

Fundamentalne ideje u geometriji i nastavi geometrije

Miloš, Antonia

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:608762>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-14**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE

ANTONIA MILOŠ
DIPLOMSKI RAD

FUNDAMENTALNE IDEJE U
GEOMETRIJI I NASTAVI
GEOMETRIJE

Zagreb, srpanj 2018.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE
(Zagreb)**

PREDMET: METODIKA MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Ime i prezime pristupnika: Antonia Miloš

**TEMA DIPLOMSKOG RADA: Fundamentalne ideje u
geometriji i nastavi geometrije**

MENTOR: doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Zagreb, srpanj 2018

SAŽETAK.....	iv
ZUSAMMENFASSUNG	v
1. UVOD	1
2. GEOMETRIJA I NJEN POVIJESNI PREGLED	3
3. GEOMETRIJA DANAS	12
3.1. Wittmanove fundamentalne ideje u geometriji	12
3.2. Geometrija u okviru kurikularnih dokumenata.....	14
3.3. Promjene u nastavnim kurikulumima iz Matematike	22
3.4. Značajke nastave geometrije.....	23
4. VAN HIELEOVE RAZINE MIŠLJENJA	26
5. WITTMANNOVE FUNDAMETALNE IDEJE U PRAKSI.....	33
5.1. Dječji crteži kao dio instrumenta za prikupljanje podataka.....	33
5.2. Cilj i uzorak istraživanja.....	33
5.3. Instrument istraživanja.....	34
5.5. Primjeri analize dječjeg crteža.....	36
5.6. Rezultati fundamentalnih ideja u nastavi geometrije	39
5.7. Nastavna sredstva i pomagala u nastavi geometrije.....	42
6. PRIJEDLOZI AKTIVNOSTI I ZADATAKA IZ GEOMETRIJE.....	46
6.1. Aktivnosti i zadatci za učenike koji su na vizualnoj razini geometrijskog mišljenja	46
6.2. Aktivnosti i zadatci za učenike koji se nalaze na razini Analize geometrijskog mišljenja	65
IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI RADA	79
IZJAVA O JAVNOJ OBJAVI RADA	Pogreška! Knjižna oznaka nije definirana.

SAŽETAK

Geometrija je stara matematička disciplina kojom su se bavili ljudi prvih civilizacija, a danas se uči od prvog razreda osnovne škole. Posljednjih desetljeća dogodile su se promjene širom svijeta u nacionalnim kurikulumima koje nisu zaobišle ni kurikulum matematike, posebice geometrije.

U ovom radu opisuju se fundamentalne ideje iz geometrije prema Wittmannu, koje su neke zemlje implementirale u svoje nacionalne kurikule. U sklopu rada uspoređen je hrvatski Plan i program s fundamentalnim idejama te je napravljena analiza učeničkih radova o tipičnom nastavi geometrije, također prema fundamentalnim idejama. Analiza se temelji na 251 crtežu učenika iz razredne nastave. Rezultati pokazuju kako i nastavni program i učenici imaju prilično usko viđenje geometrije, uglavnom kroz geometrijske likove i tijela, a ostale fundamentalne ideje su vrlo malo zastupljene.

U radu su stoga ponuđena neka rješenja za aktivnosti u nastavi geometrije usklađene s razinama geometrijskog mišljenja prema van Hieleu. Mogućnosti se nude kroz aktivnosti i geometrijske zadatke koje bi potaknuli učenike na dublje i kvalitetnije povezivanje nastavnog sadržaja, a samim time implementirala u nastavu fundamentalne ideje koje nedostaju.

Ključne riječi: nastava geometrije, fundamentalne ideje u geometriji, razine geometrijskog mišljenja, dječji crteži, analiza

ZUSAMMENFASSUNG

Geometrie ist eine alte mathematische Disziplin mit der sich schon die Menschen der ersten Zivilisationen befasst haben, heute lernt man dies bereits ab der ersten Schulstufe. Seit Jahrzehnten gab es weltweit Änderungen in den nationalen Lehrplänen, welche nicht nur auf den Lehrplan der Mathematik beschränkt sind, sondern insbesondere die der Geometrie.

In dieser Arbeit werden die fundamentale Ideen der Geometrie nach Wittmann beschrieben, die einige Länder in ihren nationalen Lehrplänen umgesetzt haben. Im Rahmen der Arbeit wurde der kroatische Plan und das Programm mit grundlegenden Ideen verglichen und eine Analyse der Arbeiten der Schüler über den typischen Geometrieunterricht, auch nach fundamentalen Ideen, durchgeführt. Die Analyse basiert auf 251 Zeichnungen von Klassenschülern. Die Ergebnisse zeigen, dass sowohl der Lehrplan als auch die Schüler eine eher enge Sicht der Geometrie haben, meist durch geometrische Figuren und Körper, während andere grundlegende Ideen sehr wenig vertreten sind.

Die Arbeit bietet einige Lösungen für geometrische Lehraktivitäten, die sich am geometrischen Denken von van Hiele orientieren.

Möglichkeiten werden durch Aktivitäten und geometrische Aufgaben angeboten, die die Schüler dazu ermutigen, Lehrinhalte zu vertiefen und besser miteinander zu verknüpfen und dabei die Lektionen und die fehlenden Grundideen zu vermitteln.

Schlüsselwörter: Geometrieunterricht, fundamentale Ideen der Geometrie, Ebenen des geometrischen Denkens, Kinderzeichnungen, Analyse

1. UVOD

Pogledamo li malo bolje oko sebe i promislimo li o geometriji možda ćemo je pronaći u svakom predmetu ili objektu. To nije slučajno, geometrija prati čovjeka od prvih dana, što se vidi ostacima u pećinama, predmetima i izumima koji su se razvijali kroz povijest. Geometrijom su se bavili mnogi umovi kroz povijest. Ona spaja dvije oprečne strane, vizualizaciju i apstrakciju, a geometrije nema bez "obje strane". Vezano uz te dvije spomenute strane, pitamo se traži li nastava geometrije previše od učenika s obzirom na njihovu dob ili je geometrija dohvatljiva učenicima?

Učenje i poučavanje geometrije nije jednostavan zadatak za učitelje ni učenike, učitelji bi trebali znati i moći približiti geometriju na razumljiv način učeniku, a učenik bi trebao moći razumjeti i primijeniti usvojeni nastavni sadržaj. Istraživanja su već pokazala kako je poučavanje geometrije zahtjevnije od drugih matematičkih disciplina (Mammana i Villani, 1998), a promjene koje su zahvatile predmetne kurikule dodatno su ograničile nastavu geometrije u svim njezinim područjima. S obzirom na dugogodišnju povijest poučavanja geometrije i promjene koje su se dogodile, s pravom se možemo zapitati kako izgleda nastava geometrije i kakvi zahtjevi se stavljaju pred učenike, što je ujedno temeljno je pitanje ovoga rada. Do sada u Hrvatskoj nije provedeno ovakvo istraživanje nastave geometrije, a dodatna specifičnost je u metodi istraživanja koja je bila kroz analizu dječjih crteža.

U drugom poglavlju ovog rada daje se povijesni pregled geometrije koji su postavili stari Babilonci, Rimljani, Egipćani, prve pokušaje i prve dokaze koji se i danas koriste zahvaljujući Talesu, Pitagori, Euklidu i Arhimedu.

U drugom poglavlju prikazuje se geometrija u današnjem obrazovnom sustavu kroz nacionalni kurikulum i fundamentalne ideje u geometriji prema Wittmannu. Prikazuju se promjene koje su zahvatile mnoge nacionalne kurikule te koje su posljedice promjena. Prikazuje se važnost nastave geometrije te što je potrebno za uspješnu nastavu geometrije.

Treće poglavlje prikazuje koje su razine geometrijskog razmišljanja prema van Hieleu te koje razine su zastupljene u razrednoj nastavi, kako učenici razmišljaju, s kojim teškoćama u geometriji se susreću te kako pomoći učenicima da pređu na višu razinu razmišljanja.

U četvrtom poglavlju prikazuje se istraživanje fundamentalnih ideja prema Wittmannu koje je provedeno među učenicima drugih, trećih i četvrtih razreda osnovnih škola u Republici Hrvatskoj.

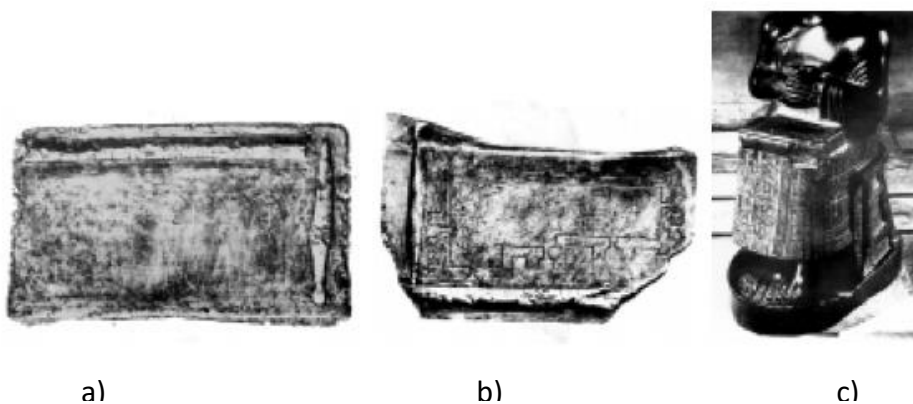
U petom poglavlju nude se prijedlozi aktivnosti i zadataka za učenike koji se nalaze na nultoj i prvoj razini geometrijskog razmišljanja prema van Hieleu. Kroz zadatke i aktivnosti uvode se fundamentalne ideje iz geometrije prema Wittmannu koje nisu zastupljene u nastavnom programu.

2. GEOMETRIJA I NJEN POVIJESNI PREGLED

Što je geometrija, zašto bismo se trebali njome baviti te koja je njezina važnost i funkcija u modernom i tehnološki "svemogućem" vremenu, otkrit ćemo zavirimo li u njezinu dugogodišnju povijest. Riječ geometrija potječe od dviju grčkih riječi $\chi\acute{o}\rho\alpha$ što znači *Zemlja* i $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron$ što znači *mjera*, iz čega možemo zaključiti kako su počeci geometrije imali veze s mjerenjem Zemlje (Gusić, 1995). Geometrija se započela razvijati kroz praktičnu primjenu u svakodnevici gdje su se ljudi susretali s raznim pitanjima, a u geometriji su pronašli odgovore.

"Geometrija je prva matematička disciplina (znanstvena disciplina uopće) koja je aksiomatizirana (Euklid, Hilbert)" (Gusić, 1995, str. 67). Aksiomom se smatra neka osnovna tvrdnja koja se smatra istinitom te se ne dokazuje, a odnosi se na neku teoriju (npr. Arhimedov aksiom, Euklidov aksiom) (Gusić, 1995). Danas geometriju poznajemo u obliku teorijske znanstvene discipline te je kao takvu proučavamo.

Kako bismo danas razumjeli važnost geometrije potrebno je vratiti se u prošlost i saznati kako je nastala, kako se razvijala te koji trag je ostavila u razvoju čovječanstva. Čovjek se u davnini na temelju konkretnog znanja i opažanja bavio geometrijom koja je bila dio njegove svakodnevice. Primarna djelatnost na području Grčke, Male Azije, Južne Italije i Egipta u 6. stoljeću prije Krista bila je poljoprivreda, a temelji geometrije su upravo u tim počecima ljudskog djelovanja i obrađivanju zemlje. Geometrijski likovi datiraju iz davne prošlosti kada se čovjek kroz oruđa (Slika 1) kojima se koristio pokazao znanje geometrije jer su brojna oruđa i noževi bili upravo u obliku romba ili trokuta (Dadić, 1992).



Slika 1.: Statua Gudee, "arhitektas planom" (c), s risaćim priborom (a) i tlocrtom (b), iz približno 2150. g. pr. Krista (Viličić, 1999.)

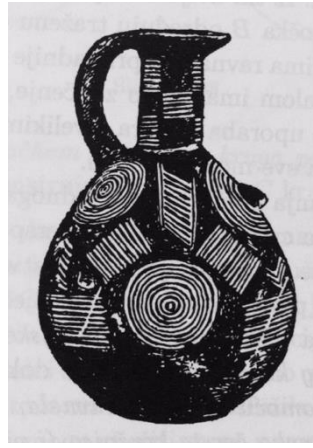
Mjerenjem zemljišta u Starom Egiptu, koje je bilo često zbog brojnih poplava rijeke Nil, čovjek se suočio s problematikom mjerenja i računanja površine zemljišta (Dadić, 1992) te od tuda potječe današnji naziv geometrija, odnosno mjerenje zemlje. Samo mjerenje površine zahtijevalo je uvođenje mjerne jedinice za površinu, a rješenje su pronašli u kvadratiću sa stranicom od jednog koraka ili lakta (Dadić, 1992). U 6. stoljeću prije Krista je bilo poznato množenje te su tako pomoću mreže kvadrata došli do zaključka kako površina zemlje koja ima oblik pravokutnika ima površinu jednaku umnošku redova kvadrata puta koliko ih ima. Kada su došli do te spoznaje empirijskim istraživanjem, lako se ta spoznaja nadogradila te dovela do spoznaje obujma prizme. Mjerenje površine zemlje nije jedina aktivnost u kojoj su ljudi koristili geometriju već je bila prisutna pri gradnji sustava za navodnjavanje, piramida i oruđa. Vidimo izražen utjecaj geometrije u svakodnevici te kako je stvarnost toga vremena ostavila utisak na umjetninama koje su krasile zidove i predmete iz svakodnevne uporabe (Slika 2) na kojima se mogla primijetiti jednakost, simetrija i sličnost geometrijskih objekata. "Sačuvane posude iz starog Egipta, Indije, s Cipra i iz drugih krajeva daju predodžbu o razvoju geometrijskih ukrasa od jednostavnih likova, koji se sastoje od sustava usporednih dužina, do složenih kombinacija pravaca i krivulja" (Isaković Gleizer, 2003, str. 448), što je ujedno otvorilo vrata geometriji kao znanosti te implementaciji u druga područja kao što je umjetnost i arhitektura.



a)



b)



c)



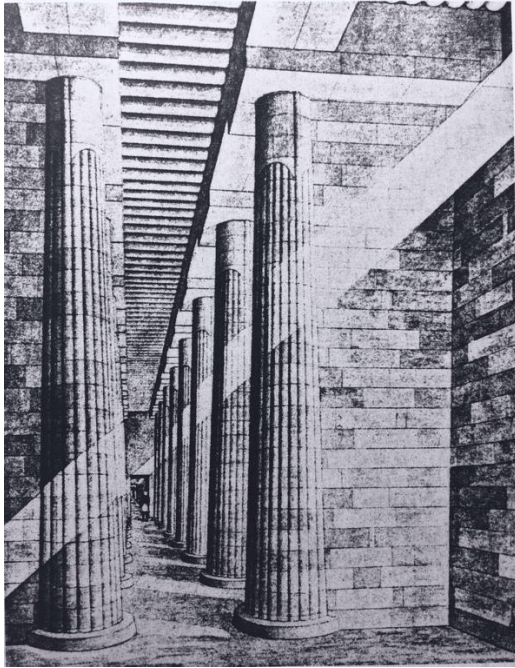
d)



e)

Slika 2.: a) Asirski reljef prikazuje opsadu utvrde na vodi (Viličić, 1999.); b) Geometrijski ukrasi na egipatskoj posudi iz 6. st. pr. K. (Isaković Gleizer, 2003); c) Posuda iz 3. st. pr. K. pronađena na Cipru (Isaković Gleizer, 2003) d) Posuda s oslikanom dekoracijom, 9.-7. st. pr. Kr. (Aruz, 2010., str. 31); e) Fragment zidnog reljefa prikazuje kako konjanik vodi konja pokraj potoka, Mezopotamija, 704.- 681. g pr. Kr. (Azur, 2010., str. 29)

U neolitiku prve nastambe su bile zemunice, sojenice, bunje i brvnare koje su sadržavale geometrijske oblike u konstrukciji građe, a tlocrti su im bili u obliku pravokutnika, kružnice ili elipse (Jakubin, 2006.). Dominantnost geometrije vidimo u građevinama kao što su hramovi koje su gradili bogovima gdje se koriste geometrijom kako bi izgradili hram i uredili ga po zakonitostima omjera (Slika 3).



Slika 3: Rekonstrukcija ulazne kolonade zdanja kralja Zosera, Saqqara, Egipat, 2 600 god. pr. n. e. (Dadić, 1992.)

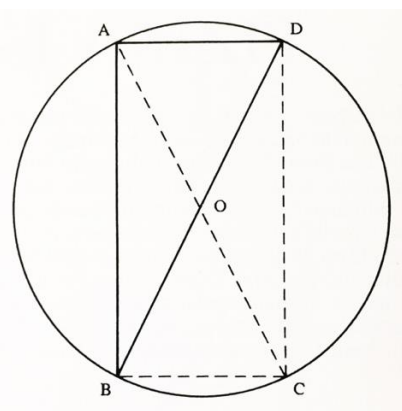
Na temelju navedenog možemo zaključiti kako je matematika u prvim civilizacijama bila "konkretna, a ne apstraktni pojmovi" (Dadić, 1992., str. 20) te se čovjek susretao s velikim izazovima za koje danas već imamo rješenje zahvaljujući civilizacijama koje su ostavile iza sebe trag i pristup rješavanju problema. Vrijedno dostignuće iz geometrije ostavili su Egipćani na tzv. Moskovskom papirusu davanjem točne upute kako točno izračunati obujam krnje piramide s kvadratnom osnovicom (Isaković Gleizer, 2003). Iz Babilona imamo sačuvane tablice na klinastom pismu na kojima se prema pretpostavkama nalazi izračun ploština (površina) pravokutnog trokuta (Dadić, 1992) (Slika 4). Babilonci ostavljaju vrijedna dostignuća iz područja aritmetike i algebre, ali i iz geometrije pojmom proporcionalnosti odsječaka presijecanjem pravaca paralelnim pravcima, Pitagorinim poučkom te izračunavanjem površine i obujma nekih tijela. Babilonci i Egipćani su pokušali odrediti vrijednost

broja π sluteći da je to kvocijent opsega i promjera te da je to otprilike broj 3 (Gusić, 1995.).



Slika 4: Babilonske tablice (Plimpton tablet 322) s klinastim pismom (oko 1900 – 1600 god. pr. n. e.) (Dadić, 1992.)

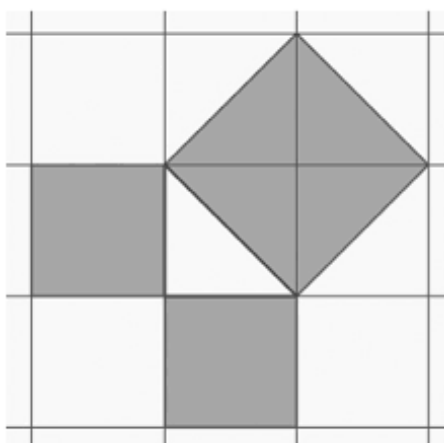
S vremenom u matematici, pa tako i geometriji, samo iskustvo više nije bilo dovoljno kako bi se prihvatilo novo saznanje, već je potrebno bilo to i dokazati. Tales (624. g. pr. n. e.) je na temelju egipatskih otkrića u matematici uveo apstraktno mišljenje i dokaze, iako još nije jasno postavio granicu između konkretnoga i apstraktnoga. Kako bi dokazao istinitost još uvijek se oslanjao na iskustvo, odnosno na očitost koja pripada empirijskoj matematici. Usprkos tom nedostatku, Talesov poučak da je *kut nad promjerom kružnice pravi kut* (Gusić, 1995.). Slika 5 se uzima kao prvi pokušaj dokazivanja jedne matematičke tvrdnje pomoću druge, što je ujedno i začetak deduktivne metode u matematici (Dadić, 1992.).



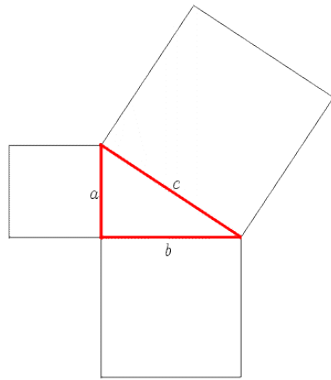
Slika 5: Uz dokaz Talesova poučka (Dadić, 1992.)

Talesu se pripisuje zasluga za dokaze sljedećih tvrdnji (Gusić, 1995): kutovi uz bazu jednakokračnog trokuta su jednakih veličina; vršni kutovi su jednakih veličina; ako se dva trokuta podudaraju u jednoj stranici i kutovima uz nju, onda su ti kutovi sukladni. Smatra se da je Tales prvi izračunao koliko je visoka Keopsova piramida pomoću jednog štapa i sjene koju je bacalo sunce na tlo korištenjem sličnosti. Tales je, smatra se, dokazao i poučak koji glasi: kut nad promjerom kružnice je pravi kut, a danas je poznat kao *Talesov poučak o kutu nad promjerom*, a učenici ga uče u sedmom razredu osnovne škole (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta [MZOS], 2006.).

Još jedan veliki matematičar je Pitagora (570. g. pr. n. e.) koji je imao svoje učenike koji su se nazivali pitagorejcima te su pohađali njegovu filozofsku školu. Zahvaljujući Pitagori poznajemo današnju definiciju za pravokutnik koja ga definira kao četverokut koji ima sva četiri prava kuta (Dadić, 1992.). Pitagora uvodi apstrakciju u matematiku na način da kaže: "Geometrijski objekti apstrahirani su iz stvarnosti" (Dadić, 1992, str. 25) te je napravio veliki iskorak od konkretne matematike. Dokazao da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom te danas poučak po njemu nosi ime Pitagorin poučak (Isaković Gleizer, 2003). Legenda govori kako se Pitagora zagledao u pločice na podu palače te uočio dokaz te tvrdnje. Ako pažljivije promotrimo sliku pločica može primijetiti kako je dokaz gotovo golim okom vidljiv za pravokutan jednakokračan trokut (Slika 6). Važno je napomenuti kako Pitagora nije prvi otkrio taj teorem jer je poznato da je on već bio poznat Babiloncima, već ga je Pitagora prvi dokazao.

