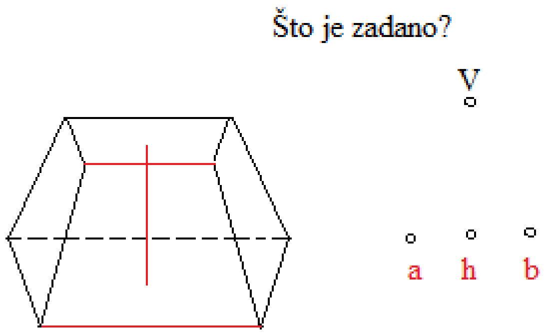
Nepoznanicu je nemoguće naći ako o njoj ne znamo ništa.

Zato je potrebno postaviti pitanje: *„Što je zadano – ili što imamo?“* (Polya, 2003, str. 175)

Prema Polyau (2003), nakon što si postavimo pitanje trebamo zadržati pozornost na crtama figure čije su nam duljine poznate, to jest na dužinama čije su duljine *a, b* i *h*.

„Kvadrat sa stranicom duljine a je na gornjem dijelu promatranog tijela, a kvadrat sa stranicom duljine b je na donjem dijelu (vidi sliku 3., lijevo).“ (Polya, 2003, str. 175)

Sada se, prema Polyau (2003), naša misao o obliku izmijenila. Njen odraz su nove tri točke koje se pojavljuju i koje prikazuje slika 3., desno.



Slika 3. Kako popuniti prazninu između gornje osnovice *a*, gornje osnovice *b* i visine *h*

Polya (2003) navodi kako uvedene tri točke predočavaju zadano. Između točaka i nepoznanica postoji prekid koji je prikazan s prazninama. Praznina simbolizira problem koji se nalazi ispred nas. Prema Polyau (2003) cilj nam je povezati nepoznanicu *V* sa zadanim podacima *a, b* i *h* te popuniti prazninu između njih.

Za prvu fazu rada bitno nam je razumjeti zadatak, a to se ostvarilo zornom predodžbom cilja kojemu težimo, to jest prekidom.

4.5.2. Stvaranje plana

„U kojem smjeru krenuti dalje?“ (Polya, 2003, str. 175)

Polya (2003) navodi ako nismo u stanju riješiti postavljeni zadatak, trebamo pronaći srodan zadatak koji je lakši. Potrebno je postaviti pitanje:

> „*Što je nepoznanica?* – Obujam krnje piramide.
>
> *Kakvo je to geometrijsko tijelo?* – To je dio pune piramide.
>
> *Kakav dio? Kako se on definira?* – Kao dio između … Dalje ne nastavljamo to je dovoljno za drugačiju formulaciju problema.
>
> Krnjom piramidom zovemo dio pune piramide koji ostaje ako se od pune piramide odreže mala piramida odrezana ravninom koja je usporedna s osnovicom.“ (Polya, 2003, str. 175)

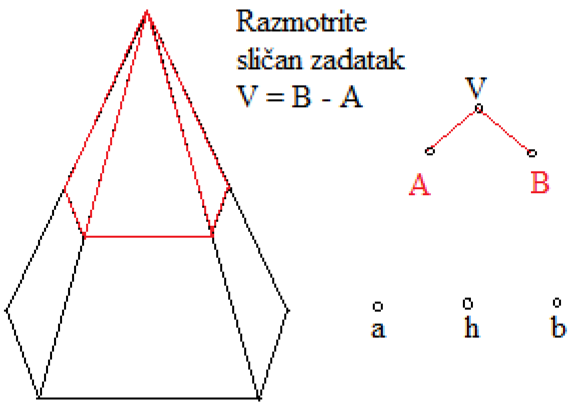
Prema Polyau (2003) u ovom zadatku osnovica veće piramide je kvadrat površine b^2.

„Ako bismo znali obujme tih dvaju piramida – označimo ih s *B* i *A*, tada bismo znali naći obujam *V* krnje piramide: $V = B – A$." (Polya, 2003, str. 175)

Sada imamo ideju, a ona je da pokušamo pronađemo obuje *B* i *A*.

Polya (2003) navodi kako se sada početni zadatak nalaženja obujma *V* krnje piramide sveo na dva pomoćna i srodna zadatka, to jest na nalaženje obujma *A* i *B* punih piramida.

Ovaj proces trebamo grafički predočiti. Polya (2003) navodi kako na slobodno mjesto između zadanih *a, b* i *h*, i nepoznanice *V* trebamo staviti dvije nove točke i označiti ih s *A* i *B*. Kako bismo naglasili povezanost između triju veličina, Polya (2003) navodi da trebamo nacrtati dužine od *A* do *V*, te od *B* do *V*. Time je zorno prikazano kako polazeći od *A* i *B* možemo doći do *V*. Polya (2003) govori kako se rješavanje zadatka sada svodi na rješavanje dvaju jednostavnih zadataka o nalaženju *A* i *B*.



Slika 4. Prikaz piramide koja se sastoji od dva dijela, krnje piramide i manje piramide

Na slici 4. možemo vidjeti da su nepoznanice *A* i *B* razdvojene prazninom od zadanih točaka *a, b* i *h*.

„Međutim, stanje nije beznadno jer potpunu piramidu bolje poznajemo od krnje, pa iako su se umjesto jedne nepoznanice *V* pojavile dvije nove, *A* i *B*, one su obje po svojoj prirodi u istom odnosu sa zadanim veličinama, tj. s *a* i *b*." (Polya, 2003, str. 176)

Polya (2003) navodi kako grafičko predočenje mentalne situacije (slika 4., desno) simetrično.

„Dužina $\overline{VA}$, nagnuta je na stranu zadane veličine a, a dužina $\overline{VB}$, na stranu zadane veličine b."

Prema Polyau (2003) zadatku sada pristupamo tako da probamo premostiti prekid između nepoznanica i zadanih veličina, tako da dio ponora ostavimo iza sebe.

„*Što dalje moramo pronaći?* - Moramo naći nepoznanice *A* i *B*.

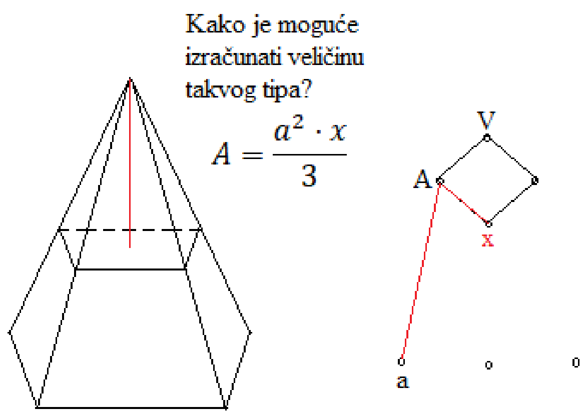
Što je nepoznanica A? – Obujam piramide.

Kako se može dobiti takav objekt? Na koji način možemo naći sličnu nepoznanicu? Koji su nam elementi potrebni da nađemo takve nepoznanice? Što mora biti nužno zadano za određivanje takve nepoznanice?" (Polya, 2003, str. 176)

Prema Polyau (2003) obujam možemo izračunati ako nam je poznata površina osnove i visina piramide. Obujam je jednak trećini umnoška površine osnovice i visine. Visinu piramide ne znamo, stoga je možemo označiti s *x*.

„Tada je: $A = \frac{a^2 \cdot x}{3}$." (Polya, 2003, str. 176)

Na sljedećoj slici 5., prikazana je piramida sa svim detaljima. Istaknuta je visina *x* i brid a. Polya (2003) navodi kako se nad zadanim veličinama pojavljuje nova točka *x* i kose crte koje spajaju *A* s *x* i a. U zadatku je postignut napredak, ali ostaju nam još dvije nepoznanice.



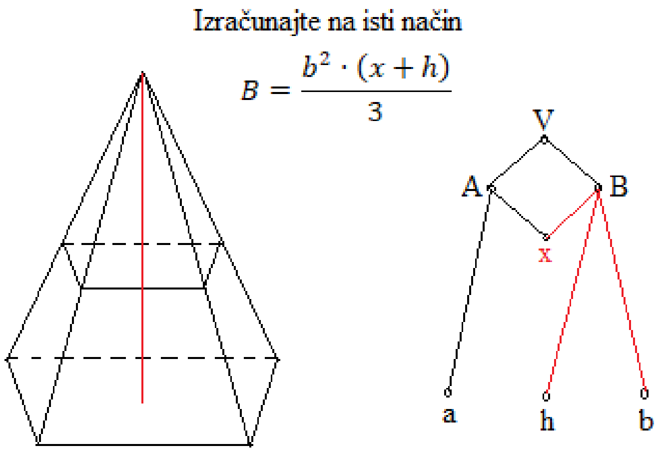
Slika 5. Prikaz piramide koja se sastoji od krnje piramide i manje piramide kojoj je označena visina

Polya (2003) navodi kako smo nepoznanicu *V* uspjeli povezati s jednom od zadanih veličina, to jest s a. S obzirom da su nepoznanice A i B iste prirode, one se nalaze simetrično i sljedeći korak bi nam trebao biti očit. Izraz za obujam *A* je već pronađen pomoću osnovice i visine.

Polya (2003) daje analogni izraz za obujam *B*, a on glasi:

$$B = \frac{b^2 \cdot (x+h)}{3}.$$

Slika 6. pokazuje nam nove tri kose crte koje spajaju *B* s *b*, *h* i *x*. Polya (2003) navodi kako crte ukazuju da se do *B* može doći polazeći od *b*, *h* i *x*. Ostaje samo jedna točka koja nije povezana sa zadanim veličinama, točka *x*. Prema Polyau (2003) slobodni se prostor suzio, a prazni prostor nalazi se još samo između *x* i zadanih veličina.



Slika 6. Prikaz piramide koja se sastoji od krnje piramide i manje piramide te njihove visine

„*Što nam je nepoznato?* – Duljina dužine *x*.

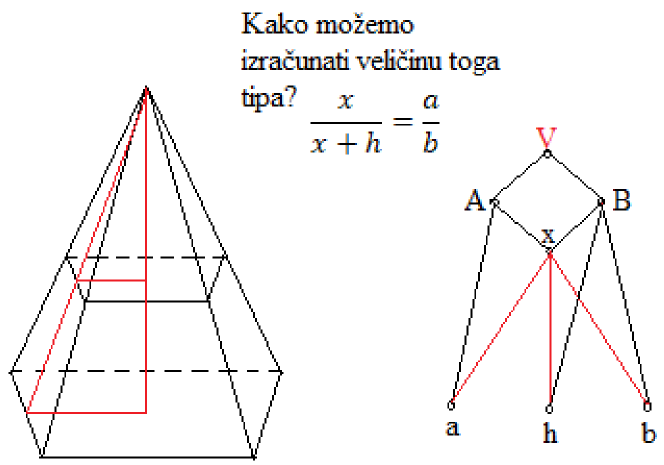
Kako se može naći takva nepoznanica? Kako se može dobiti sličan objekt? – Duljina dužine najlakše se određuje pomoću trokuta (pravokutnog ako je moguće) ili na temelju sličnosti dvaju trokuta.

Na našoj slici nema pogodnog trokuta; osim toga, nužno je da *x* bude jedna od njegovih stranica. Takav bi se trokut mogao nalaziti npr. u ravnini koja prolazi visinom male piramide obujma A i ta bi ravnina prolazila visinom velike piramide obujma *B* koja je slična maloj piramidi.“ (Polya,2003, str. 177)

To bi nam dalo dva slična trokuta koja leže u ravnini koja prolazi visinom. Također ta ravnina je usporedna poznatoj stranici osnovice jedne od naših piramida.