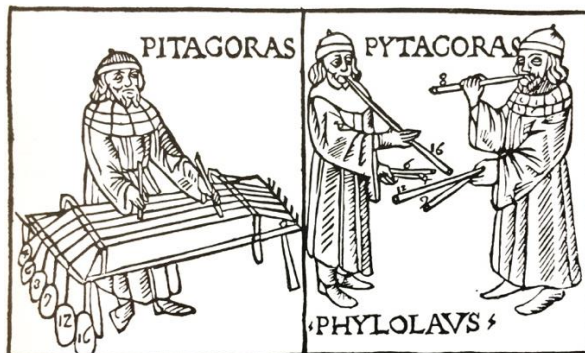


Slika 6.: Pitagorin poučak na pločicama



Slika 7.: Pitagorin poučak

Pitagora je matematičke pojmove u potpunosti apstraktno prikazivao dajući im novu ulogu - projicirao ih je na prirodu i prikazao ih kao strukturne elemente svemira (Dadić, 1992.). Pitagora je aritmetiku, geometriju, astronomiju i muziku smatrao dijelovima matematike te je pokušavao pronaći veze između njih i pokušao je svijet i sve u svijetu i oko svijeta objasniti na taj način. Povezivanjem brojeva i geometrijskih objekata točku je nazvao Jedan, crtu Dva, površinu Tri i tijelo Četiri time je želio reći kako je najmanji broj, odnosno točka, nužna za određivanje svakog većeg broja, odnosno geometrijskog objekta (Dadić, 1992.). Zbroj tih brojeva je deset te je broj deset poprimio veliku simboliku savršenstva da su ga smatrali sveobuhvatnim i svemoćnim te su pokušavali objasniti uređenost svemira pomoću broja *deset* (Dadić, 1992.). Pitagora je zaslužan i za vezu između matematike i glazbe stvorivši matematičku teoriju glazbe shvativši da žica proizvodi tonove u harmoniji kada su omjeri duljina žica cijeli brojevi. Pitagora, osim što je bio filozof i matematičar, bio je odličan muzičar (Slika 8), svirao je liru te ju je često koristio u kao pomoć pri liječenju bolesnika kao muzikoterapiju (Dadić, 1992.).



Slika 8.: Pitagora kao glazbenik, drvorez iz djela F. Gaturiusa *Theorica Musicae*, Milano, 1492. (Dadić, 1992., str. 27)

Euklid (330. – 275. g. pr. n. e.) je živio za vrijeme vladavine Ptolomeja Sotera u Aleksandriji, odnosno živio je poslije Platona. Euklid spada među tri najveća antička matematičara (Euklida, Arhimeda i Apolonija). U knjizi *Elementi* je sakupio i sistematizirao sve dotadašnje znanje iz geometrije te je podijelio u 13 knjiga koje imaju teoretski pristup na temelju aksioma (Gusić, 1995), bez primjera i prikaza računa. Konceptija *Elementata* je u duhu Platonove i Aristotelove koncepcije deduktivne znanosti u kojoj se prvo utvrđuju temeljni pojmovi koji se ne trebaju definirati, potom slijedi odabir postulata i aksioma čija se istinitost ne ispituje i ne dokazuje te se na temelju toga formalno-logičkom dedukcijom izvode nove činjenice, teoremi, a novi i izvedeni pojmovi se definiraju. U Euklidovim *Elementima* prvih šest knjiga odnosi se na planimetriju, sljedeće tri na geometrijsku teoriju cijelih brojeva, deseta knjiga na teoriju cijelih brojeva, a zadnje tri na stereometriju. O važnost *Elementata* govori činjenica da je druga knjiga iza Biblije po broju izdavanja, a u nekim zemljama se školski predmet zvao ”*Euklid*”. Postoje dvije anegdote po kojima je Euklid poznat, prva govori o Euklidovom učeniku koji ga je pitao što će dobiti znanjem iz geometrije na što mu je Euklid dao novčić i otpustio ga iz škole, a u drugoj anegdoti Euklid odgovara kralju Ptolomeju na pitanje postoji li lakši put učenja geometrije od *Elementata* na što mu je odgovorio da ne postoji lakši put za kraljeve. Euklid je očito smatrao da je znanje bitno i da ne postoji vrijednost kojom bi se moglo mjeriti te da je to *put*, a ne ”prečac” bilo da se radi o cilju ili sredstvu, odnosno društvenoj poziciji osobe.

Arhimed (287. pr. Kr.) je također jedan od najpoznatijih starogrčkih matematičara koji je ostavio brojna otkrića čovječanstvu te mnogi zakoni, strojevi, matematičke veličine nose njegovo ime (Marinić Kragić, 2011). Arhimed je izračunao obujam kugle, a dokazao je kako su obujmi valjka, kugle i stošca u omjeru 3 : 2 : 1 pod uvjetom da su im jednaki polumjeri i visina (Marinić Kragić, 2011). Moderna metoda matematičke analize potječe iz djela *O kvadraturi parabole, Mjerenje kruga i O kugli i valjku*, čiji se račun izvodio originalnom metodom, a provjera rezultata se temelji na metodi iscrpljivanja (Gusić, 1995). Arhimed je prvi točno izveo formule za obujam i oplošje kugle, kuglina odsječka, stošca, prvi je dokazao formulu za površinu trokuta (poznatu pod nazivom Heronova formula) te da je težište trokuta ujedno i njegovo fizikalno središte (Gusić, 1995). Prema legendi, Arhimed je riječima ”Noli turbare circulos meos!” što znači «ne dirajte mi moje krugove», zaokružio svoj život

pred napadom rimskog vojnika koji mu je oduzeo život dok je on pokušavao riješiti geometrijski problem crtajući krugove u pijesku. Danas se Arhimedova posljednja rečenica koristi kao simbol snage i važnosti ideja koje su mu bile važnije od obrane vlastitog života. "Također prema legendi, na Arhimedovu nadgrobnom spomeniku bio je crtež sfere upisane valjku kojem je promjer osnovke jednak visini" (NN, 2009, str. 49). Arhimedov uzvik koji i danas odjekuje je *Heureka* što znači *pronašao sam*. Oduševljenje nije mogao sakriti pronašavši način za pronalaženje volumena nepravilnog tijela do kojega je došao kada je ušao u kadu punu vode i tako shvatio da je iz kade je istisnut isti volumen vode kao i tijela koji je bio uronjen, a legenda kaže da je od sreće gol trčao gradom i vikao *Heureka*¹. Upravo nazivi za heurističku nastavu i metodu potječu od Arhimedovog uzvika *Heureka* (Kurnik, 2006) "u kojoj nastavnik ne priopćuje učenicima gotove činjenice i istine, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih tvrdnji i pravila" (Kurnik, 2006, str. 150).

Geometrija je među najstarijim granama matematike što nam potvrđuju mnoge kulture i civilizacije, a geometrija koja je bila sabrana u Euklidovim *Elementima* u 20. stoljeću postaje samo dio matematike prostora (Jones, 2000). U prošlosti koja se odvijala prije više od 2 000 godina, ljudi su prostor u kojem žive shvaćali i koristili geometriju na intuitivan način, a danas se shvaćanje i korištenje geometrije diže na sve veći nivo, na apstrakciju i općenitost (Mammana i Villani, 1998).

¹ Bilješke s predavanja Metodike matematike 2 na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, ak. godine. 2016./2017.

3. GEOMETRIJA DANAS

Suvremena matematika počiva na idejama starogrčke matematike, odnosno na definicijama i aksiomima dok se tvrdnje obavezno dokazuju (Gusić, 1995). Zbog duge povijesti geometrije i njezinog značaja od samih početaka čovječanstva, nezaobilazni je dio matematike u primarnom obrazovanju i na višim razinama obrazovanja širom svijeta.

U praksi se pokazalo da poučavanje geometrije zadaje više problema i nailazi na veće prepreke nego poučavanje numeričkih operacija ili elementarne algebre, a kontradiktorna je činjenica da je geometrija ipak intuitivnije i konkretnije povezana sa stvarnošću u kojoj živimo od ostalih područja matematike (Mammana i Villani, 1998). Danas geometriju možemo podijeliti na, primjerice, euklidsku, afinu, deskriptivnu, projektivnu, neeuklidsku te kombinatornu geometriju (Mammana i Villani, 1998).

Problem koji se javlja u obrazovanju je implementacija geometrije u matematički kurikulum, odnosno što uključiti, a što izostaviti kako bi se očuvala priroda geometrije, cilj nastave geometrije, metode poučavanja, mogućnosti različitih pristupa rješavanja problema i vještina dokazivanja (Jones, 2000).

3.1. Wittmanove fundamentalne ideje u geometriji

Jedan od mogućih načina kategoriziranja geometrije nudi Wittmann (1999) kroz sedam fundamentalnih ideja u geometriji:

- 1) geometrijski oblici i njihove konstrukcije
- 2) operacije s formama
- 3) koordinatni sustav
- 4) mjerenja
- 5) geometrijske zakonitosti i obrasci
- 6) oblici u okruženju te
- 7) geometrizacija.

1) Geometrijski oblici dijele se prema prostornim dimenzijama: nuldimenzionalni objekti su točke, jednodimenzionalni objekti su linije i njihovi dijelovi, dvodimenzionalni objekti su plohe i njihovi dijelovi, a trodimenzionalni objekti su geometrijska tijela i ostali dijelovi prostora. Geometrijski oblici mogu se

konstruirati ili prikazati na druge načine (npr. priborom za crtanje, materijalom itd.) te možemo ih prepoznati u stvarima koje nas okružuju.

2) Geometrijski oblici mogu se transformirati u ravnini (npr. translacijom, rotacijom, zrcaljenjem), povećavati ili smanjivati, projicirati na ravninu umanjivanjem ili proširivanjem u određenom smjeru, iskrivljivanjem, podjelom na dijelove, kombinirati s drugim likovima i oblicima kako bi formirali složenije oblike koji se mogu i preklapati. Važno je naglasiti da se geometrijski oblici mijenjaju u skladu s matematičkim zakonitostima, a promjene mogu biti veće ili manje.

3) Koordinatni sustav se uvodi opisivanjem pozicije točaka geometrijskog oblika te međuodnosa objekata pomoću koordinata.

4) Pomoću mjernih jedinica mjeri se duljina, površina i volumen geometrijskih oblika. Također, tu pripada i mjerenje kutova, računanje veličina kutova, formule za opseg, oplošje i volumen te trigonometrijske formule povezane s mjerenjem.

5) Geometrija omogućava povezivanje više točaka, linija, likova i tijela tako da nastaju novi geometrijski uzorci i strukture, sukladno sa samim sadržajem i razinom koja se poučava u školi.

6) Oblicima iz okruženja smatraju se svi objekti iz svakodnevice na kojima se mogu primjenjivati razne operacije. Također, međusobni odnosi među stvarnim objektima mogu se opisati pomoću geometrije. Značajna primjena geometrijskih oblika je prisutna u umjetnostima kao što su slikanje, grafika i kiparstvo.

7) Geometrijske činjenice vezane za prostor i ravninu (npr. zbroj kutova trokuta), odnosi i apstraktni odnosi između brojeva (npr. trokutasti brojevi) mogu se prevesti u geometrijski jezik i pomoću same geometrije opisati, a rješenje je moguće ponuditi kao praktično (Wittmann, 1999).

Navedene fundamentalne ideje preporuča krovna svjetska matematička organizacija za nastavu matematike International Commission on Mathematical Instruction ICMI (Mammana i Villani, 1998) kako bi se zadovoljile i ostvarile zadaće novih kurikula iz područja geometrije. Wittmannove fundamentalne ideje prepoznale su neke zemlje širom svijeta te su ih implementirale u svoje nacionalne kurikule.

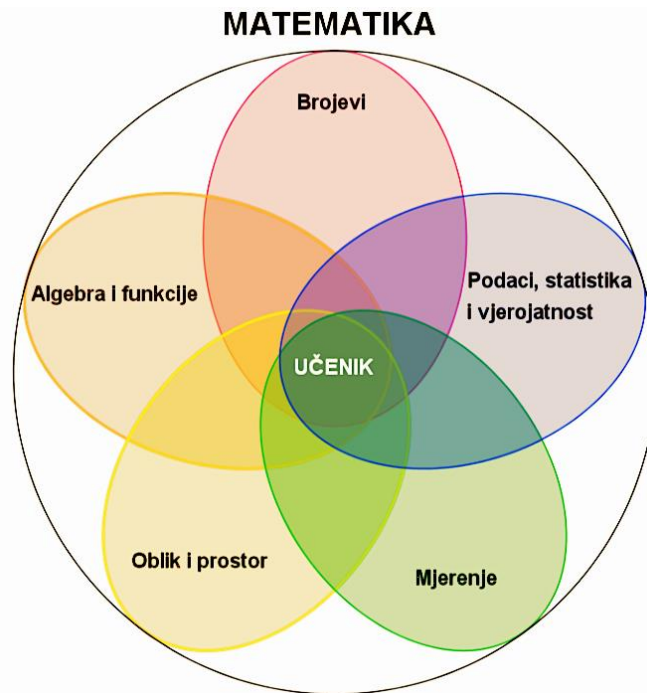
Svjetska matematička organizacija ICMI smatra da postoji potreba za međunarodnim usklađivanjem geometrijskog obrazovanja zbog utjecaja na društvo i istraživanja te je stoga odlučila "razmotriti ciljeve nastave geometrije na različitim razinama obrazovanja i prema različitim kulturnim tradicijama i okruženju" (Mammana i Villani, 1998, str. 338). ICMI ima za cilj identificirati važne izazove i

nove trendove za budućnost u području nastave geometrije te teži implementaciji novih tehnoloških otkrića u nastavu geometrije sve u svrhu poboljšanja metode poučavanja (Mammana i Villani, 1998).

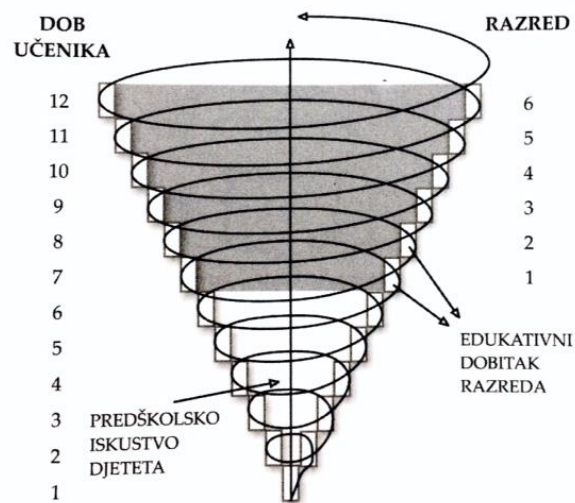
3.2. Geometrija u okviru kurikularnih dokumenata

Važnost geometrije u obrazovanju očituje se u samom sadržaju geometrije koji učenika potiče na razumijevanje obrazaca i njihovih svojstava, potiče na primjenu znanja iz geometrije prilikom rješavanja problema te samu primjenu u svakodnevnim situacijama (Freudenthal, 1973). Mnogi matematičari i metodičari matematike se slažu kako se učenje geometrije treba započeti u najranijoj dobi djece i nastaviti u odgovarajućim oblicima tijekom daljnjeg obrazovanja (Mammana i Villani, 1998).

Svijet je moguće strukturirati i sistematizirati pomoću geometrije kroz otkrivanje geometrijskih objekata u stvarnim situacijama, opisivanje i analiziranje geometrijskih objekata i samo argumentiranje činjenica pa čak i kreativno izražavanje sama sebe (Jones, 2000). Navedeno potvrđuje i Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta Matematika gdje ističe kako "razvojem prostornoga mišljenja i vizualizacije učenici razumiju svijet i prostor u kojem žive, što pridonosi njihovoj koordinaciji te umjetničkom izražavanju" (MZO, 2017, str. 53). Prema tom dokumentu, domene matematike u obrazovnom sustavu su Brojevi, Podaci, statistika i vjerojatnost, Mjerenje, Oblik i prostor te Algebra i funkcije, one nisu jednako zastupljene u svim ciklusima obrazovanja i ne obuhvaćaju jednaku dubinu. Geometrija kao najstarija disciplina koju obuhvaćaju domene Oblik i prostor te Mjerenje je zastupljena od prvog ciklusa obrazovanja. "Domene se postupno razvijaju i nadograđuju cijelom vertikalom učenja i poučavanja matematike" (MZO, 2017, str. 4) (Slika 9), čime su domene međusobno neodjeljive te je nužno usvajanje koncepta jedne domene kako bi se usvojio koncept drugih domena što ukazuje na raspored sadržaja u obliku progresivno-uzlazne spirale (Bognar i Matijević, 2005) (Slika 10).



Slika 9.: Domene predmeta Matematika (MZOS, 2017, str. 5)



Slika 10.: Raspored sadržaja u obliku progresivno-uzlazne spirale (Bognar i Matijević, 2005, str. 181)

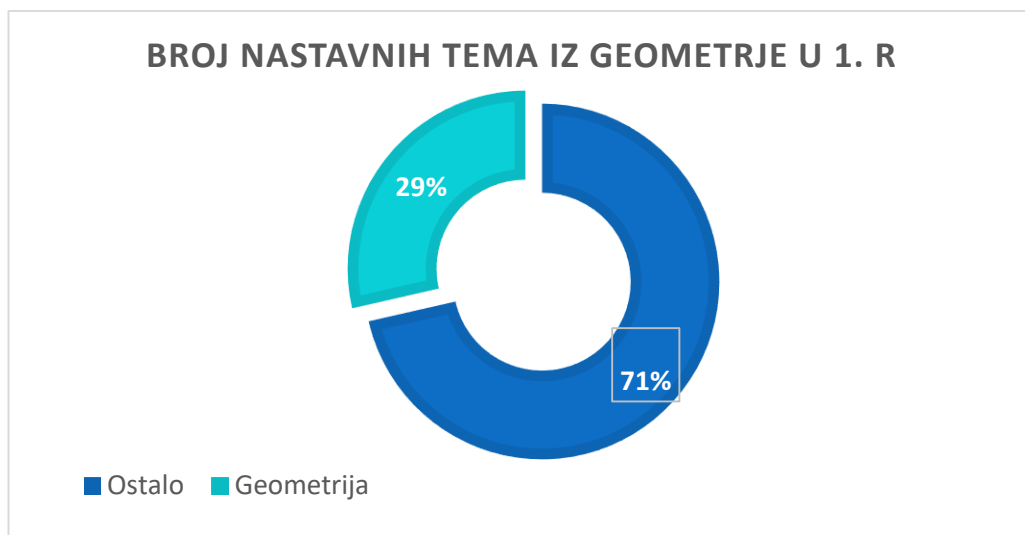
Kako bismo dobili bolji uvid u položaj i zastupljenost geometrije u obrazovnom sustavu u Hrvatskoj, analizirat ćemo matematičke sadržaje i propisana postignuća u prva četiri razreda osnovnoškolskog obrazovanja koje je propisano *Nastavnim planom i programom za osnovnu školu* (MZOS, 2006) kroz ključne pojmove i obrazovna postignuća.

U prvom razredu iz geometrije se uči: geometrijska tijela (kugla, valjak, kvadrat, kocka, piramida), ravnim i zakrivljenim plohama, ravnim i zakrivljenim crtama, točkom, odnosima među predmetima (veći - manji, unutar - izvan) i geometrijskim likovima (krug, trokut, pravokutnik i kvadrat) (prema MZOS, 2006).

Obrazovna postignuća su:

- ”prepoznati i imenovati kuglu, valjak, kocku, kvadar i piramidu među predmetima iz neposredne okoline, na modelima geometrijskih tijela i na ilustracijama”
- ”razlikovati ravne plohe od zakrivljenih ploha”
- ”razlikovati ravne, izlomljene i zakrivljene crte; crtati zakrivljene, izlomljene i ravne crte”
- ”isticati točke kružićem ili križićem; označavati točku velikim tiskanim slovima; spajati ravnom ili zakrivljenom crtom dvije točke”
- ”procijeniti odnose među likovima”
- ”prepoznati, imenovati i razlikovati krug, trokut, pravokutnik i kvadrat” (MZOS, 2006., 238 - 239.)

Od ukupno 21 nastavne teme iz matematike, na geometriju se odnosi 6 tema što predstavlja 29 % udjela geometrije u matematici. Na slici (Slika 11) grafički je prikazan udio nastavnih tema iz geometrije u nastavi matematike.



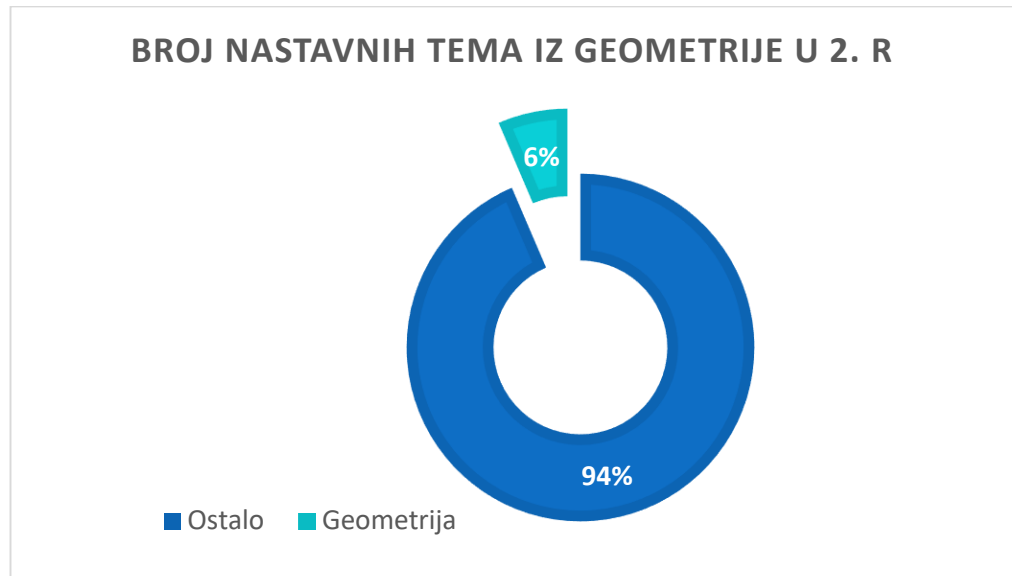
Slika 11.: Broj nastavnih tema iz geometrije u prvom razredu (prema MZOS, 2006)

U drugom razredu iz geometrije se uči: dužina kao spojnica dviju točaka (točka i dužina) i stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta (prema MZOS, 2006).

Obrazovna postignuća su:

- "nacrtati i imenovati dužinu te označiti krajnje točke; razlikovati točke koje pripadaju ili ne pripadaju dužini"
- "označiti stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta kao dužine" (prema MZOS, 2006, str. 240).

Od ukupno 31 nastavne teme u drugome razredu, dvije se odnose na geometriju što čini svega 6 % udjela geometrije u matematici. Na slici (Slika 12) grafički je prikazan udio geometrijskih tema u nastavi matematike.



Slika 12.: Broj nastavnih tema iz geometrije u drugom razredu (prema MZOS, 2006)

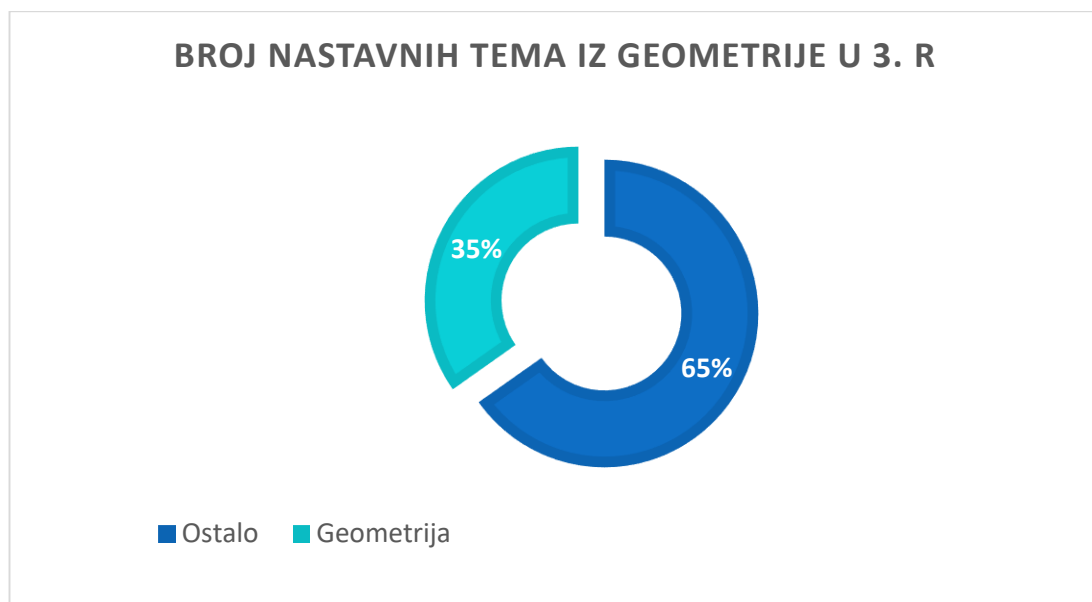
U trećem razredu iz geometrije se uči: ravnina, likovi u ravnini; pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca; mjerenje dužine (jedinična dužina, mjerenje dužine); pravci koji se sijeku i usporedni pravci (pravci koji se sijeku, sjecište, usporedni pravci); okomiti pravci; krug, kružnica (krug kružnica, središte, polumjer i promjer); mjerenje obujma tekućine (obujma tekućine; mjerenje obujma tekućine; mjerne jedinice za obujam tekućine); mjerenje mase (mjerenje mase, mjerne jedinice za masu) (prema MZOS, 2006).

Obrazovna postignuća su:

- "shvaćati ravninu kao neograničenu ravnu plohu i likove kao dijelove ravnine"
- "nacrtati i označiti pravac i polupravac; nacrtati dužinu kao dio pravca i istaknuti njezine krajnje točke"

- ”upoznati jedinice za mjerenje dužine; izmjeriti zadanu dužinu jediničnom dužinom; prenositi zadane dužine; crtati dužine zadane duljine; preračunavati mjerne jedinice za duljinu”
- ” crtati pravce koji se sijeku i odrediti im sjecište; crtati usporedne pravce”
- ”prepoznati okomite pravce; crtati okomite pravce”
- ”crtati kružnicu šestarom; prenositi dužinu; razlikovati krug i kružnicu”
- ”upoznati jedinice za mjerenje mase (gram, dekagram, kilogram) i zapisivati ih; preračunavati jedinice za mjerenje mase” (prema MZOS, 2006, str. 242).

Od ukupno 23 nastavne teme u trećem razredu, njih osam se odnosi na geometriju što čini 35 % geometrijskog sadržaja u matematici. Na slici (Slika 13) grafički je prikazan udio geometrijski tema u nastavi matematike u trećem razredu.



Slika 13.: Broj nastavnih tema iz geometrije u trećem razredu (prema MZOS, 2006)

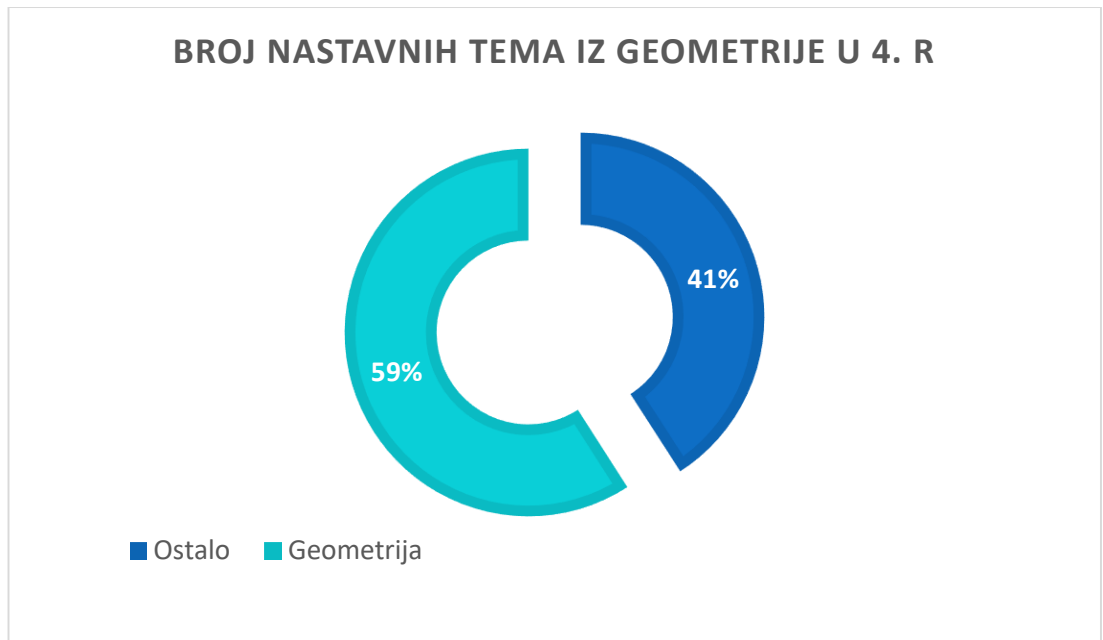
U četvrtom razredu iz geometrije se uči: kut (kut, vrh kuta, krakovi kuta); pravi kut; šiljasti i pravi kut; trokut (trokut, vrhovi stranice i kutovi trokuta); vrste trokuta s obzirom na stranice (raznostraničan, jednakokračan i jednakostraničan trokut); pravokutni trokut (pravi kut, pravokutni trokut); opseg trokuta; pravokutnik i kvadrat (pravokutnik, kvadrat, stranice, vrhovi i kutovi pravokutnika i kvadrata); opseg pravokutnika i kvadrata; mjerenje površine (jedinični kvadrat, kvadratna mreža, površina); površina pravokutnika i kvadrata (površina kvadrata i pravokutnika, mjerne jedinice za mjerenje površine); kvadar i kocka (kvadar, kocka, strane, bridovi i

vrhovi); obujam kocke (kocka, obujam kocke, mjere za obujam) (prema MZOS, 2006).

Obrazovna postignuća su:

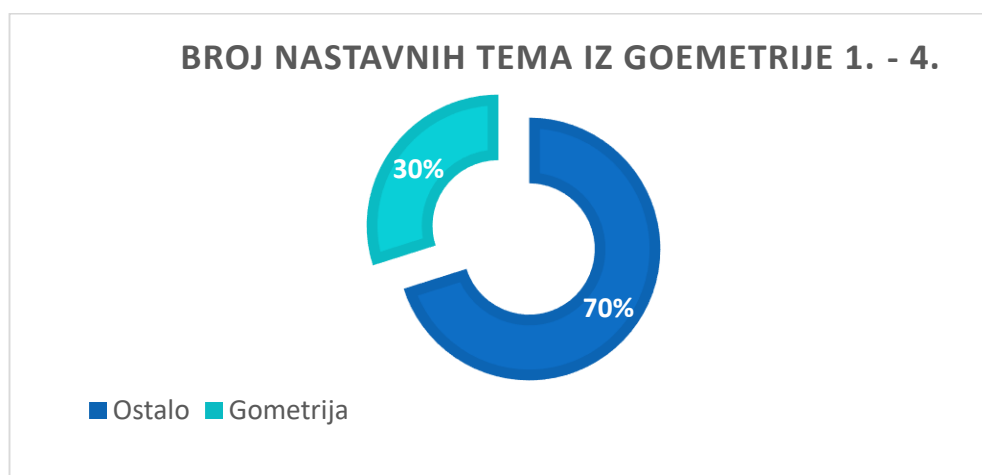
- "shvatiti kut kao dio ravnine omeđen polupravcima; crtati, imenovati i označiti vrh i kutove kuta"
- "crtati i označavati pravi kut"
- "crtati šiljasti i tupi kut; razlikovati pravi, šiljasti i tupi kut"
- "crtati trokut; istaknuti i označiti vrhove, stranice i kutove trokuta"
- "uspoređivati duljine stranica trokuta; razlikovati, crtati i imenovati trokute s obzirom na duljinu stranica"
- "prepoznati i imenovati, crtati i pravilno označavati pravokutni trokut"
- "razumjeti opseg trokuta kao zbroj duljina njegovih stranica; izračunati opseg trokuta"
- "prepoznati, razlikovati i crtati pravokutnik i kvadrat; označavati stranice, vrhove i kutove pravokutnika i kvadrata"
- "razumjeti i izračunati opseg pravokutnika i kvadrata"
- "mjeriti površinu prikriivanjem jediničnim kvadratima; služiti se kvadratnom mrežom u određivanju površine"
- "računati površinu kvadrata i pravokutnika; znati mjere za površinu (kvadratni centimetar, kvadratni decimetar, kvadratni metar)"
- "upoznati kvadar i kocku, znati bitna obilježja kvadra i kocke; određivati njihove strane, bridove i vrhove"
- "mjeriti obujam kocke slaganjem jediničnih kocaka; upoznati jedinice za mjerenje obujma (kubični centimetar i kubični decimetar)" (prema MZOS, 2006, str. 243-244).

U četvrtom razredu od ukupno 22 nastavne teme, na geometriju se odnosi 13 tema što iznosi 59 % geometrijskog sadržaja u matematici. Na slici (Slika 14) grafički je prikazan udio geometrijskih tema u nastavi matematike u četvrtom razredu.



Slika 14.: Broj nastavnih tema iz geometrije u četvrtom razredu (prema MZOS, 2006)

Analizom ukupnog broja nastavnih tema iz geometrije u prva četiri razreda, vidimo kako od mogućih 97 tema njih 29 se odnosi na geometriju, što čini 30 % udjela geometrije u nastavi matematike (Slika 15). Vidimo da je geometrija implementirana od prvog razreda u hrvatski obrazovni sustav, štoviše, među prvim je nastavnim temama koje se usvajaju što ukazuje na njezinu značajnu ulogu u temeljima matematičkog promišljanja i zaključivanja za daljnje uspješno usvajanje matematičkog sadržaja. No, tu se postavlja pitanje njenog udjela unutar pojedinog razreda, te udio prostorne geometrije u odnosu na ravninsku (Kovačević, 2016).



Slika 15.: Udio nastavnih tema iz geometrije u prva četiri razreda osnovne škole (prema MZOS, 2006)

Možemo uočiti kako se od učenika na kraju obrazovnog razdoblja očekuje da može prepoznati, imenovati, razlikovati, crtati, isticati, označavati, spajati, procijeniti, preračunati, zapisati i izmjeriti određene geometrijske pojmove, ovisno o samoj prirodi nastavnog sadržaja. Iz prethodno navedenih očekivanih mogućnosti učenika možemo uočiti kako, iako je dosta aktivnih glagola, naglasak ipak nije stavljen na povezivanja, zaključivanja i druge misaone radnje višeg stupnja.

U Tablici 1 prikazane su fundamentalne ideje u geometriji prema Wittmannu koje se nalaze u nastavnom programu (MZOS, 2006).

Tablica 1. Fundamentalne ideje u nastavnom programu (MZOS, 2006) u geometriji prema Wittmannu

Fundamentalne ideje	Opis
Nul-dimenzionalni objekti	točka
Jednodimenzionalni objekti	Pravac, polupravac, dužina
Dvodimenzionalni objekti	Geometrijski likovi i kut
Trodimenzionalni objekti	Geometrijska tijela
Geometrijska svojstva	Ravne, zakrivljene i izlomljene crte, početna i krajnja točka, vrhovi, sjecište
Pribor za crtanje	Trokut, ravnalo, šestar
Predmeti iz svakodnevne uporabe	Globus, valjak, kutija od cipela
Mjerenje dužine	
Mjerenje opsega	
Mjerenje površine	
Mjerenje volumena	

Kada usporedimo fundamentalne ideje prema Wittmannu i teme u Nastavnom planu i programa za osnovnu školu (MZOS, 2006), primijetit ćemo prvo da Nastavni plan i program dominantno sadrži dvije od mogućih sedam fundamentalnih ideja, a to su:

- 1) Geometrijski oblici: nuldimenzionalni objekti (točke), jednodimenzionalni objekti (pravac, polupravac, dužina), dvodimenzionalni objekti (geometrijski likovi i kut), trodimenzionalni objekti (geometrijska tijela); geometrijska svojstva (ravne, zakrivljene i izlomljene crte; početna i krajnja točka; vrhovi; sjecište itd.), pribor za crtanje i predmeti iz svakodnevnice uporabe;
- 2) Mjerenje (dužine, opsega, površine i volumena).

Kroz uvodni dio se mogu nazrijeti još poneke ideje poput primjene geometrije u svakodnevici, ali dane geometrijske teme stavljaju veliki naglasak samo na spomenute dvije Wittmannove fundamentalne ideje. Stoga ovdje postoji prostor za unapređenje obrazovnih postignuća u području geometrije.

3.3. Promjene u nastavnim kurikulumima iz Matematike

Položaj geometrije u nastavi nije oduvijek ovakav kako je nama poznat. Dogodile su se promijene između šezdesetih i osamdesetih godina prošlog stoljeća (Mammana i Villani, 1998) u nacionalnim kurikulumima širom Europe, a kao rezultat nedavnih izmjena sadržaj matematičkog obrazovanja smanjen je u mnogim zemljama.

Mnoge zemlje se razlikuju u nastavi matematike jer ne zahvaćaju jednaki opseg i dubinu nastavnog sadržaja. Na ovu temu su provedena brojna istraživanja (Backe-Neuwald, 2000; Mammana i Villani, 1998) koja potvrđuju promjene koje su se dogodile, a rezultat promjena vidljiv je i u zahtjevima nacionalnih i međunarodnih istraživanjima matematičkog znanja među učenicima poput PISA-e i TIMSS-a. Promjene koje su nastupile u brojnim zemljama donijele su promjene u strukturi sadržaja nastave matematike. Tako se udio geometrije smanjio, a povećao se udio drugih matematičkih disciplina kao što je računalna znanost, diskretna matematika, vjerojatnost i statistika (Jones, 2000). Geometrijsko znanje je na vrlo niskoj razini poučavanja i usvajanja, a temelji se na osnovnim činjenicama o geometrijskim likovima i njihovim svojstvima (Mammana i Villani, 1998) što se održava na nisko logičko i apstraktno mišljenje te vizualni aspekt geometrije.

Promjene nisu zaobišle hrvatski nastavni kurikulum, uz smanjenje broja sati nastave matematike u razrednoj nastavi pa samim time i geometrije (MZOS, 2006). Nadalje, geometrijski zadatci koji se stavljaju pred učenike u mnogim poglavljima udžbenika

svode se na vježbanje algebarskih izraza i računanje po formulama, a zanemaruje se istinsko poticanje geometrijskog razmišljanja i samim time razumijevanja geometrijskih pojmova (Glasnović Gracin, 2018). Istraživanja su također pokazala kako je u osnovnim školama najviše zastupljeno rutinsko računanje te da se od učenika ne traži matematičko argumentiranje, ne zadaju se zadatci otvorenog tipa već samo jednostavniji proceduralni zahtjevi (Glasnović Gracin, 2011).

U posljednjih nekoliko desetljeća sve veći broj mladih se odlučuje na nastavak obrazovanja na višim razinama (srednje škole i studije), međutim nastaje veliki jaz između znanja s kojim učenici dolaze te načina i sadržaja poučavanja na višim razinama obrazovanja, a najveće probleme učenici imaju u području matematike i geometrije (Mammana i Villani, 1998). Kako su promjene u kurikulumima nastale već u prošleme stoljeću, tako se teže izlazi iz začaranog kruga u kojemu su nastavnici matematike također obrazovani po kurikulumu koji je zanemario geometriju (Mammana i Villani, 1998). Na temelju navedenog postavlja se pitanje, gdje su naši učenici i njihovo razumijevanje geometrije te stjecanje matematičkih kompetencija te je li nastupila kriza u nastavi geometrije.

3.4. Značajke nastave geometrije

Osnovna škola je odgojno-obrazovna ustanova te su sve djelatnosti koje se odvijaju i organiziraju u njoj usmjerene prema odgoju i obrazovanju učenika. Matematika je jedan od obveznih predmeta već od prvog razreda osnovne škole te se učenika odgaja i obrazuje pomoću matematičkih sadržaja koja su propisana nastavni program (Markovac, 2001). U razrednoj nastavi matematikom, odnosno poučavanjem geometrije ostvaruju se ovi zadatci:

- a) formiraju se osnovni geometrijski pojmovi
- b) razvijaju se psihičke i intelektualne sposobnosti (mišljenje, pažnja, promatranje, pamćenje, razvijanje misaonih operacija)
- c) formiraju se pozitivne osobine učenika (točnost, upornost u rješavanju zadataka, urednost, navika služenja geometrijskim priborom, njeguje se osjećaj za ljepotu geometrijskog crteža) (prema Markovac, 2001., str. 20).

Kako bi nastava matematike, pa tako i geometrije bila uspješnija potrebno je implementirati u rad učitelja načela metodike početne nastave matematike, a to su:

načelo primjerenosti,

načelo zornosti,
načelo vlastite aktivnosti,
načelo individualizacije,
načelo postupnosti,
načelo objektivne realnosti (prema Markovac, 2001., str. 55)
načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti
načelo sistematičnosti i postupnosti,
načelo trajnosti znanja, vještina i navika,
načelo motivacije,
načelo odgojnosti nastave,
načelo problemnosti i
načelo znanstvenosti (Kurnik, 2002a; 2002b; 2009 a; 2009 b; 2010).

Načela su jednako važna po vrijednosti i ulozi koju imaju u nastavi kako bi se realizirao cilj odgojno-obrazovnih zadataka geometrije (Markovac, 2001; Kurnik, 2002b, 2009a), a njihovo izostajanje čini značajnu razliku u učenikovom razumijevanju i primjeni geometrijskog sadržaja.

Nastava geometrije donosi mnoge obrazovne vrijednosti kroz aktivnost s objektima iz neposredne okoline kroz crtanje, modeliranje, promatranje, kretanje, dodirivanje, savijanjem kako bi se dalo kvalitetno uporište za usvajanje geometrijskih pojmova, osnovne spoznaje o oblicima i odnosima u prostoru (Markovac, 2001). "Važan zadatak početne nastave geometrije je razvijanje sposobnosti promatranja kojim se stječu perceptivno-predodžbeni materijal potreban za misaonu elaboraciju geometrijskih pojmova" (Markovac, 2001, str. 227) uz razvijanje mišljenja, pamćenja, pažnje i drugih intelektualnih sposobnosti koje su podloga i polazište za apstrahiranje i generaliziranje (Markovac, 2001).

Nastavna sredstva i pomagala u nastavi geometrije imaju veliku ulogu pri korištenju vizualnih, taktilnih i auditivnih osjetila kako bi učenicima potaknuli apstraktno mišljenje koje u toj dobi učenika nije na dovoljno visokoj razini kako bi usvojili nastavni sadržaj (Markovac, 2001). Kako bi nastavna sredstva i pomagala bila svrsishodna, potrebno je da ispunjavaju neke kriterije: ne smiju zamijeniti učenikovo mišljenje i trebaju poticati misaoni proces kod učenika (Markovac, 2001). Didaktički materijali trebaju biti kvalitetni i neutralni uz što manje obilježja kao što su boja, oblik, veličina, materijal i sl., prikladan za manipulaciju koja uz govornim reproduciranjem radnje razvija misaone aktivnosti (Markovac, 2001).

Možemo zaključiti kako nastava geometrije predstavlja izazov za učitelje i za učenika zbog svoje specifičnosti koja proistječe iz složenosti geometrijskih dostignuća kroz povijest matematike. Zato je potrebno jednostavne geometrijske pojmove promatrati kroz više obrazovnih ciklusa s različitih gledišta (Mammana, 1998). Geometrija je specifična zbog dokaza koji zahtijevaju visoku razinu mišljenja, apstrahiranja i generaliziranja, a sve to se razvija postupno kroz vrijeme i rad.

4. VAN HIELEOVE RAZINE MIŠLJENJA

Van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja razvili su Nizozemci Pierre van Hiele i Dine van Hiele-Geldof baveći se geometrijskim mišljenjem čime su dokazali kako se svaka osoba nalazi na određenoj razini geometrijskog mišljenja nevezano uz kronološku dob. Van Hielova teorija objašnjava zašto učenici imaju probleme tijekom nastave geometrije koji se najviše odnose na dokazivanje te nudi prijedlog kako metodički izbjeći probleme. U prvom ciklusu obrazovanja u području geometrije od učenika se ne zahtjeva matematičko dokazivanje pa to neće biti obuhvaćeno u ovom radu. Kako bi u kasnijem obrazovanju učenici bili uspješni u izvođenju dokaza, potrebno je uspješno proći određene razine razumijevanja koje je najprirodnije razviti kroz nastavu geometrije.

Van Hielova se "teorija bazira na ideji da postoji pet razina mišljenja kroz koje se prolazi na putu ka stjecanju sposobnost izvođenja formalnih dokaza te razumijevanja i geometrije koja ne pripada euklidskoj geometriji" (Cindrić i Vlasović, 2014, str. 40). Svaka razina donosi nova znanja koja je nemoguće usvojiti bez razumijevanja znanja s prethodne razine. Važno je napomenuti kako nije dovoljno samo reproducirati činjenice već je potrebno razumijevanje i percepcija određenog sadržaja. Kao što je već spomenuto, Van Hieleova teorija nudi razine geometrijskog razmišljanja koje su neovisne o dobi učenika, što znači da je moguće da se učenici prvog i trećeg razreda nalaze na istoj razini geometrijskog razmišljanja i obratno, učenici koji pohađaju isti razred mogu biti na različitim razinama mišljenja. Štoviše, postoje ljudi koji ostaju na prvoj razini razumijevanja usprkos što su se kroz školski sustav susretali s geometrijskim sadržajem (van Hiele, 1986). Razine geometrijskoga mišljenja prema van Hieleu prikazane su u Tablici 2.

Tablica 2: Razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleu (prema Čižmešija i sur., 2010., str. 148)

RAZINA	Objekt mišljenja	Proizvod mišljenja
0. VIZUALIZACIJA	Oblici i njihov izgled (čemu su nalik)	Klase ili grupe oblika koji "izgledaju slično"
1. ANALIZA	Klase oblika (umjesto pojedinačnih oblika s razine 0)	Svojstva geometrijskih oblika
2. NEFORMALNA DEDUKCIJA	Svojstva geometrijskih oblika	Odnosi među svojstvima geometrijskih oblika
3. DEDUKCIJA	Odnosi među svojstvima geometrijskih oblika	Deduktivni aksiomatski sustav geometrije (ravnine i prostora)
4. STROGOST	Deduktivni aksiomatski sustav geometrije	Usporedba različitih aksiomatskih sustava geometrije (euklidske i neeuklidske geometrije)

Nije moguće preskočiti razine mišljenja jer svaku karakteriziraju objekti o kojima učenik može misliti što rezultira proizvodom te razine mišljenja, a uspješno savladano mišljenje jedne razine nužan je preduvjet za sljedećom razinom mišljenja (Čižmešija Svedrec, Radović i Soucie, 2010). Prema Nastavnom okvirnom kurikulumu iz 2011. godine navedena su učenikova postignuća koja su u skladu s van Hieleovim razinama mišljenja. Preporuka metodičara matematike je da „učeničke aktivnosti svakako trebaju biti primjerene njihovoj van Hieleovoj razini i usmjerene njihovom podizanju u sljedeću višu razinu“ (Čižmešija i sur., 2010., str. 149).