Prema Polyau (2003) na slici 7. može se vidjeti dva slična trokuta pomoću kojeg ne bi trebalo biti teško odrediti *x*.

„Koristimo omjer: $\frac{x}{x+h} = \frac{a/2}{b/2} = \frac{a}{b}$. “ (Polya, 2003, str. 178)



Slika 7. Praznine među zadanim podacima su popunjene

Polya (2003) navodi kako nam je u ovoj etapi važno da *x* možemo izraziti pomoću a, b i h.

„Posao je gotov, uspjeli smo premostiti pukotinu – uspostavili smo neprekinutu vezu između nepoznanice veličine *V* i zadanih veličina a, b, i h. Pri tome smo koristili međuveličine (pomoćne nepoznanice) *A*, *B* i *x*.“ (Polya, 2003, str. 178)

4.5.3. *Izvršavanje plana*

„*Je li naš zadatak riješen u potpunosti?*- Još nije, ne sasvim.“ (Polya, 2003, str. 178)

Polya (2003) navodi kako je još potrebno izraziti obujam *V* pomoću zadanih veličina a, b i h te da je preostalo za napraviti još rutinski dio posla. Sumnja je ostala iza nas jer je svaki sljedeći korak koji je urađen od početka rada na zadatku popunio prazninu. Polya (2003) navodi kako sada uspješno možemo doći do nepoznanice *V* polazeći od zadanih a, b, i h sljedeći niz neprekinutih veza koje vidimo na slici 7.

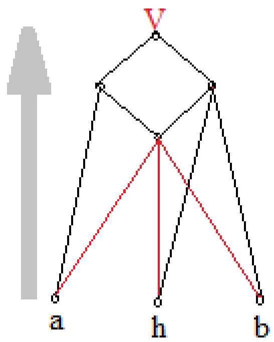
Nadalje, pronalazimo x: „ $x = \frac{a \cdot h}{b \cdot a}$, odnosno $x + h = \frac{b \cdot h}{b - a}$.„ (Polya, 2003, str. 178)

Prema Polyau (2003) zatim uvrštavamo izraz za *x* u navedene prethodne dvije jednakosti te dobivamo: „$A = \frac{a^3 \cdot h}{3(b-a)}$, odnosno $B = \frac{b^3 \cdot h}{3(b-a)}$. “ (Polya, 2003, str. 178)

Možemo uočiti sličnost ovih dvaju jednakosti. Na kraju trebamo uvrstiti dobivene jednakosti u prvu jednakost koju smo napisali.

$$V = B - A = \frac{b^3 - a^3}{b - a} \cdot \frac{h}{3} \,, \quad V = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot h$$

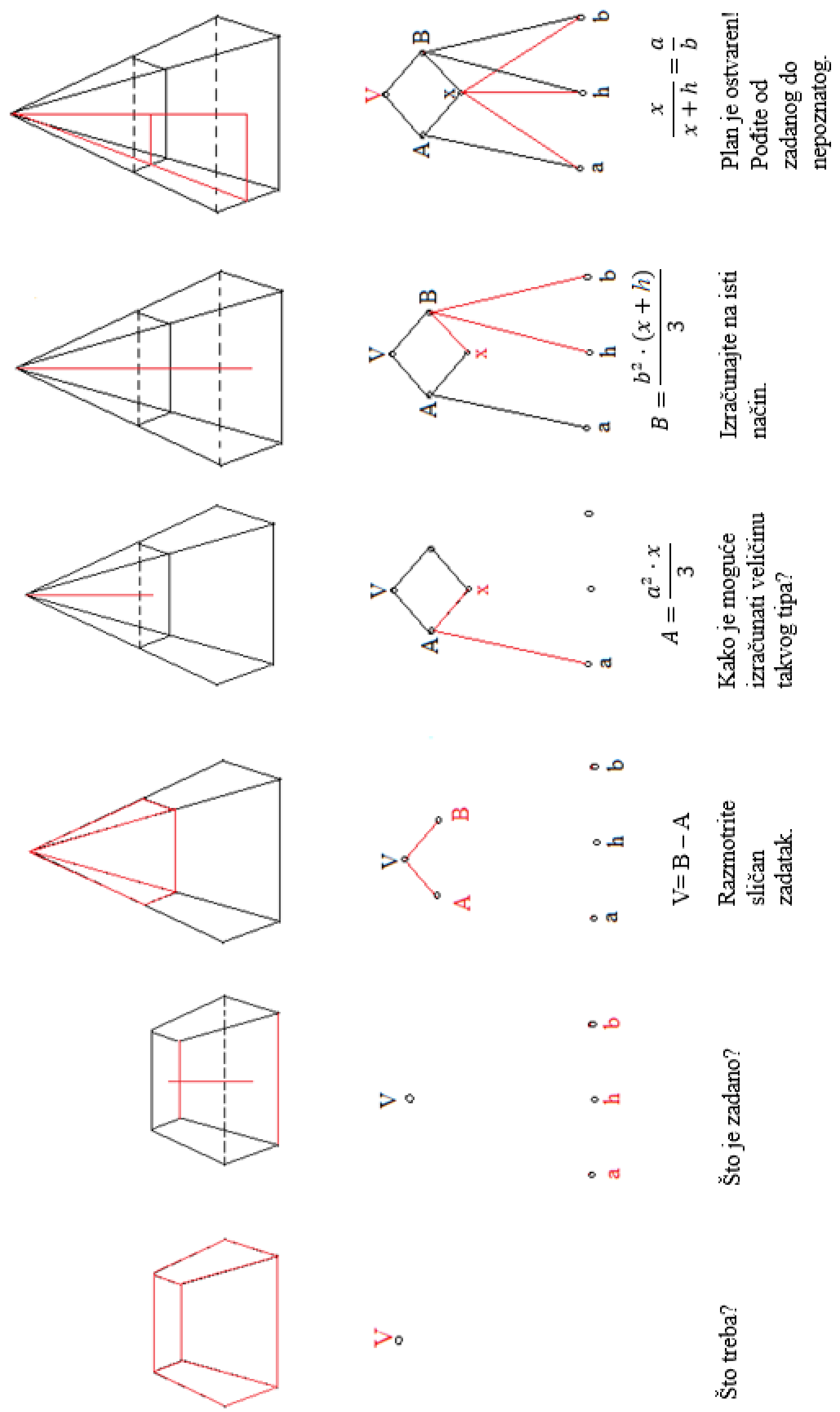
Polya (2003) navodi kako je to traženi rezultat, a sav obavljeni posao u ovom paragrafu simbolički prikazuje sljedeća slika 8.



Slika 8. Kretanje od zadanog prema nepoznanici

„Počeli smo sa zadanim veličinama a, b, h i kretali se preko pomoćnih nepoznanica x, A i B u smjeru prema početnoj, osnovnoj nepoznanici V, izražavajući te veze kreativno, jednu za drugom, pomoću zadanih veličina." (Polya, 2003, str. 179)

Preko kino-kadrova koje Polya (2003) navodi možemo vidjeti istodobno kretanje na četiri razine.



Slika 9. Usporeni kino-kadrovi istodobnog kretanja na četiri razine

4.5.4. Osvrt

Promatrajući kino kadrove možemo vidjeti korak po korak kao se zadatak rješavao, svaki korak gradi sustav veza koje su na kraju stvorile plan rješenja. Ako pratimo razvoj rješenja, onda u njemu možemo razlikovati nekoliko faza i smjerova. Polya (2003) navodi kako je već prije istaknuta razlika između rješavanja dva dijela: u prvom dijeli koji prikazuje sliku 2. i sliku 7. polazi se od nepoznanica ka zadanim elementima dok se u drugom dijelu, kojeg predočuje slika 8., kretanje vrši prema gore, to jest od zadanih elemenata prema nepoznanici. Polya (2003) navodi kako se i u prvom dijelu mogu razlikovati dvije faze. Prema Polyau (2003), u početnoj fazi koju prikazuju slika 2. i slika 3. rješavanje je bilo usmjereno prema tome da se zadatak shvati, dok se u završnoj fazi koju prikazuju slike od slika 4. do slike 7., razvija sustav logičkih veza i gradi plan rješavanja. Najbitniji dio pola jest zadnja faza u kojoj se plan sastavlja. Vračajući se ponovno u zadatak možemo uočiti kako se pri rješavanju osnovnog zadatka susrećemo s nizom pomoćnih zadataka. Polya (2003) navodi kako smo kod određivanja obujma krnje piramide morali pronaći obujam pune piramide, zatim još jedne pune piramide te duljinu dužine. Kako bi došli do nepoznanice V, potrebno je bilo pronaći nepoznanice A, B i x.

„Dovoljno je imati sasvim malo iskustva u rješavanju matematičkih zadataka da se uvjerimo koliko je tipična takva razdioba osnovnog zadatka na pomoćne zadatke.“ (Polya, 2003, str. 182)

Polya (2003) postavlja pitanje: *Koji je od koraka rješavanja ilustriranih na slici 9. najvažniji?* – Nastanak potpune piramide.

„Uvođenje potpune piramide i predočenje krnje piramide kao razlike dvaju punih piramida – glavna je ideja rješenja. Sve ostalo je za većinu lakše, očitije, rutinski dio posla, a za obrazovanije matematičare to je trivijalno.“ (Polya, 2003, str. 182)

Polya (2003) navodi kako je rađanje nove ideje iznenadni bljesak svjetla poslije dužeg perioda napora i kolebanja. Ono može ostaviti dublji dojam i lijep doživljaj.

Prema Polyau (2003) pri rješavanju zadatka u oči najviše upada kriterij procesa. Njega Polya (2003) objašnjava kao pojavu sve novijih i novijih detalja na grafičkoj ilustraciji (slika 9.).

> „Prema tome, kako se rješavatelj probija naprijed na geometrijskim likovima, na dijagramu veza pojavljuju se sve novije i novije crte. Unatoč sve većoj složenosti crteža, mi moramo osjetiti razvoj misaonih konstrukcija rješavatelja. Sa svakim novim važnim korakom on uključuje u rad nove podatke, na crtežu uočava neku od prije poznatih konfiguracija, primjenjuje neki od ranije mu poznati poučak. Na taj se način pred nama pokazuje umni rad rješavatelja.“ (Polya, 2003, str. 183)

Prema Polyau (2003), taj se rad rješavatelja oslanja na dio njegova iskustva, kao veza iskustva sa zadatkom koji rješava. Također se oslanja kao mobilizacijski i organizacijsku posao.

Slika 9., kao što je već rečeno, simbolizira napredak u rješavanju zadatka. Ona nam na četiri razine daje predodžbu o radu rješavatelja.

„Jako nas zanima *kako* on radi, no možda nam je još zanimljivije kako on *mora* raditi. *Možemo li o tome dobiti osnovne informacije na temelju slike 9.?*“ (Polya, 2003, str. 183)

Prema slici 9. najniža razina sastoji se od niza pitanja i preporuka koje objašnjavaju korake rješavanje zadatka. Pitanja i preporuke su jednostavne, prirodne i općenite. One su prema Polyau (2003) usmjeravala napore rješavatelja pri rješenju tog zadatka koji je bio jednostavan i uzet za primjer.