U sljedećoj tablici prikazana su prve tri razine geometrijskoga mišljenja uz objekte i strukturu uz tipičan primjer učenikovog zaključivanja za svaku razinu (Tablica 3).

Tablica 3: Objekti i struktura geometrijskoga mišljenja na prve tri razine van Hieleove razine i primjeri zaključivanja učenika (Čižmešija i sur., 2010., str. 149)

	RAZINA 0 Vizualizacija	RAZINA 1 Analiza	RAZINA 2 Neformalna dedukcija
OBJEKTI GEOMETRIJSKOG RAZMIŠLJANJA	Pojedinačni likovi	Klase likova	Definicije klasa likova
STRUKTURA GEOMETRIJSKOG RAZMIŠLJANJA	Vizualno prepoznavanje imenovanje vizualno sortiranje	Prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa likova	Uočavanje i formuliranje logičkih odnosa među svojstvima
PRIMJERI	<i>Svi paralelogrami idu zajedno jer "izgledaju jednako". Pravokutnici, kvadrati i rombovi nisu paralelogrami jer "ne izgledaju kao paralelogram".</i>	<i>Paralelogram ima četiri stranice, nasuprotne kutove jednake, nasuprotne stranice jednake, nasuprotne stranice jednake, paralelne, dijagonale mu se raspolavljaju itd. Pravokutnik nije paralelogram jer pravokutnik ima kutove od 90° a paralelogram nema.</i>	<i>Jednakost nasuprotnih stranica povlači njihovu paralelnost. Paralelnost nasuprotnih stranica povlači njihovu jednakost. Jednakost nasuprotnih kutova povlači jednakost nasuprotnih stranica. Raspolavljanje dijagonala povlači simetriju pri rotaciji za 180°.</i>

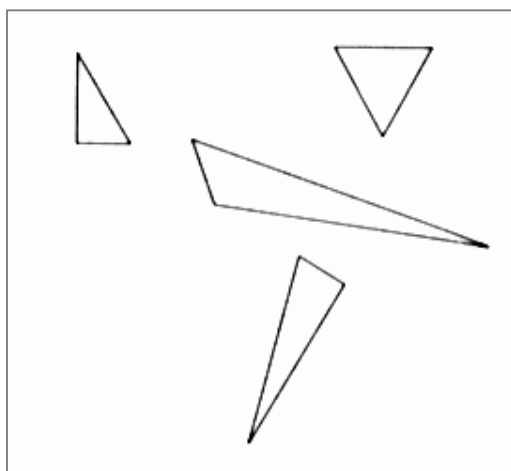
Kako bismo lakše prepoznali na kojoj razini mišljenja se nalazi učenik, može nam pomoću sljedeća tablica u kojoj je opis tipičnog geometrijskog ponašanja za prve dvije razine te pomoć u obliku didaktičkih metoda kako bi se podigla razina mišljenja (Tablica 4). Učenici nižih razreda osnovne škole su u većini slučajeva na nultoj razini, dok se većina učenika osmoga razreda nalazi na drugoj razini geometrijskog mišljenja, a tek su rijetki koji prelaze drugu razinu (Čižmešija i sur., 2010). Sukladno opsegu ovoga rada koji obuhvaća razrednu nastavu, slijedi prikaz nulte i prve razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleu.

Tablica 4: Tipično geometrijsko ponašanje učenika za prve dvije razine geometrijskog mišljenja i prilagodba didaktičkih metoda s ciljem podizanja razine mišljenja prema van Hieleu (prema Čižmešija i sur., 2010., 150.-152.).

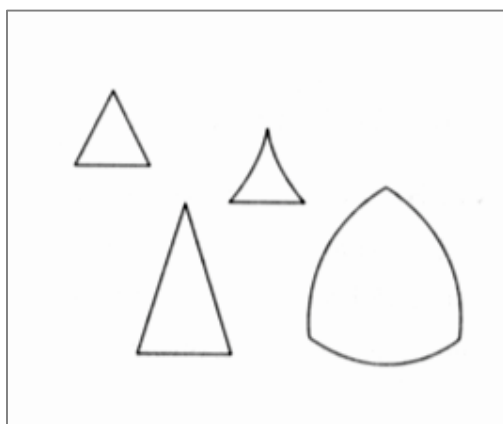
TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA	UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA
0. VIZUALIZACIJA	
<p>Učenici:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Često koriste nevažna vizualna svojstva (npr. boju) pri prepoznavanju likova te njihovu uspoređivanju, klasificiranju i opisivanju - Obično se pozivaju na vizualne prototipove likova i lako se zbunjuju orijentacijom lika (npr. kvadrat koji nije nacrtan u standardnom položaju ne prepoznaju kao kvadrat, trapez čije su paralelne stranice nacrtane vertikalno ne prepoznaju kao trapez) - Nisu sposobni pojmiti beskonačno mnogo varijacija određenog tipa lika (npr. u terminima njegove orijentacije i oblika) - Nekonzistentno klasificiraju likove (npr. koriste neuobičajena ili nevažna svojstva kao kriterije sortiranja likova) - Nepotpuno opisuju (definiraju) likove tako što nužno uvijete (često vizualne) smatraju i dovoljnima 	<p>U nastavu treba uključiti dovoljno:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Učeničkih aktivnosti s mnogo sortiranja i klasificiranja - Raznolikih primjera oblika kako njihove nebitne osobine ne bi previše dobile na važnosti - Prilika da učenici crtaju, izgrađuju, sastavljaju i rastavljaju dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike - Učeničkih aktivnosti koje se fokusiraju na specifične osobine ili svojstva oblika kako i učenici razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti

1. ANALIZA	
<p>Učenici:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Eksplicitno uspoređuju likove u terminima njihovih bitnih svojstava - Izbjegavaju inkluzije među različitim klasama likova (npr. kvadrate i pravokutnike smatraju disjunktним klasam, kao i paralelograme i trapeze) - Sortiraju likove s obzirom na samo jedno svojstvo (npr. s obzirom na svojstva stranica, dok svojstva poput simetrije, kutova i dijagonala ignoriraju) - Za opisivanje (definiranje) likova neekonomično koriste sva njihova svojstva umjesto samo dovoljnih - Eksplicitno odbijaju definicije koje daju drugi ljudi (npr. učitelj, udžbenik) i prednost daju definicijama koje su sami smislili - Smatraju da je empirijska provjera (npr. skica, nekoliko mjerenja ili primjera) dovoljno za utvrđivanje istinitosti tvrdnje 	<p>U nastavi treba:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Osmisliti dovoljno učeničkih aktivnosti fokusiranih na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje - Prepoznati i iskoristiti činjenicu da uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste broj svojstava oblika - Ideje primjenjivati na cijele klase oblika (npr. svi četverokuti, sve prizme), a ne na pojedinačne modele - Nova svojstva uočavati analizom klasa oblika (npr. pronaći načine na koje se trokuti mogu sortirati u grupe i na temelju tih grupa definirati vrste trokuta) - Koristiti program dinamične geometrije

Učenici koji se nalaze na nultoj razini geometrijskog mišljenja, odnosno vizualizaciji, najčešće donose pogrešne zaključke koji su temeljeni na vizualnoj percepciji na temelju kojih dolaze do geometrijski pogrešnih odgovora. Tako npr. neki učenici na Slici 16. likove prepoznaju kao trokute, dok za likove sa Slike 17. tvrde da nisu trokuti, već tvrde da im likovi izgledaju "trokutasto" (Cindrić i Vlasnović, 2014).

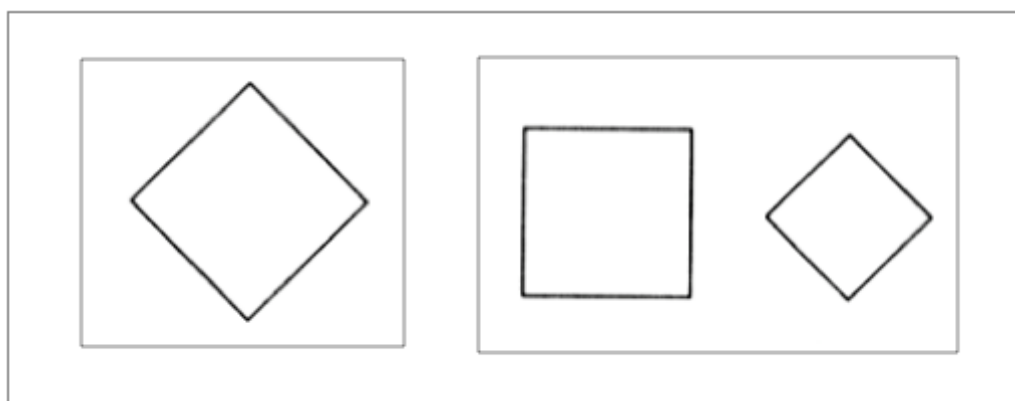


Slika 16.: Učenici na razini vizualizacije prikazane likove percipiraju kao trokute (Cindrić i Vlasnović, 2014., str. 42).



Slika 17.: Učenici na razini vizualizacije prikazane likove ne percipiraju kao trokute (Cindrić; Vlasnović, 2014., str. 42).

Učenici koji su na razini vizualizacije također ne vide da je kvadrat i dalje kvadrat iako je zarotiran za 45° oko sjecišta dijagonala (Slika 18).



Slika 18.: Kvadrat koji prema holističkom razmišljanju učenika nije kvadrat (lijevo) te slike kvadrata koje dijete u analitičkoj fazi smatra kvadratima (desno) (Cindrić i Vlasnović, 2014., str. 43).

Učenici koji su na razini vizualizacije najčešće se oslanjaju na ono što vide pa ih to sprječava u geometrijskom promišljanju i zaključivanju te možemo reći da vjeruju samo onome što vide. S druge strane, učenici koji su na razini analize prepoznaju oblike, iako su u drugačijim smjerovima od uobičajenog prikaza nekog geometrijskog lika. Kada je u pitanju opisivanje i nabrojavanje karakteristika nekog četverokuta, tu nemaju problema te su sposobni nabrojati sva svojstva nekog lika, međutim, ne

povezuju da su neki četverokuti pod klase, odnosno nad klase; ovisno iz kojeg smjera promatramo kvadrat, pravokutnik, romb i paralelogram (Cindrić i Vlasnović, 2014).

5. WITTMANNOVE FUNDAMENTALNE IDEJE U PRAKSI

Spomenute promjene koje su se događale u nacionalnim matematičkim kurikulumima u posljednjih nekoliko desetljeća, a koje obuhvaćaju smanjenje geometrijskih tema u nastavi, bile su povod za ispitivanje koje će se prikazati u ovom radu. Do sada je u ovom radu prikazan povijesni pregled nastave geometrije, kurikularni dokumenti, preporuke od strane ICMI-ja, Wittmannove fundamentalne ideje u geometriji te razine geometrijskog mišljenja (van Hiele), a sve sa ciljem razvijanja matematičke kompetencije i geometrijskog mišljenja kod učenika. Literatura koja se pritom spominje se odnosi na stavove odraslih o ovom pitanju. No, postavlja se pitanje kako zaista izgleda realizacija nastavnog programa iz geometrije i koje fundamentalne ideje su realizirane u nastavi. Pritom je zanimljivo vidjeti i kako učenici vide nastavu geometrije, tj. njihovu stranu.

5.1. Dječji crteži kao dio instrumenta za prikupljanje podataka

Odgovore na prethodna pitanja potražili smo u crtežima učenika koji su prikazali kako izgleda njihova tipična nastava geometrije. Osim uobičajenih metoda za prikupljanje podataka poput anketa, intervjua, promatranja i slično, jedan od načina je i analiza dječjih crteža. Crtež je pouzdan način kod mlađih ispitanika kako bi se ispitalo njihovo dosadašnje iskustvo (Einarsdóttir, 2007) te je djeci prirodno izražavati se crtanjem. Učenike se može pomoću ankete ispitati i saznati informacije, međutim, pokazalo se da u tim slučajevima djeca imaju tendenciju kratko odgovarati na pitanja koja oni smatraju nebitnima (Hannula, 2007) te se stoga često ne dolazi do točnih i traženih informacija. Nadalje, ispitanici u ovom istraživanju su relativno mali te nemaju svi dovoljno razvijen i obogaćen vokabular kako bi se nesmetano i jasno izrazili, što je još jedan razlog više za ispitivanje pomoću crteža. Do sada su već provedena istraživanja u kojima su se koristili učenički crteži vezano uz nastavu matematike te su bila vrlo uspješna (npr. Halverscheid 2006, 2007; Laine i sur., 2013; 2015).

5.2. Cilj i uzorak istraživanja

Cilj ovog istraživanja je uvid u nastavu geometrije u Hrvatskoj kroz Wittmannove fundamentalne ideje. Pritom se koristila analiza dječjih crteža te intervjui s učenicima.

Istraživanje je obuhvatilo 251 učenika drugih, trećih ili četvrtih razreda osnovne škole. Ukupan broj ispitanika drugih razreda bio je 93, trećih 82 i četvrtih 76. Istraživanje je provedeno u 2018. godini, a uzorci su prikupljeni u veljači 2017. godine iz raznih regija Hrvatske. Studenti četvrte godine Učiteljskog fakulteta u Zagrebu dobili su zadatak ispitati po dva učenika po vlastitom odabiru, uvjet je bio da učenici pohađaju drugi, treći ili četvrti razred osnovne škole. Studenti su ispitivali učenike u vrijeme stručne pedagoške prakse koja se održava krajem veljače akademske godine 2016./2017. Mnogi studenti stručnu pedagošku praksu su provodili u mjestima gdje žive te su iz tih mjesta bili i ispitanici, što je ujedno razlog zašto imamo ispitanike iz različitih dijelova Hrvatske.

5.3. Instrument istraživanja

Istraživanje se temelji na analizi dječjih crteža prema zadanom instrumentariju i metodologiji. Učenici su ispitivani pomoću crteža na kojem su nacrtali tipični sat geometrije, a kasnije je proveden intervju s istim ispitanicima. Kao poticaj su imali tzv. Ana-pismo (prema Dohrmann i Kuzle, 2014) (Slika 19) u kojem se od učenika tražilo da crtežom detaljan tipični sat geometrije.

Dragi/a _____,
ja se zovem Ana i nova sam učenica u tvom razredu. Ovim pismom htjela bih upoznati moj novi razred. Na slici nacrtaj svoj razred kada se bavite geometrijskim likovima i tijelima, nacrtaj nastavnika i učenike u razredu.

Koristi oblačiće kako bi opisao/la razgovor i razmišljanja učenika i nastavnika. Ne zaboravi nacrtati i sebe u razredu! Pokraj sebe napiši JA.

Puno ti hvala i radujem se skorašnjem susretu!
Tvoja Ana

Slika 19.: Ana-pismo (prema Dohrmann i Kuzle, 2014)

Ispitanom učeniku se nisu davale smjernice tijekom crtanja te mu se nisu postavljala dodatna pitanja, a vrijeme za crtanje nije bilo ograničeno. Po završetku crteža učeniku je postavljeno nekoliko pitanja na koja je mogao pismeno samostalno odgovoriti ili, ako je učenik usmeno odgovarao na pitanja, intervju se zabilježio zvučnim zapisom te je naknadno rađena transkripcija intervjuja. Pitanje koje se učenicima postavilo na intervjuu je da opišu što su nacrtali. Pitanje je otvorenog tipa,

bez sugeriranja odgovora. Ovim pitanjem smo htjeli od učenika dobiti verbalizaciju onoga što je nacrtao i što je pod time mislio. Pitanje je također služilo kao dodatni izvor podataka za procjenu valjanosti i dosljednosti dobivenih rezultata.

5.4. Postupak istraživanja

Učenici su dobili Ana-pismo koje su samostalno ili uz pomoć studenta pročitali. Zatim je vremenski neograničeno započelo crtanje tipičnog sata geometrije. Učeniku se nisu postavljala dodatna tijekom crtanja. Po završetku crtanja uslijedio je polustrukturirani intervju koji se sastojao od pitanja na koje je učenik usmenim ili pisanim putem odgovarao. U slučaju da je učenik usmeno odgovarao na postavljena pitanja, napravio se zvučni zapis te je poslije uslijedio transkript zapisa. Učenik je trebao objasniti što je prikazao na crtežu.

U trećem mjesecu 2017. godine, po završetku istraživanja, svi instrumenti su prikupljeni i sortirani po razredima. Neovisno iz kojeg su dijela Hrvatske, instrumenti su bili sortirani u drugi, treći i četvrti razred.

U ovom istraživanju naglasak je stavljen na pitanje koje fundamentalne ideje, koje su prema nastavnom programu (MZOS, 2006) propisane, su najviše zastupljene u nastavi prema crtežima učenika. Temelj za fundamentalne ideje preuzet je iz Wittmannovog koncepta (Wittmann, 1999) prikazanog u ovom radu u poglavlju br. 3.1.

Osim navedenih fundamentalnih ideja, dodatno su se ciljano promatrala nastavna sredstva i pomagala: je li prikazana slika geometrijskog lika ili tijela na ploči ili plakatu, ima li geometrijskih modela, javlja li se 3D problematika (kada je prikazan trodimenzionalni objekt na ploči ili plakatu, a nema modela) te geometrijski pribor i kod učitelja i kod učenika. Ti elementi su prikazani u Tablici 5.

Tablica 5. Nastavna sredstva i pomagala

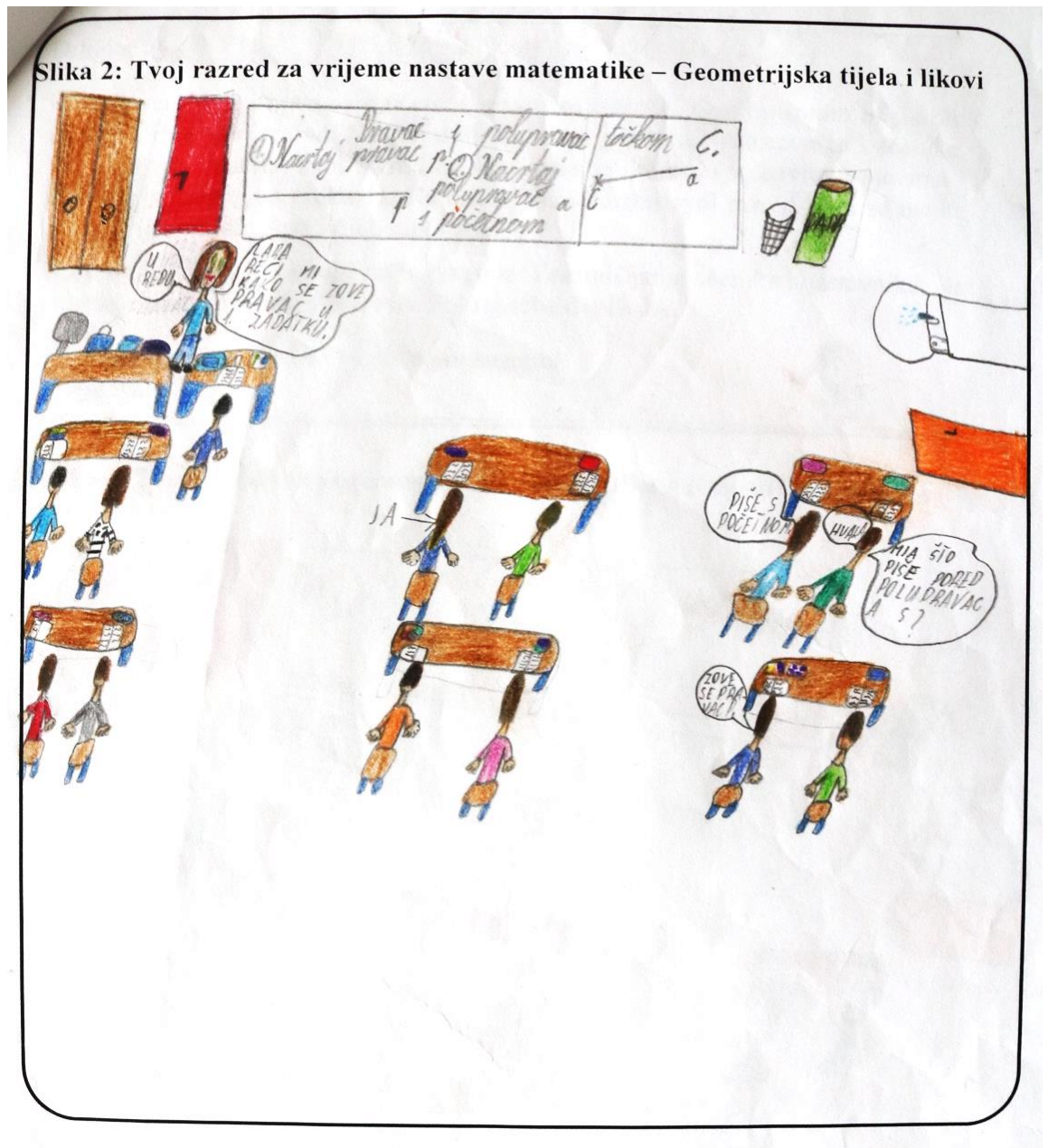
		Broj ponavljanja	U postotku
Nastavna sredstva i pomagala	Slika je na ploči/bilježnici (2D, 3D)		
	Geometrijski modeli		
	3D problematika: ima geometrijski tijela na ploči, a nema modela		
	Geometrijski pribor	učenik učitelj	

5.5.Primjeri analize dječjeg crteža

Učenik trećega razreda (Slika 20.) prikazao je svoj tipičan sat geometrije. Prema Wittmanu promatrane su fundamentalne ideje iz geometrije koje možemo uočiti na crtežu:

- Jednodimenzionalni objekti: pravac, polupravac
- Svojstva objekata: polupravac a s početnom točkom u C

Posebno se promatraju nastavna sredstva i pomagala, vidi se da se rade jednodimenzionalni objekti pa ne vrednujemo *Slika na ploči ili bilježnici (2D / 3D)*, *geometrijski model i 3D problematika*. Vidljivo je da učenik i učitelj nemaju pribor za crtanje te s toga ne vrednujemo, odnosno ne dodjeljujemo im bodove.