> „Njime se možemo rukovoditi i u drugim slučajevima. Iako se može govoriti o disciplini uma (nekoj jezgri principa ili pravila, o nekom susretu putova usmjerenih prema univerzalnoj metodi koje su pokušavali otkriti Descartes i Leibniz), ipak postoji velika nada da pitanja i preporuke koje se postavljaju na najnižoj razini slike 9. mogu poslužiti kao temelj za to.“ (Polya, 2003, str. 183)

Ako krenemo od kraja prema početku vračajući se u ovaj zadatak onda trebamo promotriti završni plan kojeg predočava slika 9. Prema Polyau (2003) ona predstavlja mrežu sastavljenu od točaka i dužina. To je veza između zadanih podataka i nepoznanica. Polya (2003) navodi kako su one razapete nad provalijom koja dijeli nepoznanice od zadanih elemenata.

Na slici 9., koja predstavlja kino-kadrove, prikazane su međuetape rada na zadatku. Ako sliku gledamo s desna na lijevo onda gledamo smjerom od kraja prema početku.

Polya (2003) navodi kako bi neki rješavač ovaj zadatak mogao početi izgrađivati od desno prema lijevo, to jest od kraja prema početku kako je prikazano na slici 9. Takav smjer pri rješavanju zadatka Polya naziva „razvojem u izravnom smjeru“.   .

5. AUTOETNOGRAFSKO ISTRAŽIVANJE STRATEGIJE PREMA GEORGEU POLYAU

5.1. Autoetnografija

Potkonjak (2014) navodi razne definicije etnografije. Prema Potkonjak (2014) *Merriam Webster* govori da je etnografija proučavanje i sistematsko opisivanje ljudskih zajednica kao i deskriptivni proizvod koji je nastao na temelju etnografskog istraživanja. Potkonjak (2014) navodi i *Oxfordski rječnik engleskog jezika* koji etnografiju definira kao znanstveni opis ljudi i kultura te njihovih običaja, navika i međusobnih razlika. Također, Potkonjak (2014) navodi i proširenije objašnjenje prema *Encyclopaedia Britannica* koja etnografiju smatra deskriptivnom studijom specifičnog društva ili proces kojim se takvo istraživanje provodi. Današnja etnografija se temelji na terenskom radu i zahtijeva potpunu predanost antropologa u kulturu i svakodnevnicu ljudi koji su subjekti istraživanja. Potkonjak (2014) smatra da navedene definicije imaju višestruko značenje i upotrebe pojma: „etnografija je deskriptivna znanost, rezultat provođenja etnografskog istraživanja i istraživanje samo." (Potkonjak, 2014, str. 11)

> „Kada danas govorimo o načinu na koji osobno iskustvo utječe na istraživanje, govorimo o efektu koji specifična osoba istraživača ima na istraživanje. Jednom zamijećen kao važan element spoznajnog procesa, efekt osviještenog etnografskog sebstva naznačio je trenutak paradigmatske promjene koju nazivamo „autoetnografski obrat." (Potkonjak, 2014, str. 32)

Prema Potkonjak (2014) autoetnografski obrat je pristup istraživanju i pisanju koje sistematično opisuje i propitkuje osobno iskustvo kako bi se ilustriralo ukupno kulturno iskustvo. U etnologiji i kulturnoj antropologiji autoetnografski obrat naziva se još i drugim imenima kao što su refleksivna etnografija, autoetnografija (autoantropologija) te intimna etnografija. Potkonjak (2014) navodi kako propitkivanje uloge autobiografskih elemenata u etnografskom istraživanju služe kako bi saznali tko je istraživač, zapitali se je li istraživanje oslobođeno biografije, vođeno biografijom istraživača ili je biografijom opterećeno i kakav je odnos biografije i istraživača. Osvještavanje istraživača nam omogućuje da donosimo istraživačke odluke s obzirom na osobnu angažiranost u istraživanju, propitkujući odnose

istraživačke teme ili motivacije, istraživačkog puta ili metodologije te stila prezentacije ili pisanja.
Prema Potkonjak (2014) autoetnografija je metoda koju zanima etnografija vlastite grupe, odnosno autobiografsko pisanje koje ima etnografsku namjeru.
„Takav pristup koji u prvom planu ima „etnografiju sebstva“ i „autoetnografsku etnografiju“ nazivamo autoetnografijom.“ (Potkonjak, 2014, str. 33)
Potkonjak (2014) navodi tri oblika autoetnografije, a to su narativna antropolojija, etnička autobiografija, autobiografska etnografija. Narativna antropologija je autobiografija bivših kolonijskih subjekata. Etnička autobiografija je autobiografsko pismo etničkih manjina., a autobiografska etnografija su etnografije prožete etnologovim osobnim iskustvom.

Riječ autoetnografija se sastoji od: auto (sebstvo, ja, osobno iskustvo), etno (zajednica, skupina, kulturno iskustvo) i grafija (zapisati, opisati, analizirati).

Autoetnografija je kvalitativna metoda istraživanja u kojoj se iznosi mišljenje o samom sebi kroz upoznavanje drugoga. To je postupak koji je usmjeren na vlastito iskustvo te autorsko „ja“ što podrazumijeva zagovaranje i emancipaciju osobnog autorovog glasa bez skrivanja. Autor vodi svoj osobni dnevnički zapis, a autorsko „ja“ može se protezati kroz jedan dio rada ili kroz cijeli rad. Autor je istovremeno i objekt i subjekt spoznaje. Piše u prvom licu te svjedoči o intelektualnom autoritetu. Sadržaj interpretira kroz istraživanje vlastitog, kroz osobnu naraciju i iskustvo. Autoetnografija je oblik teksta u kojem se svjesno pozicionira osobno iskustvo u žarište istraživačkog interesa te analitičko–interpretativnog okvira. Tekstu samoistraživanja ulomci su vlastitih kazivanja, razmišljanja, iskustva, doživljaja i osjećaja.

5.2. Opis istraživanja

Svoj osobni dnevnički zapis, to jest, autoetnografiju provela sam rješavajući problemske zadatke strategijom rješavanja problemskih zadataka u četiri faze rada prema Georgeu Polyau. Problemski zadaci koje sam rješavala su *Skladište, Papirnata traka, Palindromi, Kvadrati na šahovskoj ploči, Dame za ručkom, Jezivi puzavi* i *Šibice* prema Mason, Burton, Stacey (2010). Najprije sam vršila razumijevanje zadatka postavljajući si pitanja prema Polyau: *Što je nepoznato, Što je zadano?* Nadalje sam stvarala plan za rješavanje zadatka tražeći vezu između zadanog i nepoznatog te po potrebi, kako bi bolje shvatila zadatak razmatrala pomoćne zadatke sve dok nisam dobila plan rješavanja. Izvršila sam plan koji sam sastavila te provjeravala dobiveno rješenje vršeći osvrt na zadatku. Pri rješavanju zadataka konzultirala sam se s kolegama i mentorom kako bi bolje shvatila četiri faze rada prema Polyau. Nakon riješenih faza radim reviziju u kojoj objašnjavam kako mi se mišljenje mijenjalo po razgovoru s mentorom i kolegama o fazama prema Polyau.

5.3. Zadatak 1: Skladište

*U skladištu dobivate popust od 20%, ali morate platiti porez od 15%. Što bi radije da se prvo izračuna: popust ili pore*z?

5.3.1. Prvotno rješenje

<u>Prva faza rada – Razumijevanje zadatka</u>

Što mi je nepoznato u ovom zadatku? Nepoznata je cijena. A ukoliko je cijena poznata, nepoznati su nam točan iznos poreza i popusta. *Što mi je zadano?* Zadani su postotci za izračunavanje popusta i poreza. *Kako glasi uvjet?* Potrebna mi je cijena pomoću koje ću izračunati iznose poreza i popusta.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Jesam li već prije vidjela ovakav zadatak? Zadatak mi je poznat iz svakodnevnog života. Popust cijene i porez mogu svakodnevno vidjeti u trgovini. *Ili si isti zadatak vidjela u nešto drugačijem obliku?* Vidjela sam sličan zadatak samo što tada nije bila u pitanju cijena već brojevi.

Ako je nešto sniženo 10% to znači da ćemo taj proizvod platiti 90% jer je ukupna cijena proizvoda 100% i od toga oduzmemo popust i time dobivamo cijenu koju plaćamo. A drugi način izračunavanja popusta je da izračunamo koliko iznosi taj popust i oduzmemo ga od početne cijene da bi dobili konačnu cijenu. Popust se od cijene oduzima, a porez se dodaje na cijenu.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Smatram da je najbolji način za riješiti ovaj zadatak da se uzme neki primjer cijene i da se izračuna za oba slučaja. Za početak ću uzeti cijenu od 100 kuna. Prvo ću izračunati na način da se najprije na tu cijenu obračuna popust pa doda porez te kada se prvo doda porez pa obračuna popust.

1. način

početno	100 kn
popust 20%	100 kn × 0.20 = 20 kn
početno – popust	80 kn
porez 15%	80 kn × 0.15 = 12 kn
porez + cijena s popustom	92 kn

Na ovaj način sam popust izračunala tako što sam uzela 20% početne cijene i oduzela ga od početne cijene čime sam dobila cijenu s popustom. Porez sam dobila na način da sam izračunala iznos poreza za cijenu nakon popusta i dodala ga cijeni nakon popusta.

2.način

početno	100 kn
popustom od 20%	100 kn × 0.80 = 80 kn
porez 15%	80 kn × 1.15 = 92 kn

Ako je popust na određeni artikl 20% to bi značilo da za taj artikl plaćam 80% njegove cijene bez popusta. Ako je porez na određeni artikl 15% to znači da je cijena tog artikla zapravo 115%.

Ukoliko se u obzir prvo uzme popust, a nakon toga porez, konačna cijena iznosi 92 kune.

1. način

početno	100 kn
porez 15%	100 kn × 15% = 15 kn
početno + porez	115 kn
popust 20%	115 kn × 20% = 92 kn

2. način

početno	100 kn
porez 15%	100 kn × 1.15 = 115 kn
popust 20%	115 kn × 0.80 = 92 kn

Ukoliko se u obzir prvo uzme porez, a nakon toga popust, konačna cijena iznosi 92 kune.

Za slučaj kada je početna cijena 100 kuna, svejedno je kojim redoslijedom će se računati popust i porez. Uzet ću još početnu cijenu od 140 kuna i provjeriti vrijedi li isto i za nju. Računat ću samo na drugi način jer je brži i jednostavniji.

popust zatim porez	
početno	140 kn
popustom od 20%	140 kn × 0.80 = 112 kn
porez 15%	112 kn × 1.15 = 128.8 kn
porez zatim popust	
početno	140 kn
porez 15%	140 kn × 1.15 = 161 kn
popust 20%	161 kn × 0.80 = 128.8 kn

Četvrta faza rada – Osvrt

Za početnu cijenu od 100 kuna ili 140 kuna pokazala sam da nema razlike u konačnoj cijeni bez obzira kojim redoslijedom uzimamo popust i porez. Ovakav obrazac mora vrijediti bez obzira na cijenu. Ako pogledamo drugi način kojim je rješavano vidimo da imamo uzastopne operacije množenja. Sveukupna formula za rješavanje bilo koje cijene izgledala bi kao:

popust pa porez	(početna cijena × 0.80) × 1.15
porez pa popust	(početna cijena × 1.15) × 0.80

S obzirom da slijed računanja u računskoj operaciji množenja ne mijenja rezultat, nije bitno uzmemo li prvo popust pa porez ili porez pa popust.

5.3.2. *Revizija procesa rješavanja*

Nakon razgovora s mentorom zaključila sam kako početni dio četvrte faze rada, to jest osvrt do iskazanih formula zapravo spada pod treću fazu rada, to jest izvršavanje plana. Četvrta faza rada nakon razgovora s mentorom podrazumijeva sljedeće.
S obzirom da komutativnost množenja ne mijenja rezultat, nije bitno uzmemo li prvo popust pa porez ili porez pa popust. Kako bi bila sigurna u zadatak i dobivenu formulu provjerit ću ga još jednom s početnom cijenom od 200 kuna.

popust pa porez $(\text{početna cijena} \times 0.80) \times 1.15$

$$(200 \times 0.80) \times 1.15$$
$$= 160 \times 1.15$$
$$= 184 \text{ kn}$$

porez pa popust $(\text{početna cijena} \times 1.15) \times 0.80$

$$(200 \times 1.15) \times 0.80$$
$$= 230 \times 0.80$$
$$= 184 \text{ kn}$$

Zaključujem da je svejedno kojim će se redoslijedom računati popust i porez. Ovu metodu mogu primjenjivati u svakodnevnom životu računajući popuste i poreze u trgovini.

5.4. Zadatak 2: Papirnata traka

Zamislite dugu tanku traku papira ispruženu ispred vas, s lijeva na desno. Zamislite da sada rukama preklopite tu traku, lijevi kraj preko desnog. Pritisnite traku tako da je savijena na pola i ima nabor. Ponovite cijeli proces na toj novoj traci još dva puta. Koliko mnogo nabora će postojati na traci kad ju ponovno raširite? Koliko nabora će postojati ako operaciju ponovite 10 puta ukupno?

5.4.1. Prvotno rješenje

Prva faza rada – Razumijevanje zadatka

Što je nepoznato? Nepoznato je koliko mnogo nabora će postojati na traci kada ju raširim nakon deset savijanja. *Što je zadano?* Zadana je tanka traka papira koja se treba zamisliti.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Umjesto zamišljene trake uzet ću papir formata A4. Savit ću ga jedanput i prebrojati nabore. Zatim ću ga saviti drugi, treći, četvrti i peti put te ponovno izbrojati nabore. Zatim ću napraviti tablicu u koju ću unijeti broj savijanja i broj nabora. Zatim ću pokušati napraviti obrazac koji prate brojevi nabora i savijanja. Ukoliko dobijem obrazac, iz njega ću pokušati izračunati i za deset savijanja.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Nakon prvog savijanja dobila sam jedan nabor. Savinem li papir nakon prvog puta još jednom dobijem sveukupno 3 nabora. Kada papir savijem tri puta dobijem 7 nabora, a ukoliko ga savijem četiri puta dobijem 15 nabora. Imala sam papir formata A4 i 4 savijanja su mi bila maksimum. Sada ću pogledati postoji li neki obrazac između broja nabora i broja savijanja.

Tablica 1. Ovisnost broja nabora o broju savijanja

broj savijanja	broj nabora
1	1
2	3
3	7
4	15

Broj nabora između drugog i prvog savijanja se razlikuje za 2, između trećeg i drugog savijanja se razlikuje za 4 te između četvrtog i trećeg savijanja se razlikuje za 8. U zadatku se traži broj nabora nakon 10 savijanja. Nakon četiri savijanja imamo sljedeći obrazac: razlika broja nabora između dva uzastopna savijanja je duplo veća. Prema tome ću u sljedećoj tablici prikazati broj nabora ako papir savijemo do 11 puta:

Tablica 2. Ovisnost broja nabora o broju savijanja za 11 savijanja

broj savijanja	broj nabora
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023
11	2047

Dakle, broj nabora je direktno povezan sa brojem savijanja. Razlika između broja nabora s brojem savijanja je:

Tablica 3. Ovisnost razlike između nabora za dva susjedna savijanja

broj savijanja	razlika između nabora
1	
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024

<u>Četvrta faza rada – Osvrt</u>

Uzeći u obzir sve do sada navedeno, završni obrazac za bilo koji broj nabora s obzirom na broj savijanja je sljedeći: 2^n-1.

5.4.2. Revizija procesa rješavanja

Nakon razgovora s mentorom zaključila sam kako bi se u četvrtoj fazi rada, to jest osvrtu trebala vratiti u zadatak te napraviti provjeru. Dobivenom formulom provjerit ću svoja rješenja te potvrditi ispravnost formule.

Za 1 broj savijanja: 2^n-1 = 2^1 – 1 = 2 – 1 = 1

Za 2 savijanja: 2^n-1 = 2^2- 1 = 4 – 1 = 3

Za 3 savijanja: 2^n-1 = 2^3 – 1 = 8 – 1 = 7

Za 4 savijanja: 2^n-1 = 2^4 – 1 = 16 – 1 = 15

Za 5 savijanja: 2^n-1 = 2^5 – 1 = 32 – 1 = 31

Za 6 savijanja: 2^n-1 = 2^6 – 1 = 64 – 1 = 64

Za 7 savijanja: 2^n-1 = 2^7 – 1 = 128 – 1 = 127

Za 8 savijanja: 2^n-1 = 2^8 – 1 = 256 – 1 = 255

Za 9 savijanja: 2^n-1 = 2^9 – 1 = 512 – 1 = 511

Za 10 savijanja: 2^n-1 = 2^{10} – 1 = 1024 – 1 = 1023

Provjerom sam potvrdila obrazac kojim sam se vodila nakon dobivenih četiri savijanja papira formata A4. Ovu metodu mogla bi primijeniti u sličnim problemskim zadacima.

5.5. Zadatak 3: Palindromi

Brojeve poput 12321 nazivamo palindromima jer se čitaju jednako unatrag kao i unaprijed. Jedan moj prijatelj tvrdi da su svi palindromi s četiri znamenke djeljivi s 11. Jesu li?

5.5.1. Prvotno rješenje

Prva faza rada – Razumijevanje zadatka

Što je nepoznato? Nepoznato je jesu li svi palindromi s četiri znamenke djeljivi s 11. Što je zadano? Zadani su palindromi, brojevi poput 12321. Palindromi su brojevi koji se čitaju jednako unatrag kao i unaprijed.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Napisat ću par palindroma da imam osjećaj za rješavanje: 121, 252, 123454321, 1221, 2332, 8, 88. U zadatku se traže samo palindromi s četiri znamenke: 1221, 1331, 3443, 2332, 6776...

Podijelit ću par palindroma s četiri znamenke i vidjeti jesu li djeljivi s 11.

1221 / 11 = 111

2112 / 11 = 192

3443 / 11 = 313

8998 / 11 = 818

9119 / 11= 829

Svi napisani palindromi su djeljivi s 11. Četveroznamenkastih palindroma ima 90 (1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991; tako i za ostale tisućice) i svaki bi mogla podijeliti s 11 i doći do tvrdnje jesu li svi djeljivi. Međutim, pokušat ću pronaći obrazac kojim ću to dokazati.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Za početak ću uzeti prvih par palindroma i podijeliti ih s 11:

1001 / 11 = 91

1111 / 11 = 101

1221 / 11 = 111

1331 / 11 = 121

1441 / 11 = 131

Brojevima gore je pokazano da postoji obrazac za palindrome od četiri znamenke i rezultate tih dijeljenja ako ih poredamo od najmanjeg prema većem: palindromi se međusobno razlikuju za 110, a rezultati dijeljenja za 10.

Provjerit ću vrijedi li to i za sljedeće palindrome:

2002 / 11 = 182

2112 / 11 = 192

2222 / 11 = 202

2332 / 11 = 212

2442 / 11 = 222

Za palindrome između 2000 i 3000 , palindromi se također razlikuju za 110, a rezultati za 10, jednako kao i oni od 1000. Obrazac i u ovom slučaju vrijedi.

Ovo je sve vrijedilo do trenutka dok mi kolega koji je pročitao što sam napisala nije ukazao na to da razlika između 2002 i 1991 nije 110 nego 11! To vrijedi za sve slučajeve gdje prelazimo među različitim tisućicama. Trenutni obrazac glasi: dva susjedna četveroznamenkasta palindroma se međusobno razlikuju za 110, osim kada se prelazi među tisućicama te se tada razlikuju za 11, a rezultati dijeljenja za 10, osim kada se prelazi među tisućicama kada je razlika među rezultatima dijeljenja 1.

Time je pokazano da je prijatelj iz zadatka u pravu i da svaki četveroznamenkasti palindrom je djeljiv s 11.

Četvrta faza rada – Osvrt

U ovom slučaju nemam neku formulu koja podržava ovaj obrazac stoga mi je kolega pomogao da dođem do nje. Svi četveroznamenkasti palindromi su oblika XYYX. Sada, prvu tisućicu možemo napisati kao 1000 × X, stoticu kao 100 × Y, deseticu kao 10 × Y te jedinicu kao 1 × X. To se može matematički obraditi na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
1000\times X + 100\times Y + 10\times Y + 1\times X &= X\,(1000+1) + Y\,(100 + 10)\\
&= 1001X + 110Y\\
&= 11\,(91X + 10Y)
\end{aligned}
$$

Palindrom je djeljiv s 11 ukoliko zadovoljava gore navedenu jednadžbu. Uzimanjem na početku 2 nasumična broja X i Y, kao rješenje ćemo dobiti rješenje oblika XYYX gdje su X i Y naši odabrani brojevi.

5.5.2. *Revizija procesa rješavanja*

Nakon razgovora s mentorom shvatila sam da bi u osvrtu bilo potrebno provjeriti navedenu jednadžbu.

Za palindrom 5445:

$$
\begin{aligned}
11\,(91X + 10Y) &= 11\,(91 \times 5 + 10 \text{ x } 4)\\
&= 11\,(455 + 40)\\
&= 11 \times 495\\
&= 5445
\end{aligned}
$$

5.6. Zadatak 4: Kvadrati na šahovskoj ploči

Jednom je utvrđeno da postoje 204 kvadrata na običnoj šahovskoj ploči. Možeš li opravdati tu tvrdnju?

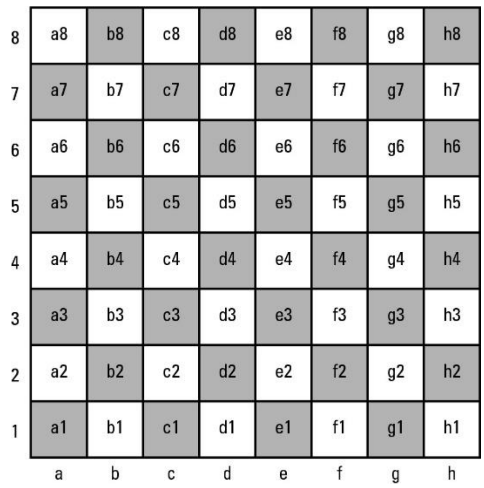
5.6.1. Prvotno rješenje

Prva faza rada – Razumijevanje zadatka

Što je nepoznato? Nepoznato je je li tvrdnja da na običnoj šahovskoj ploči postoje 204 kvadrata ispravna. Što je zadano? Zadana je šahovska ploča.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Šahovska ploča se sastoji od 64 polja, 64 kvadrata. Pošto doma imam šahovsku ploču, uzela sam ju i počela brojati kvadrate. Shvatila sam da postoje i veći kvadrati koji se mogu brojati, ne samo ovi najmanji kojih ima 64.