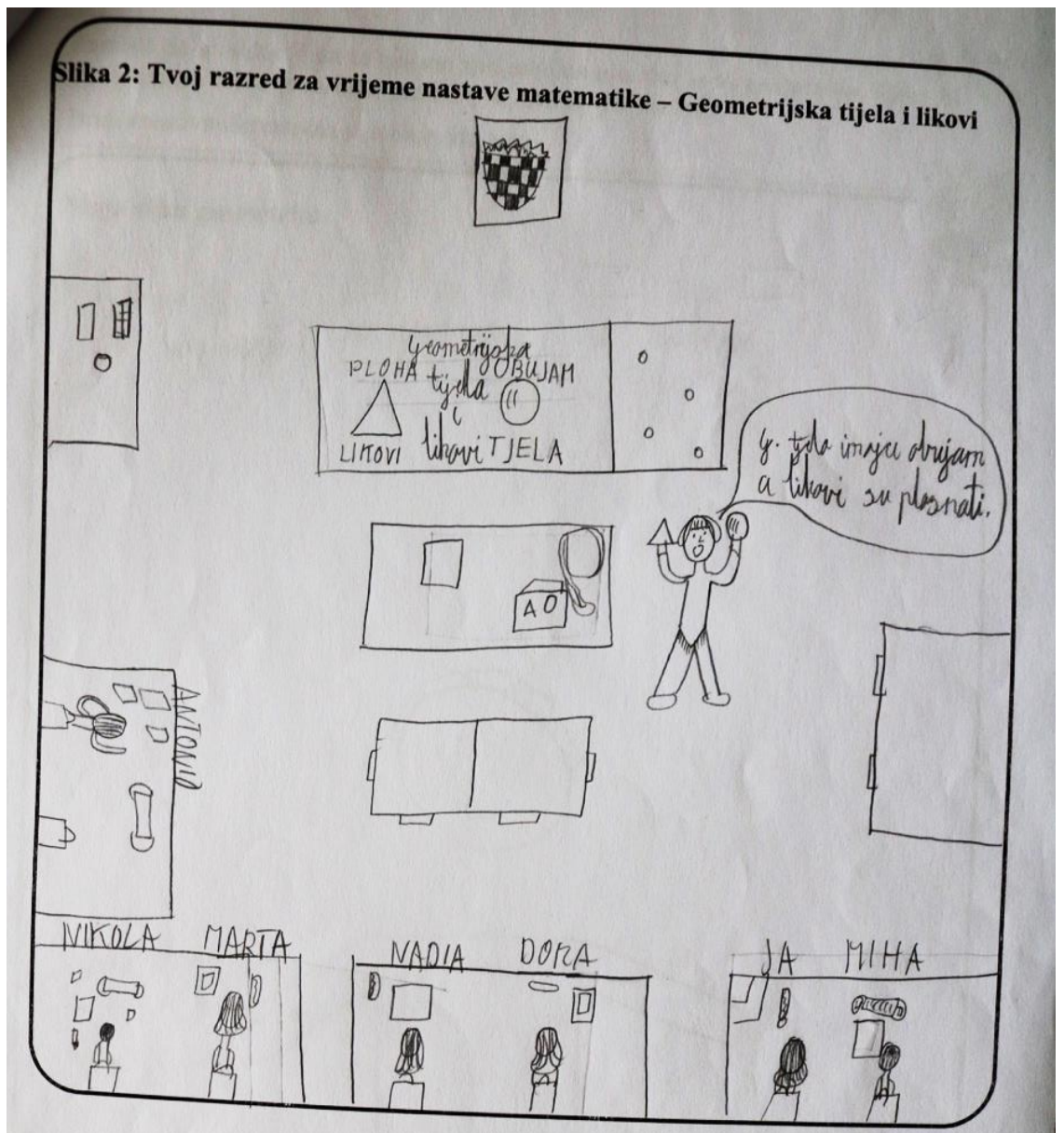
Slika 20.: Prikaz tipičnog sata nastave geometrije, 3. razred

Drugi učenik čiji će crtež i njegovo vrednovanje biti prikazan ide u četvrti razred i također je prikazao svoj tipičan sat geometrije (Slika 21).

Od fundamentalnih ideja prema Wittmannu prisutne su na slici:

- Dvodimenzionalni objekti: geometrijski likovi, trokut
- Trodimenzionalni objekti: geometrijska tijela, kugla
- Predmeti iz svakodnevne uporabe: kutija s geometrijskim likovima i tijelima (izvor- intervju), globus
- Svojstva objekata: "tijela imaju obujam, a likovi su plosnati"

Posebno se promatraju nastavna sredstva i pomagala te uočava kako se u nastavi rade geometrijske likove i tijela, učitelj u rukama drži geometrijske modele te tako poštuje načelo zornosti i pridonosi kvalitetnijem razumijevanju onoga o čemu govori. Iz navedenih razloga nastavni sat vrednujemo *Slika na ploči 2D / 3D i Geometrijski model* te ne javlja se *3D Problematika* jer učenici vide trodimenzionalni model u rukama učitelja te na ploči u 2D prikazu. Pribor kod učitelja i učenika nije prikazan pa ih ne možemo vrednovati.



Slika 21.: Tipičan sat nastave geometrije, 4. razred

5.6. Rezultati fundamentalnih ideja u nastavi geometrije

U sljedećim tablicama nalaze se prikazi rezultata za fundamentalne ideje koje su prisutne na nastavi geometrije u drugom, trećem i četvrtom razredu kod ispitanih učenika. U prvom stupcu u tablici se nalaze apsolutne frekvencije koje označavaju koliko se puta određena fundamentalna ideja pojavila u promatranom razredu, a u drugom stupcu relativne frekvencije - koliko je to u postotku u odnosu na razred u kojem se fundamentalna ideja promatra. Slijedi prikaz po razredima: drugi razred (Tablica 6), treći razred (Tablica 7) i četvrti razred (Tablica 8).

Tablica 6. Prikaz rezultata fundamentalnih ideja u nastavi geometrije u drugom razredu

Prikazane fundamentalne ideje	2.r (ukupan broj ispitanika 93)	U postotku
Nul-dimenzionalni objekti	0	0 %
Jednodimenzionalni objekti	18	19 %
Dvodimenzionalni objekti	72	77 %
Geometrijska tijela	26	28 %
Geometrijska svojstva	30	32 %
Pribor za crtanje	19	20 %
Predmeti iz svakodnevne uporabe	1	1 %
Mjerenje dužine	1	1 %
Mjerenje opsega	0	0 %
Mjerenje površine	0	0 %
Mjerenje volumena	0	0 %

Rezultati prikazuju kako se u dvije trećine crteža (77 %) ispitanih učenika drugog razreda prikazuju dvodimenzionalni objekti, odnosno geometrijski likovi. To znači da najviše učenika upravo njih vidi kao sadržaje tipične nastave geometrije.

Zatim na svakom trećem (32 %) crtežu možemo uočiti kako učenici vide tipični sat geometrije na kojem rade geometrijska svojstva, a odmah iza njih u nešto manjem postotku (28 %) prikazuju se geometrijska tijela. Možemo primijetiti kako se predmeti iz svakodnevnog uporabe spominju samo jednom (1 %).

Tablica 7. Prikaz rezultata fundamentalnih ideja u nastavi geometrije u trećem razredu

Prikazane fundamentalne ideje	3. r (ukupan broj ispitanika 82)	U postotku
0-dimenzionalni objekti	0	0 %
Jednodimenzionalni objekti	23	28 %
Dvodimenzionalni objekti	54	66 %
Geometrijska tijela	18	22 %
Geometrijska svojstva	29	35 %
Pribor za crtanje	9	11 %
Predmeti iz svakodnevnog uporabe	1	1 %
Mjerenje dužine	1	1 %
Mjerenje opsega	0	0 %
Mjerenje površine	0	0 %
Mjerenje volumena	0	0 %

Rezultati prikazuju kako se na dvije trećine crteža (66 %) ispitanih učenika trećih razreda prikazuju dvodimenzionalni objekti, odnosno geometrijski likovi. Nadalje, svaki treći crtež (35 %) prikazuje geometrijska svojstva i jednodimenzionalne objekte (28 %). Predmeti iz svakodnevnog uporabe se samo na jednom crtežu (1 %) prikazuju.

Tablica 8. Prikaz rezultata fundamentalnih ideja u nastavi geometrije u četvrtom razredu

Prikazane fundamentalne ideje	4.r (ukupan broj ispitanika 76)	U postotku
Nul-dimenzionalni objekti	0	0 %
Jednodimenzionalni objekti	6	8 %
Dvodimenzionalni objekti	62	82 %
Geometrijska tijela	22	29 %
Geometrijska svojstva	20	26 %
Pribor za crtanje	16	21 %
Predmeti iz svakodnevne Uporabe	1	1 %
Mjerenje dužine	1	1 %
Mjerenje opsega	1	1 %
Mjerenje površine	1	1 %
Mjerenje volumena	0	0 %

Rezultati u Tablici 8. prikazuju kako se na više od četiri petine (82 %) ispitanih učenika mogu vidjeti dvodimenzionalni objekti, na jednoj trećini geometrijska tijela (28 %) i geometrijska svojstva (26 %), a svaki peti (21 %) crtež prikazuje pribor za crtanje kod učenika ili učitelja. Predmeti iz svakodnevne uporabe, mjerenje dužine, opsega i površine prikazuju se samo jednom (1 %).

Rezultati pokazuju kako se ni na jednom prikazu tipičnog sata geometrije ne prikazuju točke zasebno već kao svojstvo nekog objekta. Prema rezultatima možemo zaključiti kako se u nastavi geometrije u drugom, trećem i četvrtom razredu najviše prikazuju dvodimenzionalni objekti, odnosno geometrijski likovi, zatim slijede geometrijska svojstva, geometrijska tijela i pribor za crtanje. Najrjeđe su prikazivani predmeti iz svakodnevne uporabe, mjerenje dužine, opsega ili površine i to na svega nekoliko crteža.

5.7. Nastavna sredstva i pomagala u nastavi geometrije

Prikaz rezultata nastavnih sredstava i pomagala tijekom nastave geometrije donose sljedeće tablice (Tablica 9, Tablica 10 i Tablica 11) po razredima.

Tablica 9. Prikaz rezultata nastavnih sredstava i pomagala tijekom nastave geometrije u drugom razredu

		Broj ponavljanja	U postotku (ukupan broj ispitanika 93)
Nastavna sredstva i pomagala	Slika je na ploči/bilježnici (2D, 3D)	79	85 %
	Geometrijski modeli	7	8 %
	3D problematika: ima geometrijski tijela na ploči, a nema modela	20	22% (76 %)
	Geometrijski pribor	učenik učitelj	10 9

Iz Tablice 9 vidljivo je kako se u drugom razredu često (85 %) prikazuje slika geometrijskog lika ili tijela na nastavi geometrije, dok se u svega 8 % prikazuje konkretan geometrijski model (npr. trodimenzionalni model kocke, kvadra kao sredstvo za učenje geometrije prostora). Ono što još više dolazi do izražaja je 3D problematika: u tri četvrtine crteža (76 %) kada učenici rade geometrijska tijela prisutne su slike na ploči, a nema modela tog geometrijskog tijela kako bi učenici vidjeli kako izgleda to tijelo u prostoru, već je nacrtana samo njegova slika u kosoj projekciji na ploči. Ako se promatra prisutnost geometrijskih modela u nastavi nevezano radi li se na satu geometrijsko tijelo ili ne, tada je zastupljenost modela nešto veća, odnosno na svakom petom (22 %) prikazanom satu nedostaje geometrijski model uz sliku geometrijskog tijela. Također, na crtežima nema mnogo prikazanog geometrijskog pribora u nastavi geometrije jer je on nacrtan da se koristi na nastavi na svakom desetom crtežu.

Tablica 10. Prikaz rezultata nastavnih sredstava i pomagala tijekom nastave geometrije u trećem razredu

		Broj ponavljanja	U postotku (ukupan broj ispitanika 82)	
Nastavna sredstva i pomagala	Slika je na ploči/bilježnici (2D, 3D)	57	70 %	
	Geometrijski modeli	10	12 %	
	3D problematika: ima geometrijski tijela na ploči, a nema modela	17	21 % (94 %)	
	Geometrijski pribor	učenik	2	2 %
		učitelj	9	11 %

Iz Tablice 10 rezultati pokazuju kako se u trećem razredu na više od dvije trećine crteža (70 %) prikazuje slika geometrijskih likova ili tijela, a geometrijskih modela ima nešto više u trećem razredu nego u drugom. U trećem razredu dolazi do izražaja 3D problematika kada se učenici susreću s geometrijskim tijelima koji su prikazani na ploči u kosoj projekciji, a nemaju trodimenzionalan model tog tijela u razredu i to se ponavlja na gotovo svakom (94 %) prikazu nastave geometrije. Ako se promatra prisutnost geometrijskog modela u nastavi, bez obzira radi li se geometrijska tijela ili ne, tada je zastupljenosti geometrijskih modela više prisutna, odnosno na svakom petom (21 %) prikazu sata nedostaje geometrijski model uz sliku geometrijskog tijela. Geometrijski pribor je na svakom desetom (11 %) crtežu prikazan kod učitelja, a pet puta manje, odnosno svega 2 % kod učenika.

Tablica 11. Prikaz rezultata nastavnih sredstava i pomagala tijekom nastave geometrije u četvrtom razredu

		Broj ponavljanja	U postotku (ukupan broj ispitanika 76)	
Nastavna sredstva i pomagala	Slika je na ploči/bilježnici (2D, 3D)	63	83 %	
	Geometrijski modeli	10	13 %	
	3D problematika: ima geometrijski tijela na ploči, a nema modela	11	15 % (50 %)	
	Geometrijski pribor	učenik	13	17 %
		učitelj	11	15 %

Četvrti razred ima do sada najveći broj prikazanih crteža / slika dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata na nastavi geometrije, na 83 % crteža. Geometrijski modeli se mogu pronaći na 13 % crteža. Ni četvrti razred nije zaobišla 3D problematika kada se govori o geometrijskim tijelima u razredu: kad se radi geometrija prostora, nedostaju modeli tih geometrijskih tijela, i to na svakom drugom (50 %) prikazu takvog sata geometrije. Ako se promatra prisutnost geometrijskih modela na nastavi geometrije bez obzira radi li se na satu geometrijska tijela ili ne, tada na gotovo svakom sedmom (15 %) prikazu sata geometrije nedostaje prikaz geometrijskog modela. Učenikov geometrijski pribor je prikazan u 17 % slučajeva, a učitelj nešto rjeđe na slikama koristi geometrijski pribor, na 15 % prikaza sata.

U drugom, trećem i četvrtom razredu najviše se ističu podatci vezani uz 3D problematiku kada se učenici susreću s geometrijskim tijelima na crtežu, a nemaju priliku vidjeti model to geometrijsko tijelo u razredu. Zatim slijedi geometrijski pribor koji je vrlo malo zastupljen na slikama tipične nastave geometrije ispitanika te se u prosjeku može vidjeti na svakom desetom crtežu. Rezultati prikazuju vrlo nisku zastupljenost geometrijskih modela i geometrijskog pribora na nastavi geometrije neovisno o razredu koji se promatra.

5.8. Diskusija

Na temelju rezultata istraživanja fundamentalnih ideja u tipičnoj nastavi geometrije prema dječjim crtežima, možemo zaključiti kako se pred ispitane učenike stavlja zahtjev od samo dvije fundamentalne Wittmannove ideje od mogućih sedam, a ni te dvije nisu u potpunosti realizirane. Na taj način je prikazana prilično uska slika učenika o geometriji i nastavi geometrije.

Na temelju provedenog istraživanja može se zaključiti kako učitelji izvode nastavu prema nastavnome programu, ali uočeni su i neki zanimljivi momenti i nelogičnosti koje su učenici prikazali kao tipične elemente svojih sati geometrije.

Rezultati prikazuju da učenici svoj tipičan sat geometrije vide kao rješavanje zadataka i frontalnu nastavu bez upotrebe geometrijskog pribora koji je vrlo malo prikazivan i kod učitelja i kod učenika (u prosjeku 10 %). Geometrija zahtijeva urednost, preciznost i točnosti u crtanju, mjerenju i označavanju, a geometrijski pribor uvelike olakšava i omogućava prethodno navedene zahtjeve geometrije (Markovac, 2001).

Sljedeće što bi učenicima pomoglo u razumijevanju, shvaćanju i učenju geometrije su modeli (Markovac, 2001), koji su prema ovom istraživanju u velikom deficitu u nastavi, svega 10 % su zastupljeni na crtežima u istraživanoj populaciji. Geometrija je prisutna u svakodnevici od davnina, a u ovome istraživanju se koriste predmeti iz svakodnevne uporabe siromašnih 1 % što je uistinu zabrinjavajuće s obzirom na dugogodišnju povijest i prisutnost geometrije u svakodnevici.

Rezultati istraživanja pokazuju kako u nastavi geometrije nedostaju geometrijski modeli prilikom poučavanja o geometrijskim tijelima što dugoročno gledajući rezultira nerazumijevanjem geometrije prostor i nemogućnosti apstrahiranja, a samim time se ne potiče geometrijsko mišljenje. Uz prethodno navedeno bitno je istaknuti kako se ni u udžbenicima kroz zadatke ne potiče razvijanje geometrijsko mišljenje na višim razinama (Kovačević, 2016). Bitno se pridržavati načela zornosti koje učenicima omogućuje da uistinu i vide trodimenzionalni model onoga tijela kojeg uče kako bi bolje razumjeli geometrijski koncept koji se uči.

Za izradu mnogih geometrijskih modela nije potrebna velika vremenska ni financijska priprema jer geometrija nas okružuje, živimo u njoj i s njom. Pogledamo li učionicu, možemo primijetiti kako je u njoj puno geometrijskih likova i tijela, iako možda nisu na prvi pogled uočljivi zbog boje ili materijala od kojega su napravljeni. Tako u učionici možemo pronaći geometrijske likove u ploči, prozorima, vratima, pločicama/parketu, stolovima, panoima i mnogim drugim stvarima. Geometrijska tijela su prisutna u spužvi, kredi, pernicama, školskim torbama, kutijama, loptama, knjigama, raznim dječjim igračkama i ostalom bogatom sadržaju u učionici. To nisu jedni modeli, postoje i oni koje učenici mogu sami napraviti, a nastavnici osmisliti aktivnosti. U nastavku rada slijede prijedlozi aktivnosti i modela koje je moguće implementirati u nastavu.

6. PRIJEDLOZI AKTIVNOSTI I ZADATAKA IZ GEOMETRIJE

Kao što je već rečeno u poglavlju 3.4, istraživanja su pokazala kako zadatci u nastavi geometrije u Hrvatskoj zahtijevaju jednostavnije procedure i postupke, a tek u manjoj mjeri ostavljaju prostora istinskom geometrijskom promišljanju, matematičkom argumentiranju i razumijevanju geometrijskih pojmova, a zadatci iz geometrije svode se na algebarske izraze i računanje po formulama (Glasnović Gracin, 2011; 2018). Geometrijsko mišljenje je posebno potrebno poticati u osnovnoškolskom dobu kako bi kasnije u daljnjem obrazovanju mogli usvajati i razumjeti apstraktnije i zahtjevnije sadržaje. Stoga je važno učenicima prikazati geometriju kroz razne aktivnosti, otvorene tipove zadataka koji omogućavaju divergentno mišljenje i dolaženje do rješenja.

U ovome dijelu rada slijede primjeri aktivnosti i zadataka koji potiču učenika na geometrijsko mišljenje prema van Hieleovim razinama koje su prisutne u razrednoj nastavi, a nadopunjavaju se na Wittmannove fundamentalne ideje u geometriji koje nisu obuhvaćene nastavnim programom (MZOS, 2006).

6.1. Aktivnosti i zadatci za učenike koji su na vizualnoj razini geometrijskog mišljenja

Kako bi se potaknulo geometrijsko razmišljanje kod učenika koji su na vizualnoj razini potrebno je mnogo aktivnosti koje će i pomoći u razumijevanju klasifikacije i opisivanju nekih geometrijskih objekata. Tako, na primjer, moguće je provesti neke od sljedećih aktivnosti i zadataka.

Kako bi se izbjeglo prepoznavanje geometrijskih tijela prema boji, što je nevažan element i kriterij za klasifikaciju u nastavi matematike, moguće je za učenike prvog razreda koji se još nisu susretali sa svojstvima likova (vrh, strana, brid i sl.) izvesti sljedeću aktivnost.

Aktivnost 1: U crnoj platnenoj vrećici nalaze se geometrijska tijela. Svi učenici sjede na svojim mjestima, a pred razred dolazi jedan učenik koji ne smije gledati u vrećicu već samo zavrću jednu ruku u vreću i prema osjetu opipa prepoznati o kojem geometrijskom tijelu se radi. Može reći ima li ravnu ili zakrivljenu plohu, a ostali učenici na temelju toga mogu nabrojati koja geometrijska tijela na temelju ravnih ili

zakrivljenih ploha mogu biti. Nakon što izrekne koje je geometrijsko tijelo prema njegovom mišljenju u vreći, izvlači ga van i provjerava se točnost učenikovog odgovora.

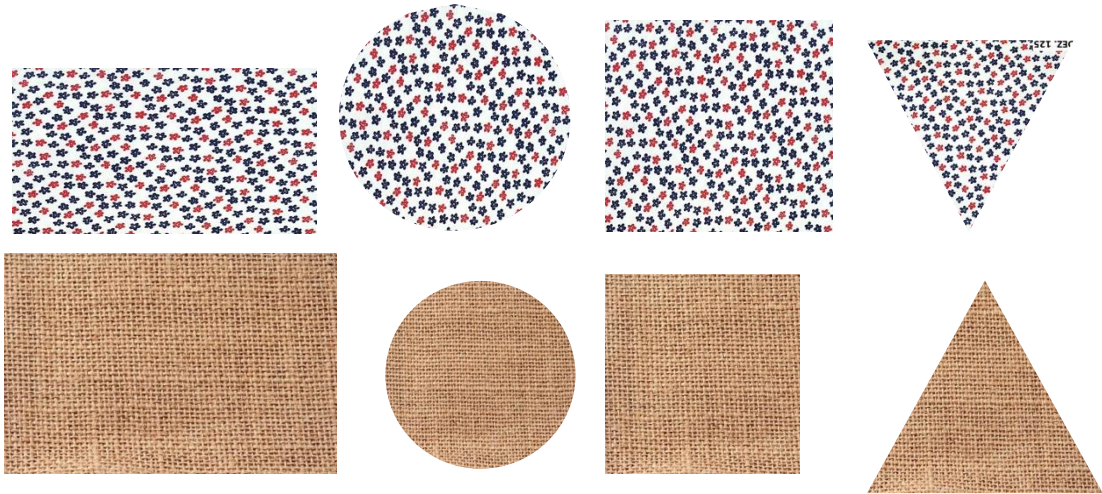
Ovom aktivnošću učenici nemaju pristup osjetu vida koji ih često sputava u klasificiranju objekata. Moguće je da u vreći bude više geometrijskih tijela koja mogu biti različita ili ista.

Za učenike koji se nalaze na vizualnoj razini geometrijskog razmišljanja, a učili su s koliko ploha je omeđen kvadar, kocka, piramida, kugla ili valjak, mogu provesti aktivnost sličnu prethodnoj, ali uz malu dopunu. Kada učenik opisuje kakve su plohe, ravne ili zakrivljene, može reći koliko ploha ima to geometrijsko tijelo. Ostali učenici pišu u tišini odgovor u bilježnice ili dižu papiriće na kojima je napisan naziv geometrijskog tijela nakon što je učenik koji je pred razredom rekao svoje rješenje. Napomena: kod valjka obavezno naglasiti da ima jednu zakrivljenu i dvije ravne plohe.

Kako bi se izbjeglo pridavanje važnosti boji i materijalu od kojega je napravljeno geometrijsko tijelo ili lik, s učenicima se može provesti sljedeća aktivnost.