Slika 10. Izgled virtualne 2D šahovske ploče sa anotacijama polja (slika preuzeta s https://pixshark.com/chess-board-setup-letters-numbers.htm)

Najmanji kvadrat je a1, veći kvadrat su polja a1b1a2b2 (četiri najmanja), još veći je a1b1c1a2 b2c2a3b3c3 (devet najmanjih). Na kraju, cijela tabla je jedan najveći kvadrat kojeg čine sva polja. Po ovom principu šahovska ploča ima osam kvadrata različitih veličina. Najmanjih ima osam vodoravno i osam okomito, kvadrata koji sadrže četiri najmanja ima sedam vodoravno i sedam okomito, kvadrata koji sadrže devet malih kvadrata ima šest vodoravno i šest okomito i tako dalje dok se ne dođe do najvećeg koji sadrži 64 najmanja kvadrata.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Najmanjih ima 64, kvadrata koji sadrže 4 najmanja ima 49, onih koji sadrže 9 najmanjih ima 36. Ovdje već vidim obrazac da zapravo broj istih kvadrata dobijem tako da pomnožim onoliko koliko ih zbrojim vodoravno i okomito. Ako najveći kvadrat napišem kao kvadrat površine 8×8, onda je kvadrat koji sadrži 49 najmanjih kvadrata površine 7×7 i tako dalje do 1×1.

Tablica 4. Broj kvadrata određene vrste na šahovskoj ploči.

vrsta kvadrata	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
broj kvadrata	64	49	36	25	16	9	4	1

Četvrta faza rada – Osvrt

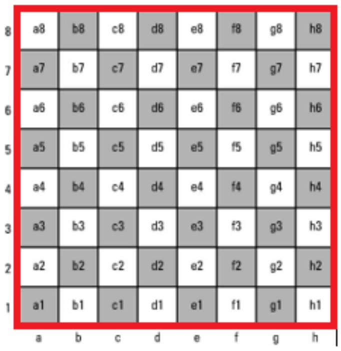
Ukoliko sada zbrojimo vrijednosti iz tablice dobijemo broj 204 čime smo potvrdili da na šahovskoj ploči postoje 204 kvadrata.

5.6.2. *Revizija procesa rješavanja*

Nakon razgovora s kolegom u četvrtu fazu rada, to jest osvrt dodat ću detaljniju kontrolu rješenja. Ponovno sam prebrojala sve kvadrate na šahovskoj ploči te potvrdila rješenje da se na njoj nalazi 204 kvadrata.

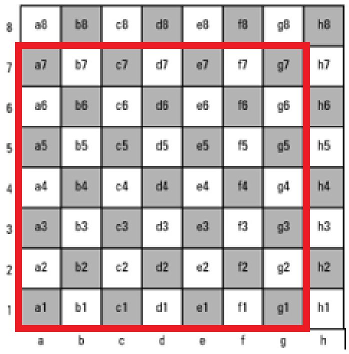
Tablicu 4., navedenu u trećoj fazi rada dokazat ću pomoću slika.

64 polja na šahovskoj ploči prikazuju jedan, najveći kvadrat (slika 11.).

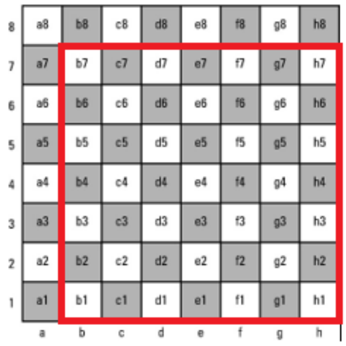


Slika 11.

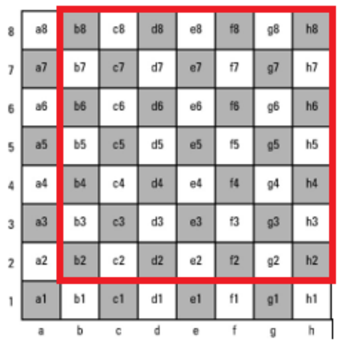
49 polja šahovske ploče predstavljaju jedan kvadrat. Na šahovskoj ploči nalaze se 4 takva kvadrata (slika 12.-15.).



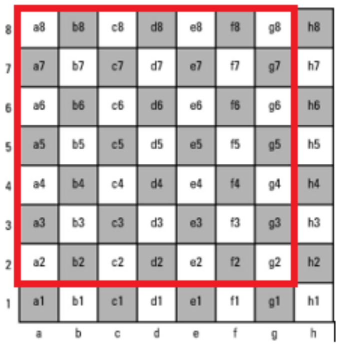
Slika 12.



Slika 13.

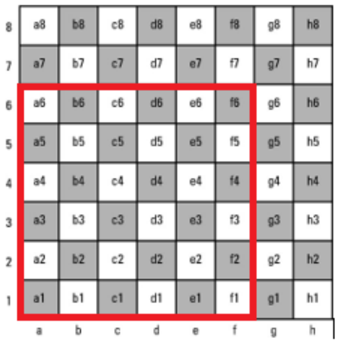


Slika 14.

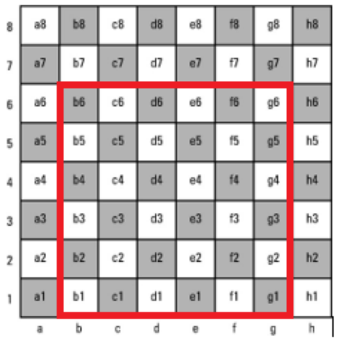


Slika 15.

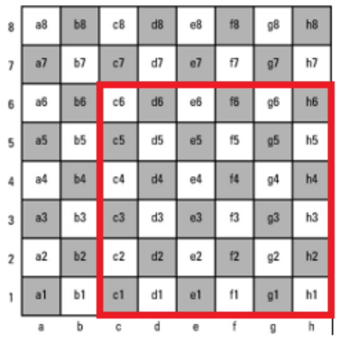
36 polja šahovske ploče predstavljaju jedan kvadrat i takvih je 9 na šahovskoj ploči (slike: 16.-24.).



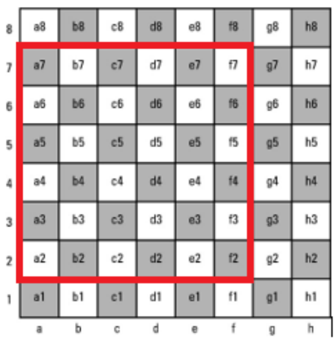
Slika 16.



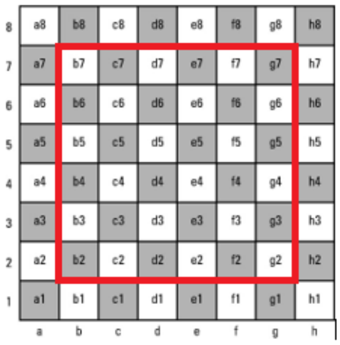
Slika 17.



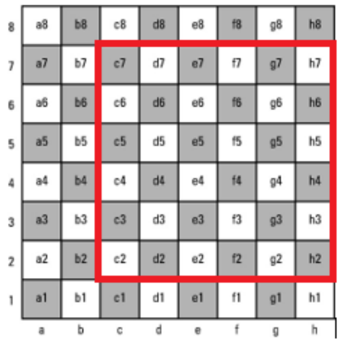
Slika 18.



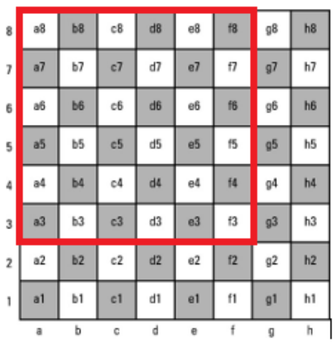
Slika 19.



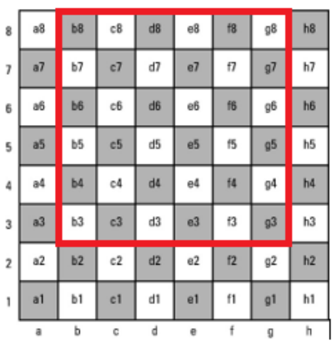
Slika 20.



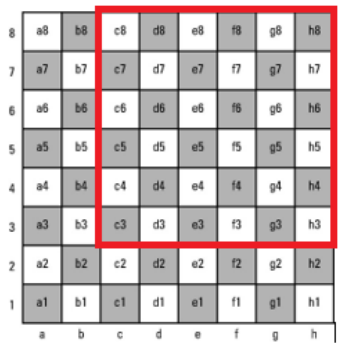
Slika 21.



Slika 22.

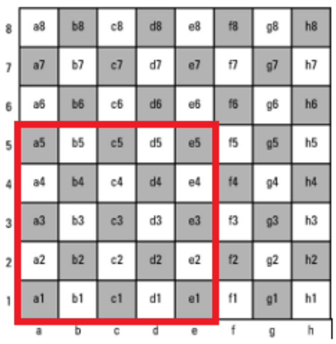


Slika 23.

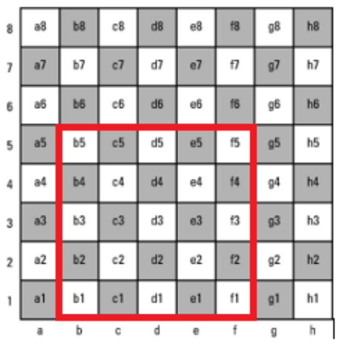


Slika 24.

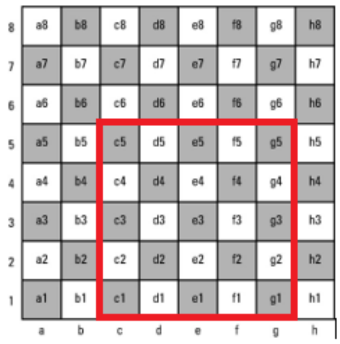
25 šahovskih polja predstavljaju jedan kvadrat, a takvih kvadrata je 16 na šahovskoj ploči (slika 25.-40.).



Slika 25.

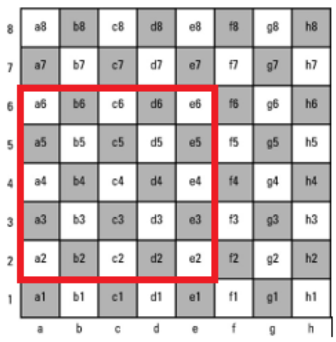


Slika 26.

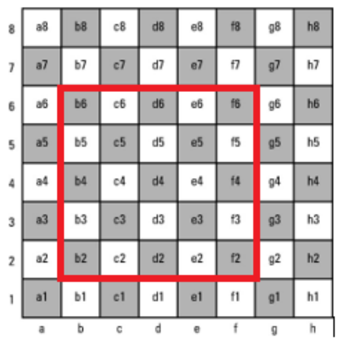


Slika 27.

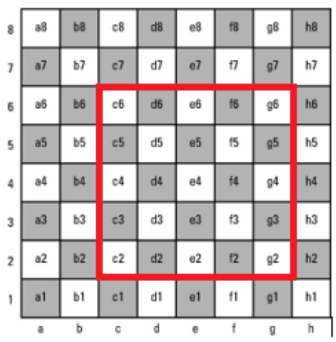
Slika 28.