Aktivnost 2: Svaki učenik treba imati jedan geometrijski lik ili tijelo (preporuča se odvojeno raditi likove i tijela zajedno radi boljeg razumijevanja) načinjeno od papira ili nekog drugog materijala. Kako bi shvatili da boja ili materijal nisu ključ klasifikacije pred njih se stavlja zadatak da geometrijski lik ili tijelo oboje u neku boju (bojice ili tempere ili geometrijska tijela zamotaju u ukrasni papir). Ako rade u grupama potrebno je da svaki učenik ima različito geometrijsko tijelo ili lik u grupi te istu boju ili isti ukrasni papir, grupe da se međusobno razlikuju po boji ili ukrasnome papiru. Po završetku mijenjanja vanjštine geometrijskim tijelima ili likovima učenici trebaju doći do zaključka kako svi učenici u grupi imaju različite geometrijske objekte, ali istu boju ili ukrasni papir (Slika 22). Zatim se trebaju učenici koji imaju isti geometrijski objekt pronaći i stati zajedno te uočiti kako sada imaju iste geometrijske objekte, ali u različitim bojama ili ukrasnim papirima te da nije važno koja je boja ili papir jer geometrijsko tijelo ili lik je uvijek istog oblika.

Preporuča se dati učenicima geometrijska tijela i likove različitih veličina kako bi uočili da je dimenzija također faktor koji ne utječe na kvalifikaciju.



Slika 22.: Različiti geometrijski likovi, ali od istog ukrasnog papira


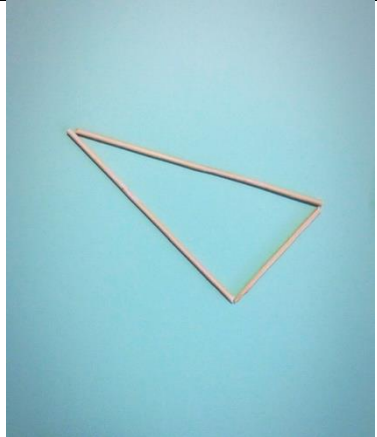


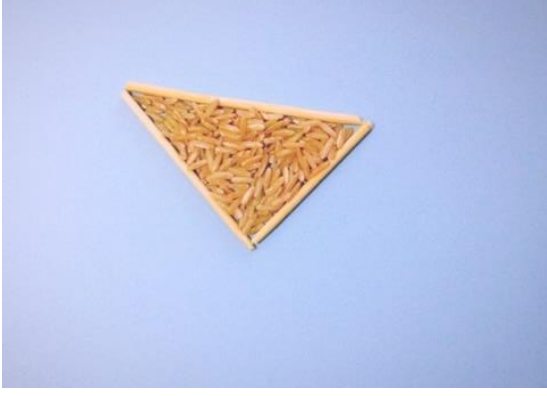
Kako bi učenici prepoznali o kojem geometrijskome liku se radi, a da pri tome ne gledaju pomoći će sljedeća aktivnost.

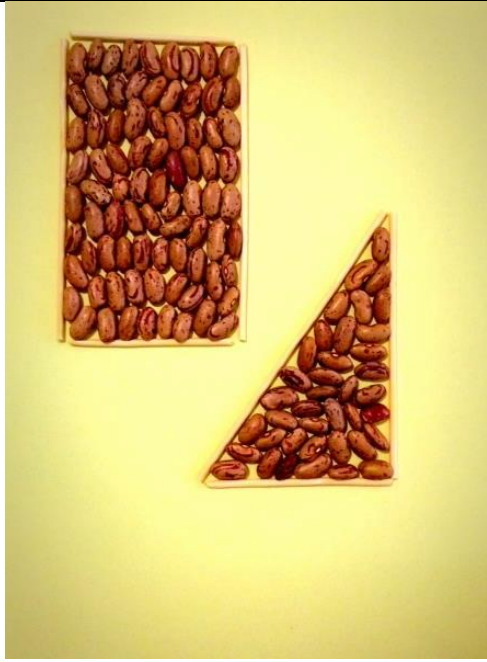
Aktivnost 3: Za sljedeću aktivnost potreban je kolaž papir, štapići raznih veličina, ljepilo, grah, riža i slične namjernice. Učenici trebaju na kolaž papiru pomoću štapića složiti stranice trokuta, kvadrata i pravokutnika te ih pričvrstiti ljepilom (može ljepljivom trakom ili uz pomoć učitelja vrućim ljepilom). Na jednom kolaž papiru treba što više različitih geometrijskih likova napraviti, poželjno je različitih veličina. Zatim na površinu lika nanijeti sloj ljepila te staviti grah, rižu ili neku drugu namirnicu, ali bitno je da sve likove ispuni istom namirnicom. Kada se osuši ljepilo učenici mogu prijeći na igru u kojoj se učenici zamijene za radove te jedan učenik stavlja povez na oči i rukom prelazi preko geometrijskih likova i prema obliku lika govori koji je lik.

Cilj ove aktivnosti je da se učenik fokusira na sami oblik lika, a ne na materijal od kojega je napravljen. Važno je da su na jednom papiru svi geometrijski likovi ispunjeni istom namirnicom kako ne bi došlo do prepoznavanja lika po namirnici. Bilo bi poželjno da učenici u razredu imaju što više različitih namirnica kako bi dobili razvijanjem osjeta prepoznali o kojem geometrijskom liku je riječ.

U Tablici 12 je prikazan slijed izrade geometrijskih likova pomoću fotografija.

Tablica 12. Izrada geometrijskih likova od različitih namirnica

	
<p>Potreban pribor: štapići raznih veličina, kolaž papir, ljepilo, grah, riža ili neke druge namirnice.</p>	<p>Od štapića postavite stranice geometrijskih likova.</p>
	<p>Geometrijske likove ispunite grahom, rižom ili nekim drugim namirnicama.</p>
	



Poželjno je na jednome papiru što više geometrijskih likova napraviti i ispuniti istom namirnicom. Na fotografijama su prikazani pravokutnik, trokut i kvadrat ispunjeni grahom.





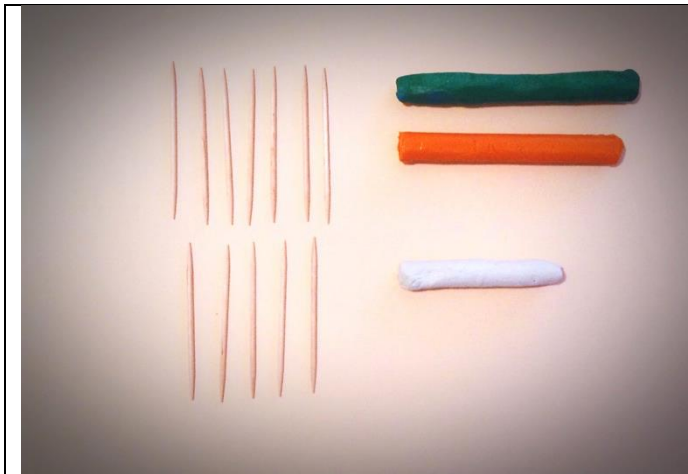
Na fotografiji su tri različita trokuta, jednakokračan, pravokutan i jednakostraničan, a svi su ispunjeni šarenim lećama.

Nadalje, bilo bi poželjno (prema Čižmešija i sur., 2010) da učenici imaju priliku graditi i sastavljati geometrijska tijela. Jedan od mogućih načina je opisan u slijedećoj aktivnosti.

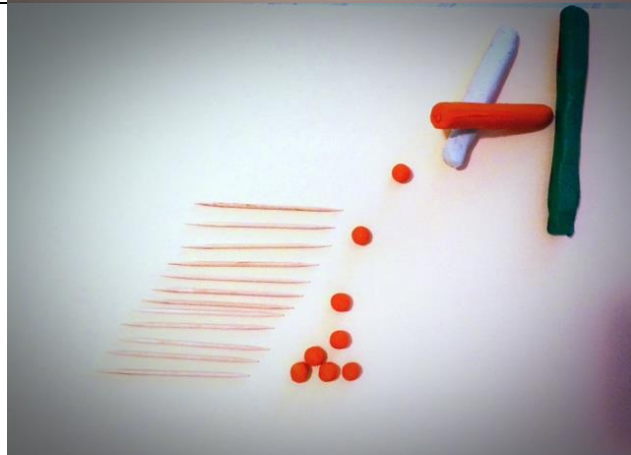
Aktivnost 4: Za ovu aktivnost potreban je plastelin, štapići za roštilj, čačkalice, kolaž papir i zaštitna podloga. Zadatak učenika je gradnja geometrijskih tijela od štapića, a pomoću plastelina trebaju spojiti štapiće. Plastelin je potrebno prethodno oblikovati u kuglice kako bi se lakše manipuliralo i spajalo štapiće s njim.

Tablica 13 prikazuje aktivnost u koracima, a svaki korak je popraćen fotografijom (napomena, kolaž papir na nekim fotografijama ne predstavlja određeno geometrijsko svojstvo već služi kao kompozicijski i estetski element). Kroz ovu aktivnost učenici će aktivno promišljati o vrhovima, o stranicama i položaju tijela u prostoru. Kolaž papir se koristi kao podloga prilikom razgovora o geometrijskom liku kako bi učenicima bilo zornije o kojim stranama geometrijskog tijela razgovaraju.

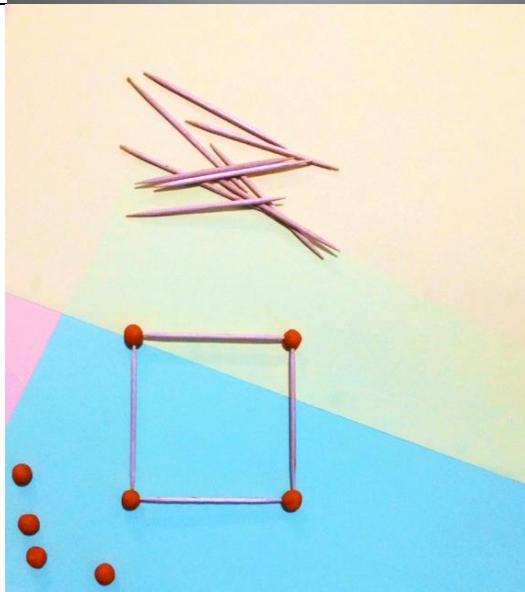
Tablica 13. Prikaz građenja geometrijskih tijela



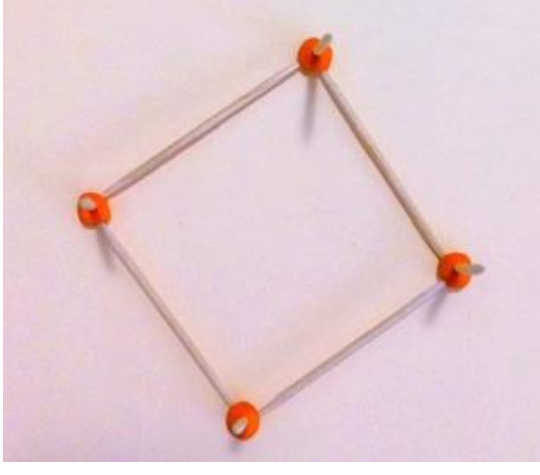
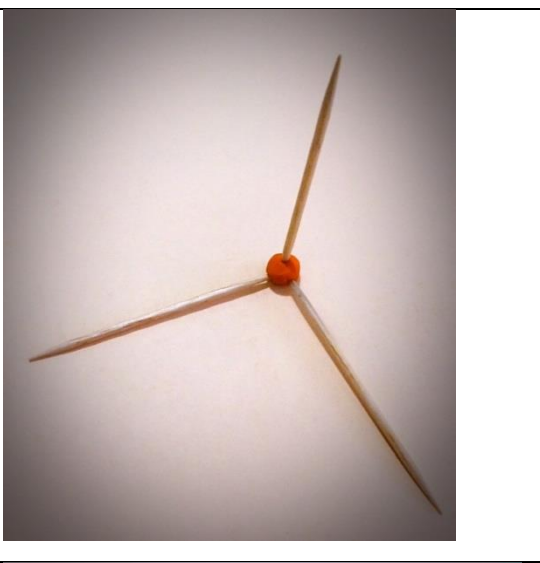
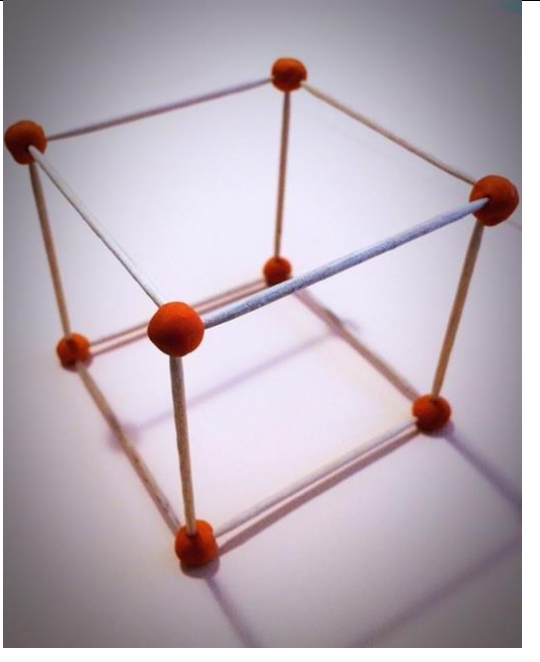
Materijal: štapići, plastelin i podloga.

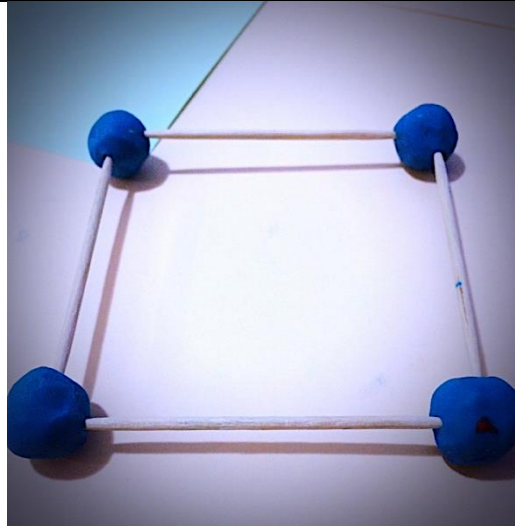


Plastelin razlomiti na komadiće i uvaljati u kuglice.

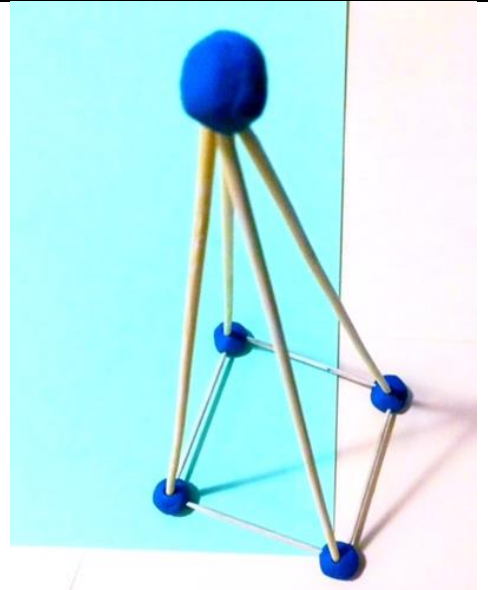


I izrada geometrijskih tijela može početi.

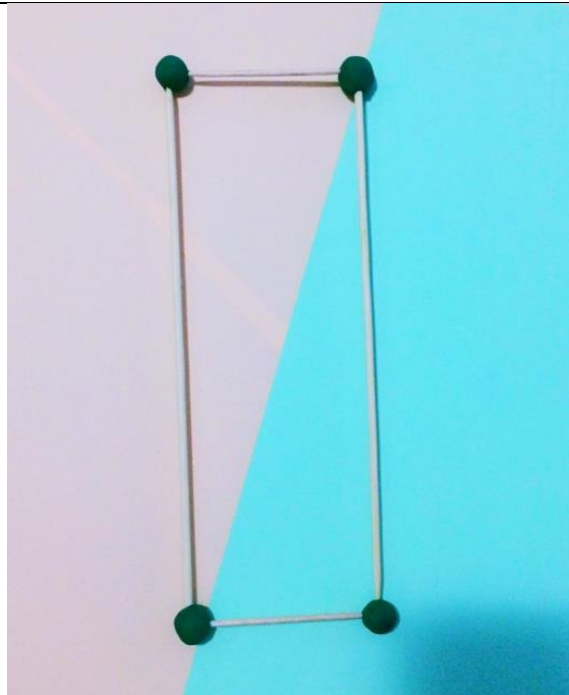
	<p>Učenik može prvo napraviti kvadrat i na točkama graditi dalje kocku.</p>
	<p>I prethodni i ovaj način su ispravni. Učenik može krenuti graditi geometrijsko tijelo iz točke i graditi odmah u prostor.</p>
	<p>Geometrijsko tijelo - kocka.</p>



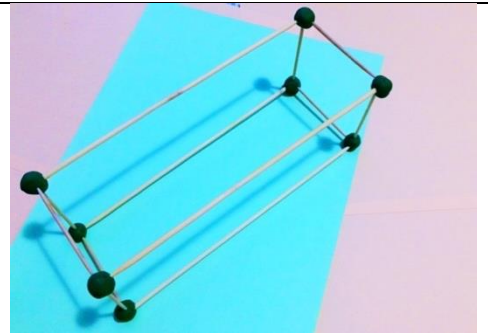
Baza četverostrane piramide.



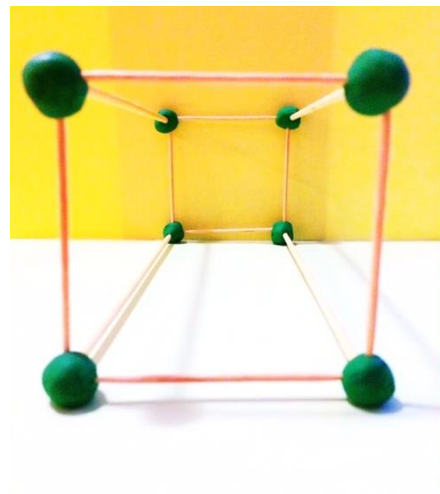
Četverostrana piramida.



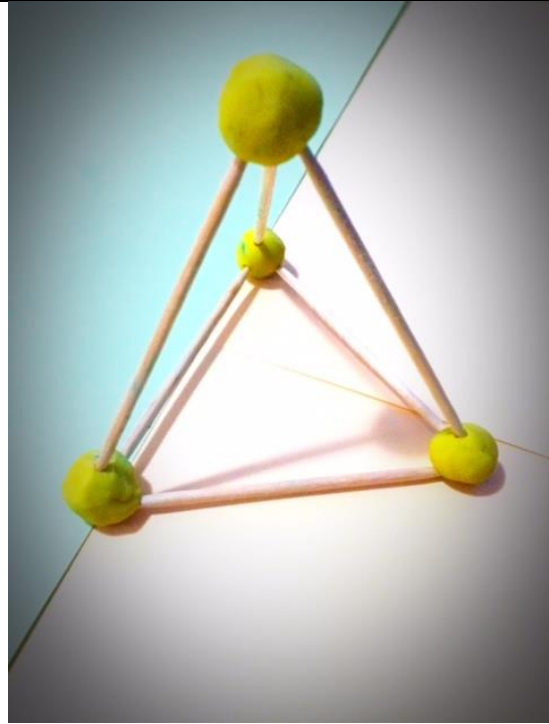
Pravokutnik. Kolaž papir pomaže u zornosti dijagonale.



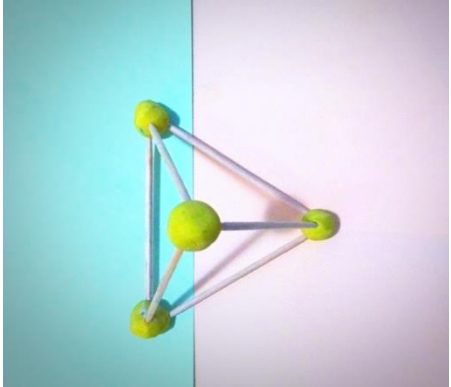
Kvadar.



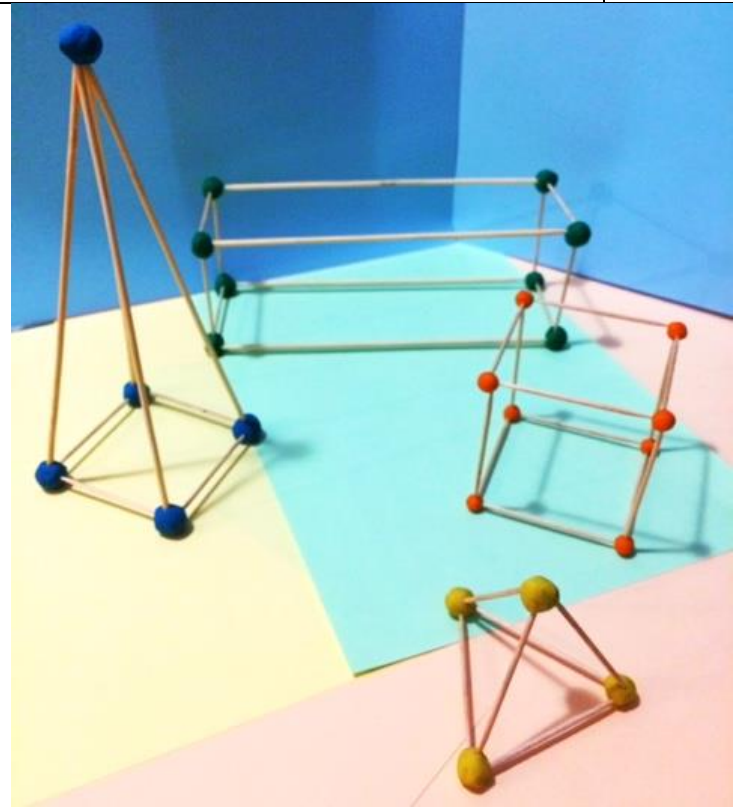
Kvadar iz drugog kuta.



Pravilna trostrana piramida.

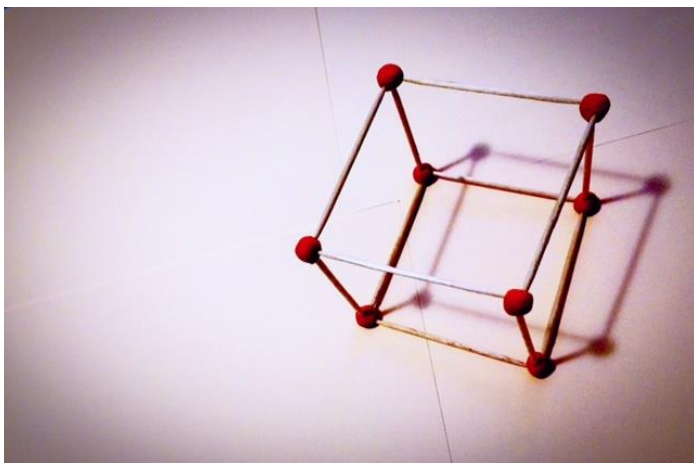


Pravilna trostrana piramida. Kolaž papir prolazi kroz vrh piramide.