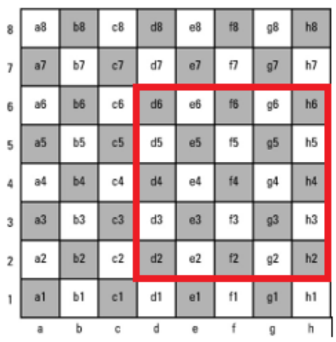
Slika 29.



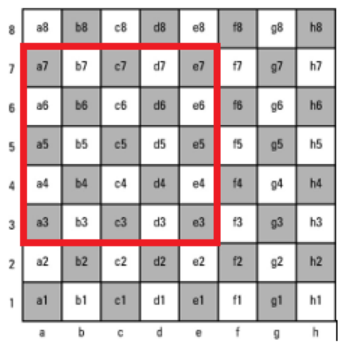
Slika 30.



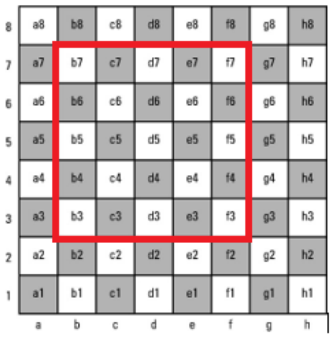
Slika 31.



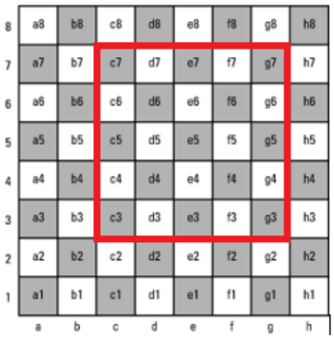
Slika 32.



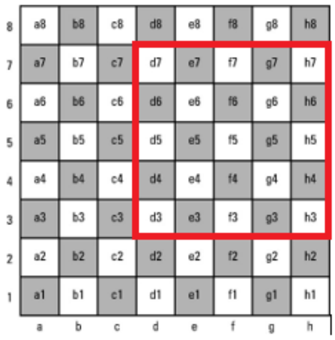
Slika 33.



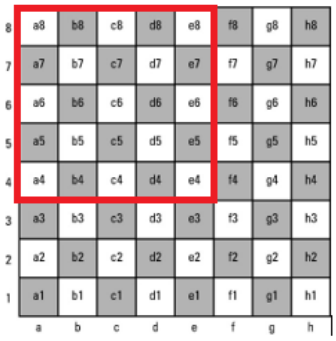
Slika 34.



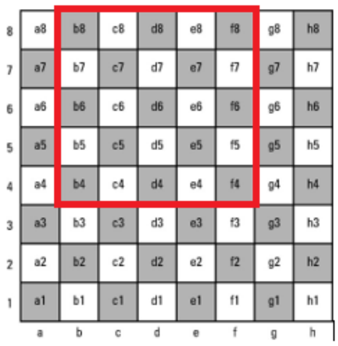
Slika 35.



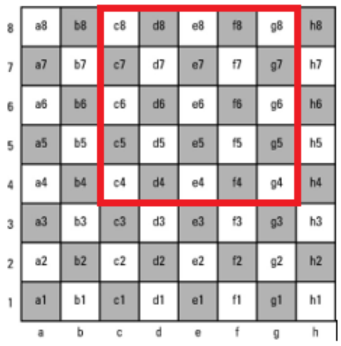
Slika 36.



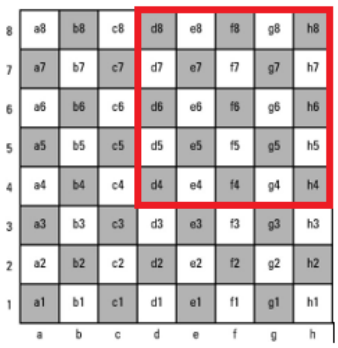
Slika 37.



Slika 38.

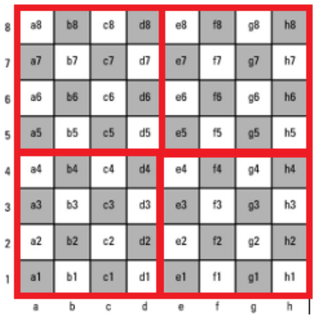


Slika 39.

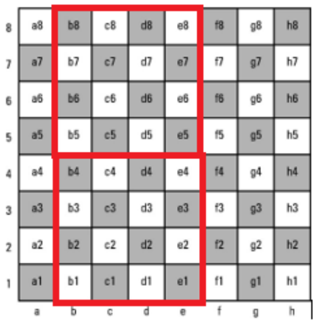


Slika 40. .

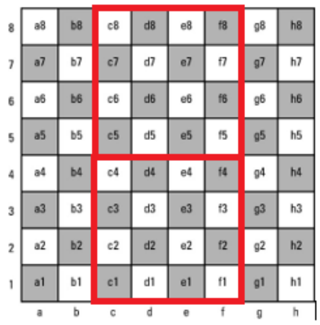
16 polja šahovske ploče predstavljaju jedan kvadrat, a takvih kvadrata je 25 na šahovskoj ploči (slika 41.-56.).



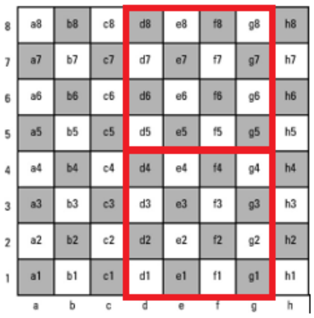
Slika 41.



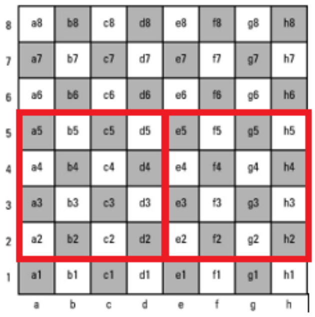
Slika 42.



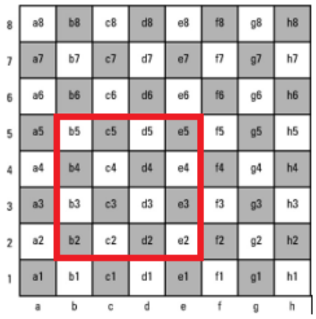
Slika 43.



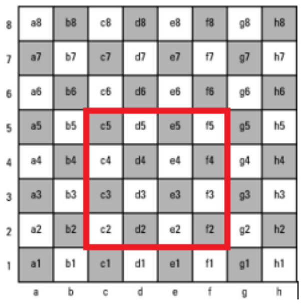
Slika 44.



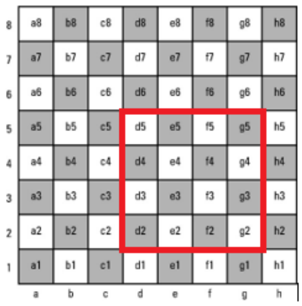
Slika 45.



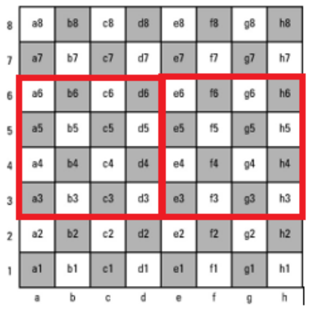
Slika 46.



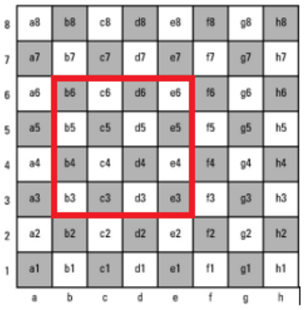
Slika 47.



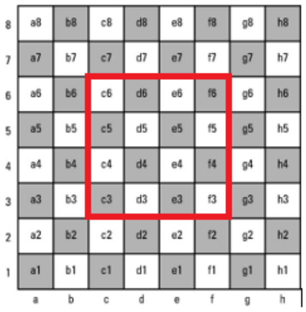
Slika 48.



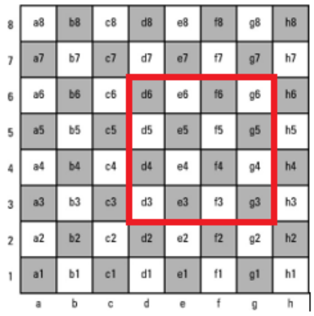
Slika 49.



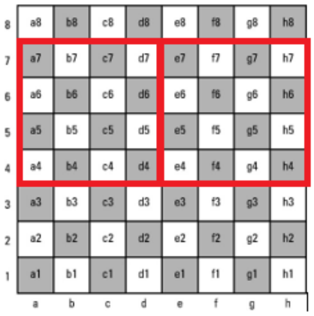
Slika 50.



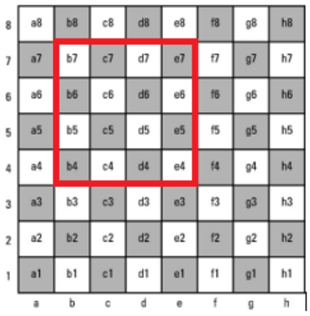
Slika 51.



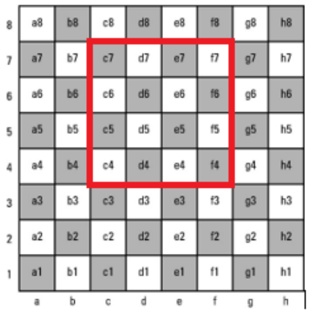
Slika 52.



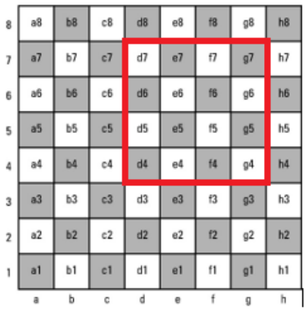
Slika 53.



Slika 54.

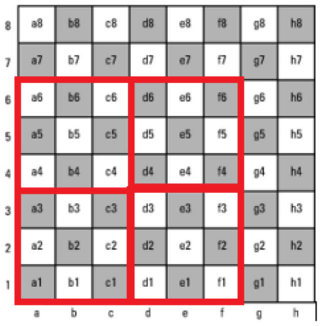


Slika 55.

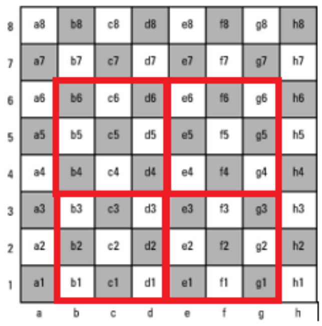


Slika 56.

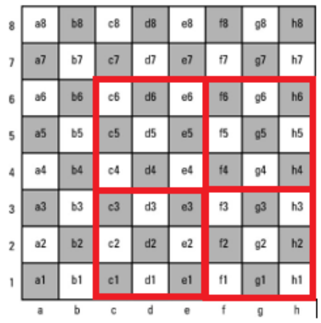
9 polja šahovske ploče predstavljaju jedan kvadrat. Na šahovskoj ploči nalazi se 36 takva kvadrata (slika 57.-65.).



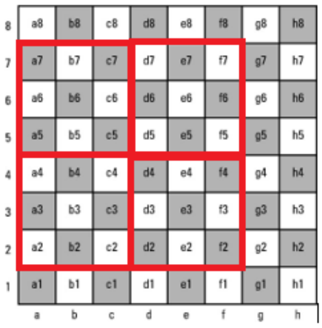
Slika 57.



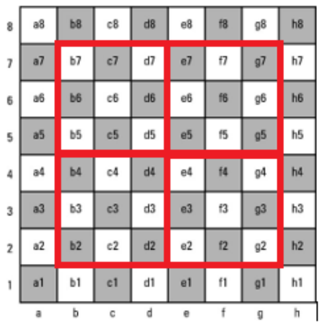
Slika 58.



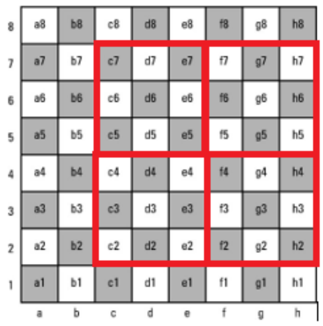
Slika 59.



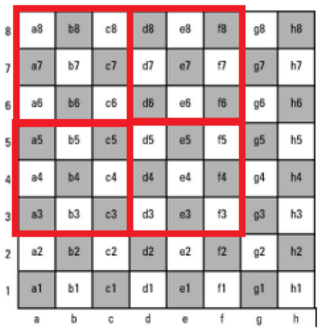
Slika 60.



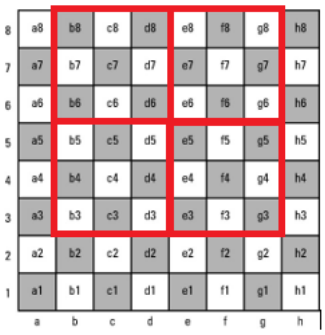
Slika 61.



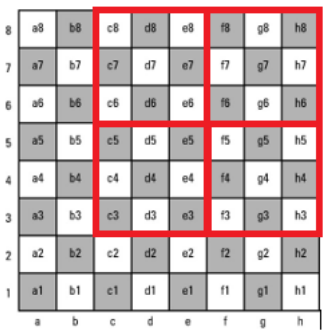
Slika 62.



Slika 63.

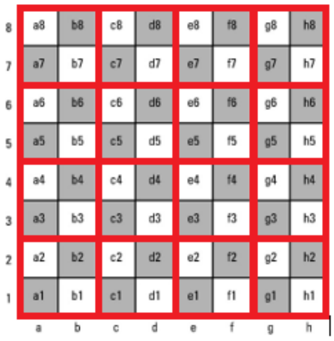


Slika 64.

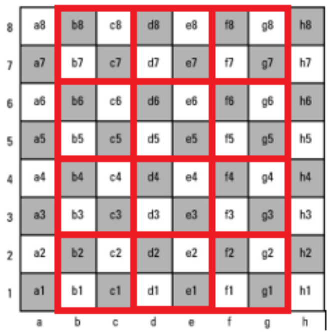


Slika 65.

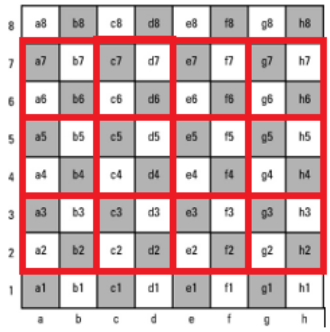
4 polja šahovske ploče predstavljaju jedan kvadrat, a takvih kvadrata je 49 na šahovskoj ploči (slika 66.-69.).



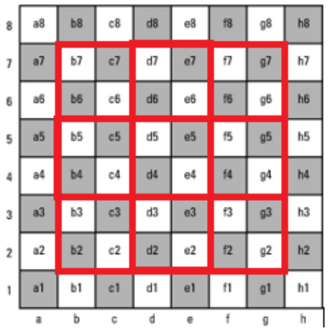
Slika 66.



Slika 67.

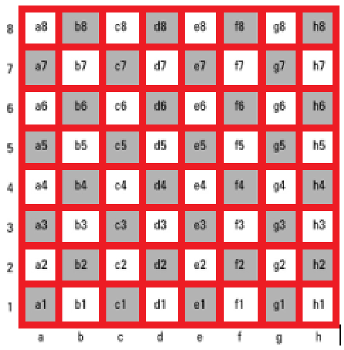


Slika 68.



Slika 69.

Jedno šahovsko polje predstavljaju jedan kvadrat. Na šahovskoj ploči takvih kvadrata je 64 (slika 70.).



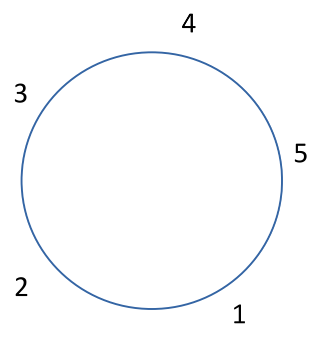
Slika 70.

Ako prebrojimo ove prikazane kvadrate od slike 11. do slike 70. ukupno ćemo dobiti njih 204 što potvrđuje ispravnost zadatka. Metodu rješavanja zadatka mogu primijeniti u srodnim zadacima u kojima je zadan veći ili manji broj kvadrata nego što ih ima šahovska ploča, to se odnosi na veći ili mani broj, to jest na primjer 20×20.

5.7. Zadatak 5: Dame za ručkom

Pet žena zajedno sjedi za ručkom oko okruglog stola. Gospođa Osborne sjedi između gđe Lewis i gđe Martin. Ellen sjedi između Cathy i gđe Norris. Gospođa Lewis je između Ellen i Alice. Cathy i Doris su sestre. Betty sjedi s gđom Parkes s lijeve i gđom Martin s desne strane. Spojite imena i prezimena tih dama.

5.7.1. Prvotno rješenje



Slika 71. Skica zadatka gdje kružnica predstavlja stol, a brojevi 5 dama koje sjede oko njega.

Prva faza rada – Razumijevanje zadatka

Što je nepoznato? Nepoznata su povezana imena i prezimena osoba. Što je zadano? Zadano je pet žena koje sjede oko okruglog stola. Gospođa Osborne sjedi između gđe Lewis i gđe Martin. Ellen sjedi između Cathy i gđe Norris. Gospođa Lewis je između Ellen i Alice. Cathy i Doris su sestre. Betty sjedi s gđom Parkes s lijeve i gđom Martin s desne strane.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Zadatak ću riješiti metodom isključivanja. Za početak vidim da svaka gospođa ima prezime i ime te da su sva ona različita. Gospođe ću razvrstati prema slici 4 i na umu ću imati činjenice koje su zadane u zadatku te pomoću njih dodijeliti ime i prezime gospođama.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Prvo ću upisati ime gospođe Osbourne na broj 1. Zatim, gospođa Lewis može sjediti na broju 2 i broju 5. Ako gospođu Lewis stavimo na mjesto 2, a gospođu Martin na broj 5 zadatak će biti pogrešno riješen jer dalje u zadatku slijedi da Betty s lijeve strane sjedi gospođa Parkes, a s desne strane gospođa Lewis. U ovom slučaju bi s lijeve strane sjedila gospođa Martin.

Stoga, na broju 2 sjedi gospođa Martin, a na broju 5 gospođa Lewis.

Betty sjedi na broju 3 te će joj gospođa Martin biti s desne strane, a gospođa Parkes s lijeve. Betty mora biti gospođa Norris jer su sva ostala prezimena podijeljena drugima. Ellen sjedi pored gospođe Osbourne i gospođe Lewis te je ona zapravo gospođa Parkes i također pored Cathy pa je gospođa Lewis Cathy. Gospođa Lewis je pored Alice koja je gospođa Osbourne i na kraju ispada da je gospođa Martin Doris.

Četvrta faza rada – Osvrt

Nakon dodjeljivanja imena i prezimena gospođama, ponovno sam nacrtala okrugli stol sa njihovim imenima i prezimenima i usporedila sa činjenicama iz zadatka te potvrdila da sve odgovara njima.

5.7.2. Revizija procesa rješavanja

Razmatrala sam druge načine za riješiti zadatak, ali se uvijek vraćam istom postupku.

Metodu isključivanja mogu primijeniti u mnogim problemskim zadacima.

5.8. Zadatak 6: Jezivi puzavi

Ross skuplja guštere, bube i crve. Crva ima više od guštera i buba zajedno. Sve zajedno, u zbirci ima 12 glava i 26 nogu. Koliko guštera Ross ima?

5.8.1. Prvotno rješenje

<u>Prva faza rada – Razumijevanje zadatka</u>

Što je nepoznato? Nepoznato je koliko guštera ima Ross. *Što je zadano?* Zadani su gušteri, bube i crve. Crva ima više od guštera i buba zajedno. Sve zajedno, u zbirci ima 12 glava i 26 nogu.

<u>Druga faza rada – Stvaranje plana</u>

Jesam li zadatak već prije vidjela? Kada bolje razmislim, nisam. Promotrit ću nepoznanice. Po broju glava iz zadatka je jasno da Ross ima 12 životinja. Gušteri imaju 4 noge, dok većina buba ima 6 nogu. Crvi nemaju nogu. Iz toga vidim da je nemoguće da Ross ima više od 5 guštera. Ukoliko ima 5 guštera, zbroj nogu bi iznosio 20 što bi značilo da ima jednu bubu i da su ostalo crvi. Međutim, u zadatku je navedeno da je crva više od guštera i buba zajedno pa iz toga proizlazi da ima manje od 5 guštera. *Jesam li sada iskoristila sve zadano?* Smatram da jesam.

<u>Treća faza rada – Izvršavanje plana</u>

Napravila sam kombinaciju za broj životinja s obzirom na broj guštera kojih može biti od 1 do 4. Kontrolirala sam korak po korak i provela plan rješavanja te uvidjela ispravnost koraka.

Tablica 5. Odnos broja životinja s brojem nogu.

broj guštera	1	**2**	3	4
broj nogu guštera	4	**8**	12	16
broj buba	11/3	**3**	7/3	5/3
broj nogu buba	22	**18**	14	10
broj crva	nije cijeli broj	**7**	nije cijeli broj	nije cijeli broj
broj crva veći od 6		**DA**		

Četvrta faza rada – Osvrt

Iz tablice je vidljivo da Ross mora imati 2 guštera, 3 bube i 7 crva da bi svi uvjeti iz zadatka bili zadovoljeni. Ostala rješenja iz tablice su kriva je je nemoguć ne cijeli broj buba i crva.

5.8.2. *Revizija procesa rješavanja*

Nakon razgovora s kolegom vratila sam se ponovno zadatku i postavljala si ponovno pitanja prema Polyau za četvrtu fazu rada, to jest osvrt. *Mogu li kontrolirati rezultat?* S obzirom da kod ostalih rješenja prikazanih u tablici 5 brojevi buba i crva nisu cijeli, smatram da mogu kontrolirati ovaj rezultat. *Mogu li ovaj rezultat izvesti drugačije?*

Ako guštere označimo s *a*, bube s *b* i crve s *c* tada broj životinja glasi:

$$a + b + c = 12.$$

S obzirom da gušteri imaju 4 nogu, bube 6, a crvi ih nemaju izraz za broj nogu će biti:

$$4a + 6b + 0c = 26$$

S obzirom da je množenje s nulom jednako nuli $0 \times c$ iznosi *0*. Sada izraz glasi:

$$4a + 6b = 26 \quad /:2$$

$$2a + 3b = 13$$

Crva mora biti više nego guštera i buba zajedno te time dobivam nejednakost:

$$a + b < c$$

Ako imamo zdrave bube, kukce i guštere svi oni moraju imati po jednu glavu, gušteri 4 noge, bube 6 nogu, a crvi nemaju noge.