Geometrijska tijela.

Uz kolaž papir moguće je se igrati pomoću sjene. Kao što je prikazano na fotografiji (Slika 23.) možemo prvo uočiti kocku koju možemo pogledati iz svih kutova jer je u prostoru i trodimenzionalna je. Kada je dodatno osvijetlimo možemo primijetiti kako se na papiru stvori sjena kocke. Učenici mogu olovkom precrtati sjenu i stranu kocke koja je na papiru te tako dobivaju prikaz kocke na papiru.

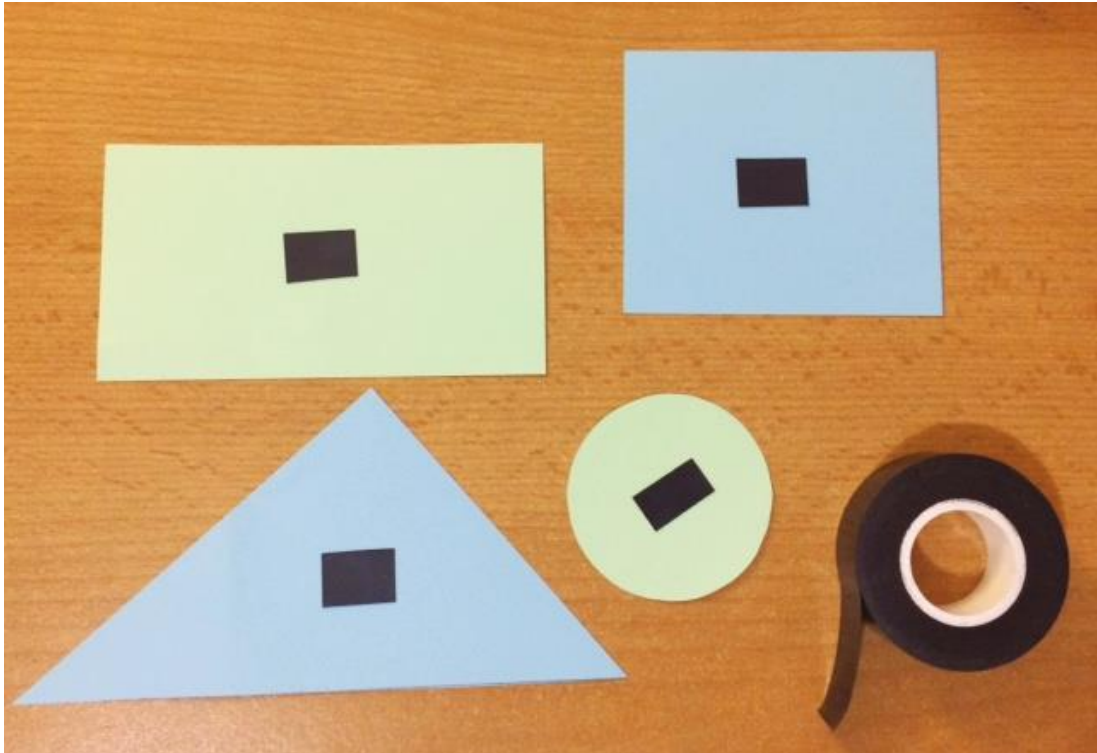


Slika 23. Fotografija kocke i njezine sjene.

Nadalje, neki učenici ne vide da geometrijski lik ili tijelo može promijeniti položaj u ravnini ili prostoru, ali da je i dalje taj lik ili tijelo. Kako bi učenici uočili mnogo položaja istog lika moguće je provesti sljedeću aktivnost.

Aktivnost 5: Od kolaž papira izrezati geometrijske likove te na poleđini zalijepiti komadić magnetne trake. Tako se geometrijski lik može lako pričvrstiti za ploču i rotirati u svim smjerovima (Slika 24.). Učenici mogu pred pločom otkrivati sve mogućnosti položaja lika te kroz samu aktivnost uvidjeti kako se geometrijski lik ne mijenja s obzirom na položaj u ravnini.

Ova aktivnost na zoran i primjeren način potiče učenike na razumijevanje klasifikacije likova bez obzira na njihovu orijentaciju u ravnini.



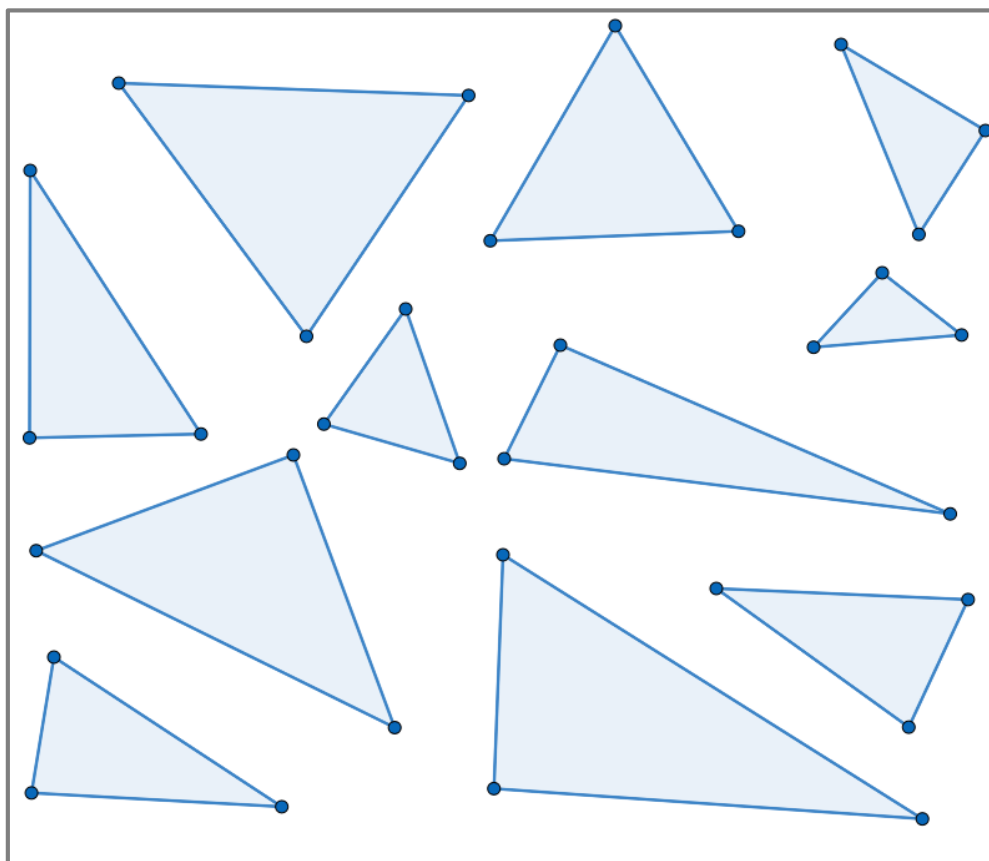
Slika 24. Geometrijski likovi

Aktivnost 6: Ova aktivnost nadovezuje se na prethodnu (Aktivnost 5). Potrebni su geometrijski likovi iz prethodne aktivnosti. Svaki učenik treba imati jedan geometrijski lik. Ploča treba biti podijeljena na 4 dijela (pravokutnik, kvadrat, krug i trokut). Zadatak učenicima je da po grupama dolaze na ploču i geometrijski lik stavljaju na onaj dio ploče gdje je naziv njihovog lika, izmjenjuju se po grupama te tako vrše klasifikaciju geometrijskih likova. Učenici se mogu zamijeniti za geometrijske likove koje imaju pa ponoviti igru.

U udžbenicima postoje mnogi zadatci vezani uz ovu temu, a ova aktivnost je jedan od načina kako učenici na interaktivnoj razini mogu doći do spoznaje, a poslije je mogu kroz zadatke na individualnoj razini uvježbavati.

Zadatak 1: Na temelju prethodne aktivnosti moguće je učenicima dati zadatak da izvade sve bojice koje imaju te oboje sve geometrijske likove koje dobiju na papiru (Slika 25.), uz uvjet da svaku boju mogu koristiti samo jednom.

Cilj ovoga zadatka je da učenici osvijeste da je moguće da je svaki trokut i dalje trokut iako je svaki različite boje. Također je moguće provesti ovaj zadatak na primjeru nekog drugog geometrijskog lika. Vrlo je važno poticati učenike na govor jer bez verbalizacije spoznaje nema dugoročnog pamćenja, povezivanja i apstrakcije.



Slika 25. Primjer zadatka s bojanjem geometrijskih likova

Aktivnost 7: U ovoj aktivnosti učenici će pomoću geometrijskih likova prikazivati svijet oko sebe. Za početak se mogu poslužiti geometrijskim likovima iz aktivnosti broj 5, uz nadopunu trapeza i paralelograma. Zadatak je pomoću geometrijskih tijela složiti objekte s fotografija (Slika 25).

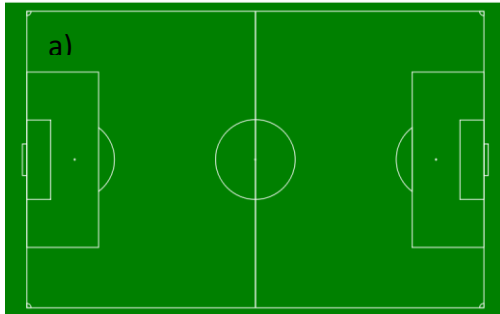
Slike su složene od jednostavnije prema složenijima, a od učenika se sve više traži kreativnost i divergentno mišljenje kako bi riješio problem. Kod složenijih slika moguće je više točnih odgovora, bitno je ne sputavati učenike u razmišljanju već poticati i usmjeravati ih kako bi samostalno došli do rješenja.

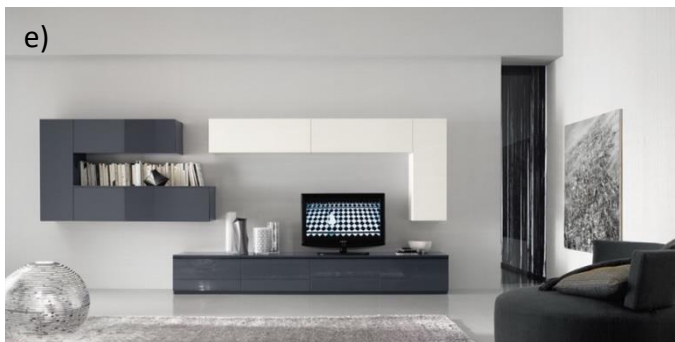
Napomena, kod slike *g*) (zadnji dnevni boravak) moguće ju je prikazati pomoću geometrijskih tijela, iako nije greška ako učenik vidi i geometrijske likove, međutim, trebalo bi ga potaknuti da sliku pokaže pomoću geometrijskih tijela.

Kasnije učenici mogu u bilježnicama te objekte nacrtati pomoću geometrijskih likova uz korištenje geometrijskog pribora kako bi se poticalo na urednost, preciznost i razvijala ljepota prema geometrijskim crtežima.

Cilj ovog zadatka je apstrahiranje i uočavanje geometrijskih likova te povezivanje geometrije sa svijetom oko sebe. Poslije učenici samostalno mogu

kombinacijom geometrijskih likova stvarati nove oblike iz neposredne okoline ili iz mašte. Ovim zadatkom učenici usvajaju na intuitivnoj razini prikazivanje predmeta iz svakodnevice pomoću geometrijskih likova, odnosno tijela te potiče na divergentno i kreativno mišljenje i stvaranje novih oblika pomoću geometrijskih objekata.





Slika 25. Slike objekata koje učenik treba prikazati pomoću geometrijskih likova: a) nogometni teren; b) bicikl; c) traktor; d) kuća; e) dnevni boravak; f) dnevni boravak; g) dnevni boravak.

Zadatak 2: Napiši i nacrtaj barem dva predmeta koji imaju oblik:

Geometrijsko tijelo	Naziv predmeta	Crtež
Piramida		
Kugla		
Valjak		
Kvadar		
Kocka		

Ovim aktivnostima i zadacima bi se poticalo na geometrijsko mišljenje učenike koji se nalaze na vizualizacijskoj razini (prema van Hieleu) neovisno koji su razred. Sukladno razredu u koji učenici idu, od njih se može dodatno tražiti prepoznavanje i argumentiranje geometrijskih činjenica i znanja te međusobno povezivanje. Tako, na primjer, za aktivnost br. 4. od učenika se može sljedeće očekivati:

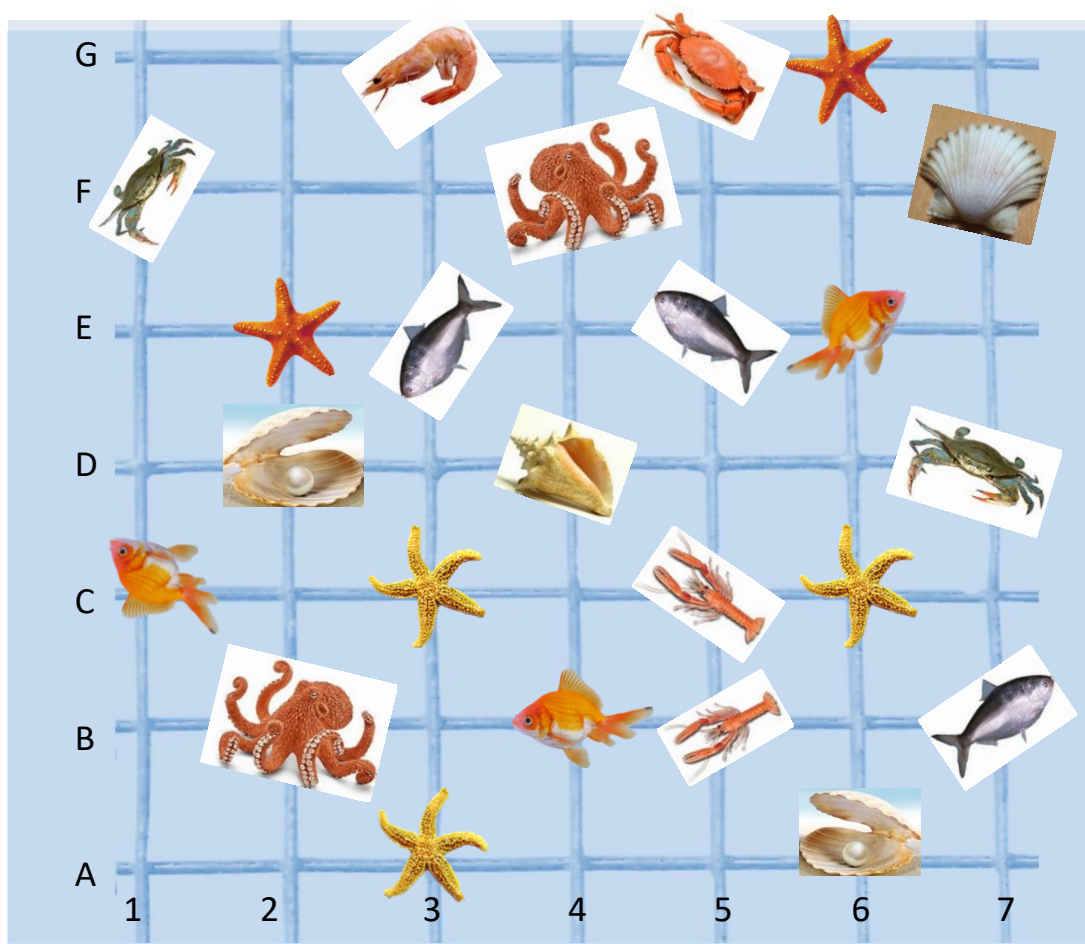
- da prepoznaje točke kao krajnje točke; stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta označava kao dužine (MZOS, 2006) - 2. razred
- da izmjeri duljine dužina (bridova) na geometrijskim tijelima; preračuna mjerne jedinice za duljinu; uoči dužine na geometrijskim likovima i zamisli

pravce koji prolaze kroz njih; uočiti na geometrijskim tijelima koji pravci se sijeku, a koji su usporedni (MZOS, 2006) - 3. razred

- da prepozna prave, šiljaste i tupe kutove na geometrijskim tijelima; gradi različite trokute s obzirom na veličine kutova i duljine stranica; određuje strane, bridove i vrhove kvadra i kocke; mjeri obujam kocke (MZOS, 2006) - 4. razred

Za razvijanje položaja i smjera svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (Čižmešija i sur., 2010) predlažu se sljedeće aktivnosti i zadatci:

Zadatak 3.: Ribaru su se u mrežu zaplele mnoge životinje. Ribar je star i ne vidi baš najbolje, treba tvoju pomoć kako bi izvadio točno sve životinje i razvrstao ih u kašete.



Ribar želi razvrstati cijeli ulov. U tablicu (Tablica 14) upiši koordinate ribe, hobotnice, raka, školjki, morske zvijezde i školjki.

Tablica 14. Ribarov ulov u mreži

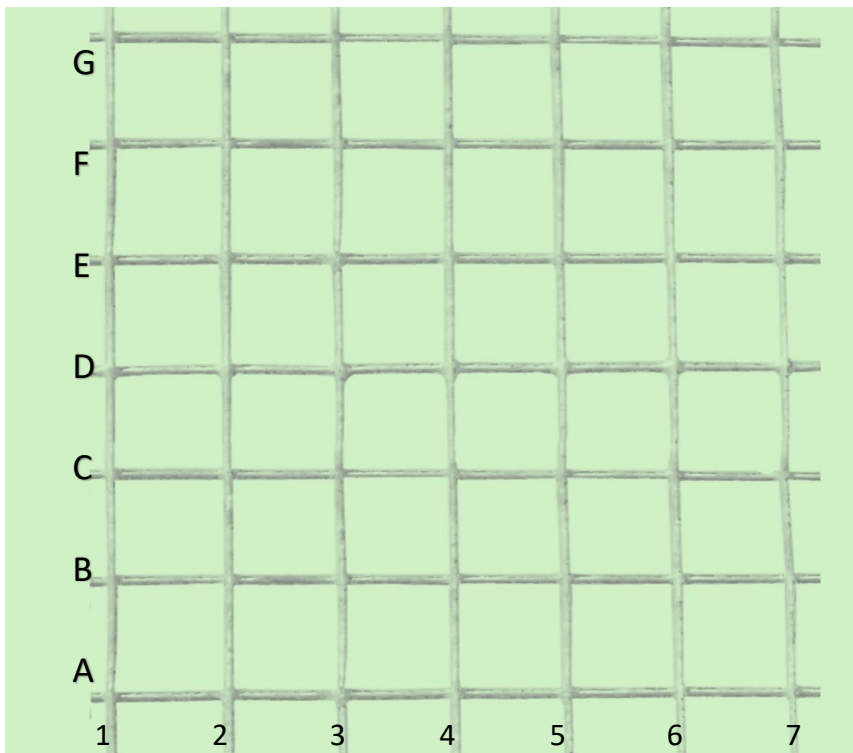
Ribe	Hobotnice	rakovi	škampi	Morske zvijezde	školjke
npr. (7,B)					
Ribar je ulovio _____ _____ riba.	Ribar je ulovio _____ hobotnica.	Ribar je ulovio _____ _____ rakova.	Ribar je ulovio _____ škampa.	Ribar je ulovio _____ morskih zvijezda.	Ribar je ulovio _____ _____ školjki.

Čega je ribar najviše ulovio?

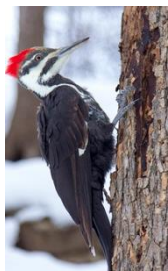
U ovome zadatku moguća je međupredmetna korelacija tako da se pridoda realna cijena svakom ulovu te da učenik treba izračunati koliko ribar može zaraditi od prodaje ribe, škampa, školjki, hobotnice, rakova i morskih zvijezda; što je najskuplje, a što najjeftinije za kupiti po komadu; koliko ribar može zaraditi ako proda sve što je ulovio?

Ovaj zadatak potiče točno očitavanje koordinata u koordinatnom sustavu. Može se primijetiti kako se koriste različite fotografije za jednu životinju, cilj ovoga je uočavanje i točna kvalifikacija životinja koje mogu drugačije izgledati. Koordinatni sustav je izražen pomoću brojeva na x osi i slova na y osi kako bi učenicima bilo lakše očitavanje i snalaženje u mreži, odnosno koordinatnom sustavu.

Zadatak 4: Ovdje se nalazi mreža šume, šumske životinje su se izgubile, pomozite im pronaći njihov dom na mreži.



Pčela ima dom na (2,A), na mreži označi pčelin dom točkom P.



Djetlić ima dom na (1,D), na mreži označi djetličev dom točkom D.



Leptir ima dom na (5,C), na mreži označi leptirov dom točkom L.



Krtica ima dom na (4,F), na mreži označi krtičin dom točkom K.



Mrav ima dom na (7,B), na mreži označi mravlji dom točkom M.



Jež ima dom na $(2, E)$, na mreži označi ježev dom točkom J.

Kroz zadatke 3. i 4. na intuitivan način se uvodi koordinatni sustav u nastavu. Poslije se može raditi međupredmetna korelacija za učenike trećih razreda kada uče strane svijeta te povezati s kartom Hrvatske te meridijanima i paralelama.

Kroz ove aktivnosti i zadatke koji su bili bogati vizualnim podražajima potiče se i pomaže učenicima da uz vizualnu pomoć uđu u svijet geometrije koja je oko njih. U nastavku slijede zadatci koji su za učenike koji se nalaze na prvoj razini geometrijskog mišljenja, odnosno analizi.

6.2. Aktivnosti i zadatci za učenike koji se nalaze na razini Analize geometrijskog mišljenja

Kako bi učenici, osim prepoznavanja geometrijskih likova i tijela, usvojili i razumjeli njihova geometrijska svojstva te povezivali geometrijska svojstva unutar klase, a ne primjenjivali samo na pojedinačne modele, slijedi prijedlog pristupa nastavnom sadržaju kako bi znanje uistinu bilo funkcionalno.

Aktivnost 8: Učenici se stavljaju u ulogu geometrijskog istraživača. Dobit će geometrijske kartone u kojima će za svaki geometrijski lik i tijelo imati karticu. Zadatak je napisati i označiti sve što znaju o geometrijskom liku, a kasnije u karticama o geometrijskim tijelima će također trebati napisati sve što znaju te naći poveznicu između geometrijskih likova i tijela.

Napomena, učenici u prvom razredu još ne znaju dobro manipulirati geometrijskim priborom, pa se savjetuje da učitelj isprinta geometrijske likove i tijela, a učenik da ih samo zalijepi. U četvrtom razredu učenici uče crtati geometrijske likove pomoću geometrijskog pribora te se iz tog razloga savjetuje stvaranje novih kartica na kojima će učenici sami konstruirati geometrijske likove.

Primjer prazne kartice (Slika 26) za geometrijske likove za prvi razred prema nastavnom programu (MZOS, 2006).

<p>Naziv geometrijskog lika: _____</p> <p>Nacrtaj lik:</p> <p>Stvari iz prirode i okoline koje imaju oblik _____ :</p>

Slika 26.: Primjer prazne kartice

Ove kartice se mogu iskoristiti i u drugom razredu kada se učenici susreću s *”dužinom kao spojnicom dviju različitih točaka i stranicama kvadrata, pravokutnika i trokuta”* (MZOS, 2006., str. 240). Učenici na ovim karticama mogu nadopuniti sadržaj novim nastavnim sadržajem: označiti krajnje točke na likovima (pravokutnik, kvadrat i trokut) te bojom označiti i imenovati dužinu te nacrtati točke koje pripadaju, a koje ne pripadaju dužinama. Kod pravokutnika, kvadrata i trokuta označavaju se stranice kao dužine.

Ovim aktivnostima ne ide se izvan okvira nastavnog programa (MZOS, 2006), a učenici kroz načela zornosti, postupnosti, primjerenosti i znanstvenosti usvajaju nastavni sadržaj geometrije.

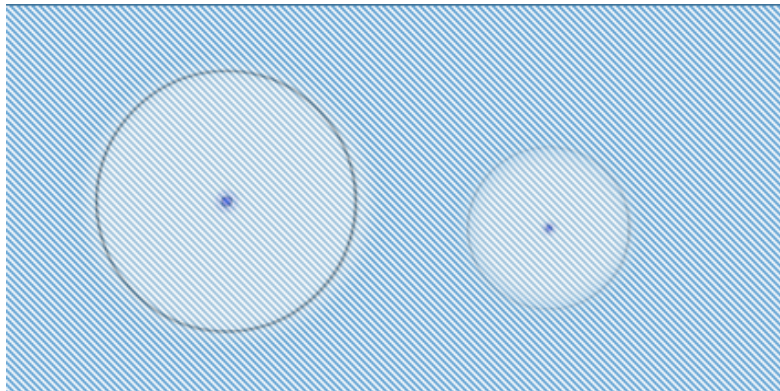
U trećem razredu geometrija zauzima gotovo 35% udjela nastavnih tema i učenici se susreću s malo apstraktnijim pojmovima kao što je ravnina. Kako bi učenici povezivali prethodno usvojeni nastavni sadržaj, ove kartice će im pomoću u ponavljanju, nadopunjavanju i usvajanju novih znanja.

U karticama je potrebno nadodati ravnine i pomoći učenicima da uoče kako se geometrijski likovi nalaze u ravnini na način da nekom bojom iscrtaju ravninu i lik kao što je prikazano u sljedećoj tablici (Slika 27).

Naziv geometrijskog lika:

_____KRUG_____

Nacrtaj lik:



Stvari iz prirode i okoline koje imaju oblik _____ KRUGA _____ :



gumbi



sat



cd

Slika 27.: Primjer popunjene kartice

Aktivnost 9.: Kao što se dodaju dužine i ravnina, analogno se dodaju pravci koji se produžuju iz dužina jer se poučava da je dužina dio pravca, a ovo je dobra prilika da to uoče na dosadašnjem znanju iz geometrije te se tako poštuje načelo trajnosti znanja, vještina i navika.

Aktivnost 10: Slijedeći nastavni program, učenici se susreću s mjernim jedinicama koje mogu implementirati u svoje kartice saznajući koliko iznosi duljina stranica geometrijskih likova. Zatim mogu pretvarati mjerne jedinice.

Aktivnost 11: Kada su se već susreli s pravcem, mogu analizirati geometrijske likove i vidjeti koji pravci se sijeku, koji su paralelni, a koji su okomiti. Na taj način povezuju novi nastavni sadržaj s već usvojenim.

Aktivnost 12: Krug i kružnica su po nekim svojstvima slični, ali i različiti, a njih će učenici u 3. razredu znati konstruirati i pomoću šestara. Kako bi bolje razumjeli razliku između kružnice i kruga u pomoć dolaze predmeti iz njihove svakodnevice kao što su obruč (hula-hop), gumice za kosu, kotač od bicikla i razni tome slični predmeti koji će na zoran način predočiti razliku. Jedna od učenika zanimljivijih aktivnosti je provlačenje kroz obruč (hula-hop) te na taj način pamte da se kroz kružnicu može proći, a kroz krug ne.

Aktivnost 13: Mjerenje tekućine i mase učenikima se može približiti kroz razne aktivnosti mjerenja tekućine i vaganje mase raznih predmeta pomoću kuhinjskih pomagala kao što je kuhinjska vaga i bokal s označenim mjernim jedinicama za tekućinu. Važno je povezati sadržaj s realnim životnim događajima. Učenici za domaću zadaću mogu ispeći neki kolač, a zatim probati izračunati koliko je potrebno materijala za duplo više ljudi pa za cijeli razred ili školu (Glasnović Gracin, 2016) čime se ostvaruje zadaća matematike gdje se očituje primjena znanja u svakodnevnom životu (MZOS, 2006).

Aktivnost 14: Četvrti razred donosi novi izazov za učenike, kao što je već spomenuto, učenici uče konstruirati geometrijske likove pomoću geometrijskog pribora što od učenika zahtjeva dodatni trud, urednost i preciznost. Učenici se susreću s pojmom kuta te upoznaju tupe, prave i šiljaste kutove. Opet se susreću s trokutima, ali ovaj put ih upoznaju prema duljini stranica i veličini kutova. Vidimo da se ponavlja sadržaj, ali na višoj razini, a to je odlična prilika za heurističku nastavu jer učenici imaju temeljno znanje o trokutu, duljinama stranica, veličini kutova te je moguće dati im izazov. Kao što je već prije spomenuto, učenici izrađuju nove kartice baš zbog jedne više razine koja se od njih zahtjeva, a to je "sposobnost za samostalan rad,

odgovornost za rad, točnost, urednost, sustavnost, preciznost i konciznost u pisanom i usmenom izražavanju” (MZOS, 2006, str. 238).

Od učenika se u tim karticama očekuje da prvo napišu naziv geometrijskog lika, konstruiraju ga pomoću geometrijskog pribora, istaknu vrhove, ispišu stranice, istaknu pravce koji prolaze stranicama te odrede koji su paralelni, koji se sijeku te okomite pravce. Na taj način sustavno sve ponavljaju, zatim slijedi ”korak dalje” kroz heurističku nastavu gdje učenici trebaju pomoću dosadašnjeg znanja i nastavnih sredstava (geometrijski modeli koje su izrađivali u *Aktivnosti 3.*) doći do spoznaje da se trokuti mogu razlikovati po veličinama stranica i kutova.

Aktivnost 15: Pred učenike se može staviti zadatak da od štapića slože trokut koji ima jedan tupi kut, trokut koji ima jedan šiljasti kut te trokut koji ima jedan pravi kut te da istraže kakvi su ostali kutovi u tim trokutima. Tako će učenici uistinu promišljati i zaključivati, a samim time će usvojeni nastavni sadržaj koristiti analizirajući i sintetizirajući te dolaziti do novih saznanja koja ponovno mogu u sljedećoj situaciji primijeniti.

Kroz heuristički pristup nastavi moguće je usvajati novi nastavni sadržaj poput opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata, mjerenja površine pravokutnika i kvadrata te mjerenja obujma kocke.

Prema van Hieleu učenici koji su na prvoj razini, razini analize geometrijskog mišljenja najčešće griješe eksplicitnim uspoređivanjem likova u terminima njihovih bitnih svojstava; izbjegavaju povezivanje dvije različite klase likova (npr. kvadrata i pravokutnike, paralelograme i trapeze); razvrstavaju likove samo prema jednom svojstvu (npr. prema stranicama); prilikom definiranja lika koriste sva obilježja umjesto da prepoznaju samo ona dovoljna; teško uče definicije koje pišu u udžbenicima i koje kažu učitelji, a radije koriste vlastite (prema Čižmšija i sur., 2010, str. 151).

Kako bi se potaknulo učenike na bolje i ispravnije mišljenje potrebno je osmisliti dovoljno aktivnosti kako bi učenici promišljali o geometrijskim svojstvima, a ne samo ih prepoznavali; uvođenjem novih geometrijskih koncepata povećava se broj svojstava geometrijskih oblika; ideje je potrebno primjenjivati na cijelu klasu, a ne samo na pojedine modele (npr. primjenjuje samo na kvadrata umjesto na četverokute); analizom klase uočavati nova svojstva (npr. pronaći način na koji

možemo sortirati trokute u grupe i sukladno tome definirati vrste trokuta) te koristiti program dinamične geometrije (prema Čižmešija i sur., 2010., str. 151).

Sukladno prethodno navedenom možemo primijetiti kako se sustavnim i potpunim ispunjenjem kartica (geometrijskih likova i tijela) i heurističkim oblikom nastave učenike potiče na promišljanje o geometrijskim svojstvima i postupno se povećavaju svojstva geometrijskih oblika usvajanjem novih geometrijskih koncepata.

Kako bi se pravilno postavila koncepcija geometrijskih likova prema broju stranica te daljnja podjelu među njima, slijedi prijedlog aktivnosti koju je moguće provesti s prethodno već ispunjenim karticama geometrijskih likova.

Aktivnost 16: Učenici imaju ispunjene kartice geometrijskih likova (trokut, pravokutnik, kvadrat, paralelogram, trapez i krug) te im se postavlja pitanje: *što im je svima zajedničko?* Ovim pitanjem se želi potaknuti promišljanje o crtama koje ih omeđuju i kakve mogu biti kako bi se kroz daljnju komunikaciju s učiteljem i radom u grupama došlo do klasifikacije krug, trokut i četverokuti. Zatim učenike treba potaknuti da promišljaju i uočavaju koja su geometrijska svojstva zajednička četverokutima, ali po čemu se pojedini četverokuti ipak razlikuju. Ovom aktivnošću se želi potaknuti učenike na primjenu određenih svojstava na cijelu klasu, a ne samo na pojedinačne geometrijske modele.

Aktivnost 17: Kako bi učenici razumjeli sličnost, ali i razliku između paralelograma i pravokutnika moguće je izgraditi modele pomoću štapića i gline, a zatim zadati zadatak da od pravokutnika načini paralelogram i obratno. Ovom aktivnošću učenici će uočiti kako su vrlo slični, ali se razlikuju (ako učenik ne uočava da se razlikuju po veličini kutova onda mu trebamo suptilno skrenuti pažnju na to tako da ga pitamo što se promijenilo, a što je ostalo isto prilikom transformacije). Ovom aktivnošću učenik će na intuitivnoj razini činiti transformacije nad geometrijskim likom, iako ih neće moći geometrijski točno verbalizirati, no to u tom trenutku nije ni cilj (ujedno nije zadano nastavnim programom), ali je dovoljno da se učenik susreće i primjećuje transformaciju. Analogno ovoj aktivnosti učenici mogu proučavati razliku između kvadrata i romba. Tako je na "nevidljiv" način implementirana druga fundamentalna ideja prema Wittmannu, Operacije s oblicima.

Analizom nastavnog plana nigdje se ne planira da učenici dolaze u doticaj s drugom fundamentalnom idejom prema Wittmannu, Operacijama s oblicima, a u obrazovnim postignućima u prvom razredu (MZOS, 2006) se od učenika očekuje da prepozna geometrijski lik kada promjeni veličinu, položaj u ravnini i orijentaciju. Jasno je da je došlo do propusta u očekivanjima od učenika i sadržaju koji se zahtjeva da se usvoji. Naravno da učenici u prvome razredu ne mogu i ne trebaju znati i moći u duhu matematičkog jezika i znanja raditi i prepoznati Operacije s oblicima, ali je potrebno da se učenici susretnu s mogućim operacijama s oblicima kroz manipulaciju s geometrijskim modelima u ravnini i prostoru. Tako se druga fundamentalna ideja prema Wittmannu uspješno može implementirati u nastavni program na nultoj razini geometrijskog mišljenja prema van Hieleu.

Aktivnost 18: Također, kako bi učenici još bolje razumjeli klasificiranje, npr. četverokuta, moguće je prikazati njihovu povezanost u obliku obiteljskog stabla, jer svi su različiti, ali imaju neke zajedničke karakteristike, odnosno svojstva. Bilo bi dobro učenicima prepustiti kreativnosti i matematičko argumentiranje kako su ih doveli u vezu te kojim redoslijedom. Na taj način, iako kroz igru, učenici će se suočiti s matematičkom klasifikacijom koju će trebati sami probati matematički opravdati. Naravno, na kraju im treba pokazati pravilni redoslijed u klasifikaciji četverokuta, a da oni pokušaju objasniti zašto baš tim redoslijedom.

Ovakav oblik rada i poučavanja geometrije pruža učenicima jasnije, točnije, povezanije i prirodnije učenje geometrije pa su učenici spremniji riješiti i zadatke koji zahtijevaju razumijevanje i primjenu geometrijskog sadržaja. Ovime se željelo pokazati kako je moguće implementirati fundamentalne ideje prema Wittmannu u nastavu geometrije kroz zanimljive aktivnosti.

Cilj ovakvog pristupa geometrijskom sadržaju kroz razrednu nastavu je razvijanje i produblivanje matematičkog mišljenja učenika i osposobljavanje za pronalaženje rješenja i rješavanje praktičnih problema, što je ujedno jedno od ciljeva nastave matematike (MZOS, 2006). Učenici ovim pristupom povezuju geometrijski sadržaj u cjelinu te će biti osposobljeni za "apstraktno mišljenje, logičko zaključivanje i precizno formuliranje pojmova" (MZOS, 2006., str. 238).

7. ZAKLJUČAK

Geometrija i učenje i poučavanje geometrije su prisutni u čovječanstvu od samih njegovih početaka. Euklid je davno rekao kako ne postoji kraljevski put u geometriju, čime je dao naslutiti njezinu složenost i zahtijevanje misaonih operacija koje vode do spoznaje.

Danas se učenici susreću s geometrijom u školskim klupama, što je ujedno izazov za učitelje i nastavnike jer poučavanje geometrije je zahtjevnije od poučavanja ostalih matematičkih disciplina. Geometrija učenicima omogućava sposobnost za apstraktno mišljenje, logičko zaključivanje te primjenu geometrijskih znanja u svakodnevnom životu.

Obrazovni sustav je prepoznao važnost geometrije kao dijela opće pismenosti pa je ona prisutna od prvog razreda osnovne škole. Učenici se prvo u matematici susreću upravo s geometrijom. Geometrija je apstraktna znanost, ali geometrijske oblike i svojstva možemo pronaći u predmetima koje svakodnevno koristimo kao što je kutija, čaša, lonac, ploča i sl. Kako bi geometrija očuvala svoju dugogodišnju povijest poučavanja i prenošenja znanja s generacije na generaciju (Jones, 2000), svjetska matematička organizacija ICMI je preporučila Wittmannove fundamentalne ideje kao osnovnu smjernicu za poučavanje geometrije danas. Cilj preporuke ICMI-a je usklađivanje geometrijskog obrazovanja među narodima uz implementaciju novih tehnoloških otkrića u nastavu geometrije kako bi se osuvremenila metoda poučavanja.

U Hrvatskoj opseg koji obuhvaća geometrija u usporedbi s fundamentalnim idejama prema Wittmannu, obuhvaća dvije fundamentalne ideje od mogućih sedam. Istraživanje učeničkih crteža kako izgleda tipičan sat geometrije pokazuje kako se te dvije fundamentalne ideje prakticiraju u nastavi – frontalnim oblikom rada i bez zornih modela. Na temelju ovih rezultata moramo se zapitati kako promijeniti i poboljšati nastavu geometrije u Hrvatskoj i na razini kurikula i na razini prakse.

Nedostaci u geometrijskom obrazovanju očituju se kroz zadatke koji od učenika ne zahtijevaju istinsko geometrijsko razmišljanje, argumentiranje i zaključivanje već se svode na rutinsko rješavanje uz jednostavne proceduralne zahtjeve koji se svode na algebarske izraze. Važnost geometrije je u sadržaju koji učenike potiče na istinsko razmišljanje, zaključivanje i povezivanje, što je preduvjet za apstraktno mišljenje. Zadaća početne nastave geometrije učenicima omogućava uz kvalitetne zadatke, promatrati geometrijske objekte kako bi učenici mogli razvijati

misaone koncepte koji omogućuju razvoj intelektualnih sposobnosti koje vode do apstrahiranja i generaliziranja. Uz sve nedostatke u nastavi geometrije navedene, mogu se pribrojiti i nedostatak tema iz geometrije prostora i diskontinuitet u poučavanju geometrijskog sadržaja.

Geometrija je oko nas, živimo je i zato je potrebno kroz razne aktivnosti učenicima osvijestiti gdje se "skriva te zašto ju tražimo" kako bi učenicima razvili ljubav prema njoj te da s radošću i radoznalošću tražila dalje, rješavaju nove zadatke i promišljanjem donose zaključke. Svrha škole kako odgojno-obrazovne institucije je odgajati i obrazovati nove generacije za buduće nepredvidive situacije i promjene na tržištu rada.

Istinsko geometrijsko znanje i razumijevanje ključ su uspješnog rješavanja i "težih" zadataka, a teški zadatci ne postoje uz dobro vodstvo učitelja, a na učitelju je da sam procjeni koji su zadatci teži. Možda je samo najteži zadatak odvažiti se na promjene.

LITERATURA:

1. Aruz, J. (2010). Archaeology and the Department of Ancient Near Eastern Art. *The Metropolitan Museum of Art Bulletin, New Series*, 1(68), 4-48. Dostupno na http://www.jstor.org/stable/25701608?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents na dan [21. 6. 2018]
2. Backe-Neuwald, D. (2000). *Bedeutsame Geometrie in der Grundschule: Aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, des Faches, des Bildungsauftrages und des Kindes*. Dissertation. Paderborn: Universität Paderborn.
3. Bilješke s predavanja Metodike matematike 2 na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, ak. godine. 2016./2017
4. Bognar, L., Matijević, M. (2005.). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.
5. Cindrić, M. i Vlasnović, H. (2014). Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema van hieleovoj teoriji. *Školski vjesnik*, 63(1-2), 37-51. Dostupno na <https://hrcak.srce.hr/> na dan [21. 6. 2018]
6. Čižmešija, A., Svedrec, R., Radović, N., Soucie, T. (2010). Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole. U P. Mladnić, R. Svedrec (Ur.), *Zbornik radova IV. kongresa nastavnika matematike RH* (str. 143-162). Zagreb: Školska knjiga, Hrvatsko matematičko društvo.
7. Dadić, Ž. (1992). *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Zagreb: Školska knjiga.
8. Einarsdóttir, J. (2007). Research with children: methodological and ethical challenges. *European Early Childhood Education Research Journal*, 15(2), 197–211.
9. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel.
10. Glasnović Gracin, D. (2011). *Requirements in mathematics textbooks and PISA assessment*. (Doctoral dissertation, University of Klagenfurt). Klagenfurt: University of Klagenfurt.
11. Glasnović Gracin, D. (2016). Jestiva zadaća. *Matematika i škola*, 87(18), 50.
12. Glasnović Gracin, D. (2018). Escape room: Hrvatski kurikulum, *Matematika i škola*. Dostupno na: <https://mis.element.hr/blogpost/106/escape-room->

[hrvatski-kurikulum](#) na dan [22. 6. 2018.]

13. Glasnović Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Dostupno na: [10.1080/0020739X.2018.1431849](https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849) na dan [1. 7. 2018.]
14. Glasnović Gracin, D., Kuzle, A. (2018). Drawings as external representations of children's fundamental ideas, and emotional atmosphere in geometry lessons. *CEPS Journal*, 8(2), 31-53.
15. Gleizer, G. I. (2003). *Povijest matematike za školu*. Zagreb: Školske novine, Hrvatsko matematičko društvo.
16. Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
17. Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Rowland (Eds.) *Proceedings of the seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME* (pp. 34–60). Poland: University of Rzesów.
18. Harrison, L. J., Clarke, L., & Ungerer, J. A. (2007). Children's drawings provide a new perspective on teacher-child relationship quality and school adjustment. *Early Childhood Research Quarterly*, 22(1), 55–71. Dostupno na: [10.1016/j.ecresq.2006.10.003](https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2006.10.003) na dan [1. 7. 2018.]
19. Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the geometry curriculum. In B. Barton (Ed.), *Readings in mathematics education* (pp. 75–90). Auckland, New Zealand: University of Auckland.
20. Kovačević, Nikolina. (2016). Prostorno mišljenje i geometrija prostora. *Matematika i škola*, 85 (17). 196-204.
21. Kurnik, Z. (2002a). Načelo znanstvenosti. *Matematika i škola*, 13 (3). 102 – 106.
22. Kurnik, Z. (2002b). Načelo problemnosti. *Matematika i škola*, 14 (3). 148 – 152.
23. Kurnik, Z. (2006) Heuristička nastava. *Miš*, 34(7),148-153. Dostupno na <https://mis.element.hr/fajli/402/34-02.pdf> na dan [7. 6. 2018.]
24. Kurnik, Z. (2009a). Načelo primjerenosti. *Matematika i škola*, 48 (10). 100 – 105.
25. Kurnik, Z. (2009b). Načelo trajnosti znanja. *Matematika i škola*, 54 (11). 52 -

26. Kurnik, Z. (2010). Načelo interesa. *Matematika i škola*, 52 (11), 148 - 152.
27. Kuzle, A., & Dohrmann, C. (2014). Unpacking children's angle "Grundvorstellungen": The case of distance Grundvorstellung of 1° angle. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterkle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 409–416). Vancouver, Canada: PME.
28. Laine, A., Ahtee, M., Näveri, L., Pehkonen, E., Portaankorva-Koivisto, P., Tuohilampi, L. (2015). Collective emotional atmosphere in mathematics lessons based on Finnish fifth graders' drawings. *LUMAT – Research and Practice in Math, Science and Technology Education*, 3(1), 87–100. Dostupno na: <https://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/42> na dan [1. 7. 2018.]
29. Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M., Hannula, M. S., Pehkonen, E. (2013). Emotional atmosphere in third-graders' mathematics classroom – an analysis of pupils' drawings. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17 (3-4), 101–116.
30. Mammana, C., Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
31. Markovac, J. (2001). *Metodika početne nastave matematike*. Zagerb: Školska knjiga.
32. MZOS - Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Dostupno na: <http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2197> na dan [21. 6. 2018]
33. NN. (2007). Legenda o Arhimedovoj smrti. *Matematika i škola*, 41(9), 48-49. Dostupno na <https://mis.element.hr/fajli/720/41-12.pdf> na dan [7. 6. 2018.]
34. Rolka, K., Halverscheid, S. (2006). Pictures as a means for investigating mathematical beliefs. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

35. Viličić, M. (2000). Arhitekt i njegov nacrt u starom vijeku: Prapovijest, Egipat, Mezopotamija. *Prostor*, 8(2(20)), 121-136. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/> na dan [21. 6. 2018]
36. Wittmann, E. Ch. (1999). Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Ed.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (pp. 205–223). Oldenburg: Buelmann und Gerriets.

IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI RADA

Izjavljujem da sam ja, Antonia Miloš, diplomski naziv pod nazivom Fundamentalne ideje u geometriji i nastavi geometrije izradila samostalno uz vodstvo i sugestije mentorice.

Svi dijelovi rada, nalazi ili ideje koje su u radu citirane ili se temelje na drugim izvorima, bilo da su u pitanju knjige, znanstveni ili stručni članci, Internet stranice, zakoni i sl. u radu su jasno označeni kao takvi te adekvatno navedeni u popisu literature.

U Zagrebu, _____

(Potpis studenta)