Stoga, *a*, *b* i *c* moraju biti cijeli brojevi.

Radi ne jednadžbe $a + b < c$ i jednadžbe $a + b + c = 12$, *c* mora biti veće od 6, $a + b$ mora biti manji od 6 . Ako je $c = 6$, zbroj *a* i *b* mora iznositi također 6 da bi jednadžba $a + b + c = 12$ bila zadovoljena.

S obzirom da *c* mora biti veći od 6, on mora biti između 7 i 10. Riješit ću sustav s dvije jednadžbe s dvije nepoznanice ($a + b + c = 12; 2a + 3b = 13$) gdje ću c odabrati da je između 7 i 10.

$$c = 7$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 12 \\ 2a + 3b &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + 7 &= 12 \\ a + b &= 12 - 7 \\ a + b &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \longrightarrow a = 5 - b \\ 2a + 3b &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \times (5 - b) + 3b &= 13 \\ 10 - 2b + 3b &= 13 \\ 3b - 2b &= 13 - 10 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 5 - b \\ a &= 5 - 3 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$c = 8$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 12 \\ 2a + 3b &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + 8 &= 12 \\ a + b &= 12 - 8 \\ a + b &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= 4 \longrightarrow a = 4 - b \\ 2a + 3b &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \times (4 - b) + 3b &= 13 \\ 8 - 2b + 3b &= 13 \\ 3b - 2b &= 13 - 8 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 4 - b \\ a &= 4 - 5 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$c = 9$

$$\begin{array}{l} a + b + c = 12 \\ \underline{\;2a + 3b = 13\;} \end{array}$$

$$a + b + 9 = 12$$

$$a + b = 12 - 9$$

$$a + b = 3$$

$$\begin{array}{l} a + b = 3 \longrightarrow a = 3 - b \\ \underline{\;2a + 3b = 13\;} \quad a = 3 - 7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad a = -4 \end{array}$$

$$2 \times (3 - b) + 3b = 13$$

$$6 - 2b + 3b = 13$$

$$3b - 2b = 13 - 6$$

$$b = 7$$

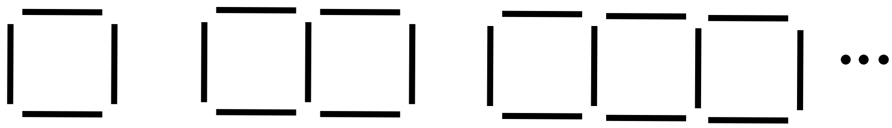
Što uzimam veći broj za *c*, dobivam manji broj za *a*, to jest brojevi za *a* postaju negativni, a rezultati za *b* postaju sve veći.

Zaključujem da *a* ne može biti negativan broj jer je nemoguće da imam minus nečega. Po tome vrijedi jedino rješenje kada za *c*, to jest crve odaberem 7, tada *a*, to jest gušteri iznose 2, dok *b*, to jest bube iznose 3.

Ovom metodom rješavanja zadatka, dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dokazala sam još jednom svoje rješenje.

5.9. Zadatak 7: Šibice

Koliko je šibica potrebno da se složi 14 kvadrata u nizu, čije su stranice po jedna šibica, kao u sljedećem nizu?



5.9.1. Prvotno rješenje

Prva faza rada – Razumijevanje zadatka

Što je nepoznato? Nepoznato je koliko šibica je potrebno da se složi 14 kvadrata u nizu, čije su stranice po jedna šibica, kao u sljedećem nizu. *Što je zadano?* Zadane su šibice.

Druga faza rada – Stvaranje plana

Položaji šibica su u obliku kvadrata. Za napraviti jedan kvadrat potrebne su 4 šibice, a za svaki sljedeći manje jer će jedna šibica biti od kvadrata prije.

Treća faza rada – Izvršavanje plana

Prvi kvadrat sastoji se od 4 šibice, drugi od 7 te treći od 10. Dodatkom svakog sljedećeg kvadrata broj šibica će se povećati za 3 s obzirom na prethodni kvadrat. Ako ću dodavati kvadrate i brojati, na kraju će za 14 kvadrata trebati 43 šibice.

Četvrta faza rada – Osvrt

Obrazac koji bi odgovarao ovome zadatku je $3N + 1$ gdje je N broj kvadrata, a rezultat toga će biti broj šibica koji je potreban. +1 dolazi iz prve okomite šibice, svakim dodavanjem sljedećeg kvadrata dodajemo samo po 3 šibice te nam za N kvadrata treba $3N$.

5.9.2. *Revizija procesa rješavanja*

Nakon što sam ponovno promotrila zadatak, smatram da napisano za četvrtu fazu rada, to jest osvrt spada pod treću fazu rada to jest izvršavanje plana. Četvrta faza rada je kontrola rezultata, stoga ću provjeriti dobiveni obrazac $3N + 1$ gdje je N broj kvadrata, a rezultat toga će biti broj šibica koji je potreban.

Za dva kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 2 + 1$$
$$= 6 + 1$$
$$= 7$$

Za tri kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 3 + 1$$
$$= 9 + 1$$
$$= 10$$

Za četiri kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 4 + 1$$
$$= 12 + 1$$
$$= 13$$

Za pet kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 5 + 1$$
$$= 15 + 1$$
$$= 16$$

Za šest kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 6 + 1$$
$$= 18 + 1$$
$$= 19$$

Za sedam kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 7 + 1$$
$$= 21 + 1$$
$$= 22$$

Za osam kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 8 + 1$$
$$= 24 + 1$$
$$= 25$$

Za devet kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 9 + 1$$
$$= 27 + 1$$
$$= 28$$

Za deset kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 10 + 1$$
$$= 30 + 1$$
$$= 31$$

Za jedanaest kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 11 + 1$$
$$= 33 + 1$$
$$= 34$$

Za dvanaest kvadrata glasi:

$$3N + 1 = 3\times 12 + 1$$
$$= 36 + 1$$
$$= 37$$

Za trinaest kvadrata glasi:

$$
\begin{aligned}
3N + 1 &= 3\times 13 + 1 \\
&= 39 + 1 \\
&= 40
\end{aligned}
$$

Za četrnaest kvadrata glasi:

$$
\begin{aligned}
3N + 1 &= 3\times 14 + 1 \\
&= 42 + 1 \\
&= 43
\end{aligned}
$$

Sada sam potvrdila svoje rješenje kontrolirajući ponovno rezultat. Također ga mogu potvrditi i načinom da uzmem šibice i slažem ih na zadan način te prebrojavam.

5.10. Osvrt na strategiju rješavanja prema Georgeu Polyau nakon rješavanja primjera i revizije

Rješavanjem zadataka prema Georgeu Polyau u četiri faze rada, naučila sam rješavati probleme postavljajući si pitanja i razmišljajući o njima. U fazi razumijevanja zadatka dublje sam ulazila u zadatak nego što sam to radila dok nisam poznavala ovu fazu. Kod stvaranja plana prvi puta sam se susreta s metodom pomoćnog zadatka i kako pomoću njega doći do plana za traženi zadatak. Dobar način za stvaranje plana je razmotriti sve uvjete i bitne pojmove. Pomoću faze stvaranja plana naučila sam iznova se vraćati planu, promišljati i propitkivati se je li sve zadano iskorišteno. Do sada sam, dok nisam znala pitanja za ovu fazu koja je Polya napisao, zanemarivala stvaranje plana u želji za što bržim rješenjem koje nije uvijek ispadalo točno. Promišljajući načinom koji nudi Polya, teško da ću izostaviti i ne iskoristiti čitave uvjete u zadatku. Ako je sastavljen dobara plan u kojemu je sve zadano iskorišteno onda bi plan trebao biti dobro izvršen. Pri njegovu izvršenju potrebno je biti oprezan i kontrolirati svaki korak koji radimo. Također, trebamo se propitkivati možemo li dokazati ispravnost rješenja. Do sada se nisam puno puta susrela s osvrtanjem na zadatke, stoga je za mene ova faza bila novo iskustvo. Pri rješavanju zadaka često sam dio koji spada u izvršavanje plana stavljala pod osvrt. Nakon razgovora s mentorom, uvidjela sam svoje pogreške to jest shvatila sam koliko se puno puta prema Polyau trebam vraćati u kontrolu rezultata. Kroz školski sustav nisam naviknula osvrtati se na zadatke u ovolikoj mjeri. Većinom dobiveno rješenje provjerava učitelj bez previše osvrtanja na njega. Rijetko sam do sada dobiveni rezultat zadatka izvodila na drugačiji način, ako sam kroz kontrolu iste metode rada uvidjela točnost. Do sada se, nakon riješenog zadatka nisam pitala mogu li rezultat ili metodu iz riješenog zadatka upotrijebiti na neki drugi zadatak. To pitanje potiče na povezivanje i razmišljanje. Što više razmišljam o nekom zadatku, provjeravam ga, kontroliram i iznova mu se vraćam, teško da ga mogu zaboraviti.

6. ZAKLJUČAK

Rješavanje problema je sastavni dio predmeta matematike. Razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana i osvrt su četiri faze rada prema Polyau koje su predmet proučavanja ovog rada. One govore da je cilj rješavanja zadataka shvatiti zadatak. Da bi zadatak mogli shvatiti potrebno nam je stvaranje plana za njegovo rješenje. Kada smo stvorili plan, trebamo ga izvršiti tako da kontroliramo svaki korak i jasno uvidimo je li on ispravan. Trebamo se propitkivati i dokazati ispravnost rješenja. Kada riješimo zadatak, ne trebamo odmah preći na drugi, već se vraćati ponovno riješenom zadatku i vršiti osvrt. Trebamo uvidjeti možemo li kontrolirati rezultat i dokaz. Također, trebamo promišljati o riješenom zadatku i vidjeti može li se rezultat izvesti na drugačiji način. Vraćajući se zadatku ponovno i kontrolirajući rezultat, pohranjujemo svoj zadatak u svoje sjećanje. Velika je vjerojatnost da će nam riješeni zadatak i metoda koja je upotrjebljena pri njegovu rješavanju koristiti pri rješavanju nekog drugog srodnog zadataka. Na umu uvijek trebamo imati da je rješenje velikog problema i veliko otkriće. U rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko. Rješavajući zadatke prema ove četiri faze rada pokazala sam veću kreativnost i dosjetljivost. Zadatci su u meni pobuditi interes, proživljavala sam napetost pri stvaranju plana i njegovom izvršavanju. Vraćajući se ponovno zadatcima i kontrolirajući ih osjeća ugodu kada sam stigla do rješenja. Faze rada prema Polyau vrlo su poučne i postupno objašnjavaju korak po korak kako se zadatak treba riješiti. Rješavajući prema njegovom vođenju naučila sam pristupiti zadacima na drugi način i shvatila kako rješavanje matematičkih problema može biti interesantnije.

7. LITERATURA

1. Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically (2nd. ed.)*. Harlow: Pearson
2. Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
3. Polya, G. (2003). *Matematičko otkriće.* Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo.
4. Potkonjak, S. (2014). *Teren za etnologe početnike*. Zagreb: Hrvatsko etnološko društvo
5. Wichita State University na adresi http://www.math.wichita.edu/history/men/polya.html (20.6.2018.)

Izjava o samostalnoj izradi rada

Ja, Monika Sedlaček, izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojega rada te da se u njegovoj izradi nisam koristila drugim izvorima do onih navedenih u radu.

____

(potpis studenta)